

MIGUEL MATTAR NETO

ELEMENTOS FINITOS SIMPLES DE PLACA

**Tese apresentada à Escola
Politécnica da USP para a
obtenção do Título de Doutor em
Engenharia.**

**Orientador: Dr. Paulo de Mattos Pimenta
Prof. do Departamento de
Estruturas e Fundações da
EPUSP**

São Paulo, 1989

MIGUEL MATTAR NETO

ELEMENTOS FINITOS SIMPLES DE PLACA

Tese apresentada à Escola
Politécnica da USP para a
obtenção do título de
Doutor em Engenharia

MIGUEL MATTAR NETO

Eng. Civil, Escola Politécnica da USP, 1977
Mestre em Reatores Nucleares de Potência e Tecnologia Do
Combustível Nuclear, IPEN-USP, 1980

ELEMENTOS FINITOS SIMPLES DE PLACA



Tese apresentada à Escola
Politécnica da USP para a
obtenção do título de
Doutor em Engenharia

Orientador : Dr. Paulo de Mattos Pimenta
Prof. do Departamento de
Estruturas e Fundações da
EPUSP

São Paulo, 1989

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me ajudaram a chegar até este ponto e, em particular, ao meu orientador Prof. Paulo de Mattos Pimenta.

RESUMO

São apresentados os fundamentos das Teorias das Placas Clássica de Kirchhoff e de Mindlin-Reissner para problemas elásticos e lineares mostrando as principais diferenças entre elas.

São desenvolvidos 15 elementos finitos de placa triangulares com 3 nós e 9 graus de liberdade, sendo 14 baseados na Teoria de Mindlin-Reissner e um formulado a partir de parâmetros concentrados. Buscou-se a simplicidade da formulação com a utilização de funções de interpolação com continuidade C^0 , principalmente. Foram discutidos aspectos mais significativos relacionados com estes elementos como a formulação explícita das matrizes de rigidez, sem integração numérica, e o travamento por cisalhamento ("shear locking").

Os elementos finitos de placa desenvolvidos foram comparados, a partir de critérios definidos visando a precisão dos elementos bem como sua eficiência computacional numa futura generalização à análise de cascas em problemas não-lineares, por meio da análise espectral de suas matrizes de rigidez para diferentes geometrias, do "patch test" de placas finas, da análise de placas finas quadradas e do teste de torção em placas finas retangulares engastadas. Foi indicado um elemento entre os estudados que apresenta boas perspectivas para se aplicado à generalização mencionada.

ABSTRACT

The fundamentals of the Classic Kirchhoff and Mindlin-Reissner Plate Theories for linear elastic problems are presented and the main differences between them are shown.

Fifteen triangular plate finite elements are developed, each with three nodes and nine degrees of freedom, of which fourteen are based on the Mindlin-Reissner plate theory and one on concentrated parameters. Formulation simplicity was pursued with the utilization of interpolation functions with C^0 continuity, mainly. Relevant features of these elements, such as the explicit formulation of the stiffness matrices without numerical integration and the shear locking are discussed.

The plate finite elements herein developed were compared, using criteria that were defined in order to assure element accuracy and computational efficiency in a future generalization for shell analysis in non-linear problems. Spectral analysis of the stiffness matrices for different geometries of the elements, thin plate patch test, square thin plate analysis and twisting tests of cantilever rectangular thin plates were performed. The comparison indicated that one of the elements presents good prospects to be successfully employed in the above mentioned application.

ÍNDICE

	página
AGRADECIMENTOS	i/
RESUMO	ii/
ABSTRACT	iii/
ÍNDICE	iv/
NOMENCLATURA	vi/
OBSERVAÇÃO	viii/
LISTA DE FIGURAS	ix/
LISTA DE TABELAS	x/
Capítulo 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 Histórico	1
1.2 Critérios	3
1.3 Objetivos	4
Capítulo 2 - TEORIA DAS PLACAS	5
2.1 Relações Básicas	5
2.2 Momentos e Forças Cortantes	9
2.3 Relações Deformações-Deslocamentos e Curvaturas	10
2.4 Relações Tensão-Deformação	11
2.5 Equações de Equilíbrio	13
2.6 Condições de Contorno	13
2.7 Energia Potencial	15
Capítulo 3 - O ELEMENTOS ESTUDADOS	21
3.1 Introdução	21
3.2 A Montagem das Matrizes de Rigidez	24
3.3 O Travamento por Cisalhamento	26
3.4 Os Elementos Lineares	33
3.5 O Elemento de Hughes	37
3.6 O Elemento DRT	44
3.7 O Elemento TRUMP	51
3.7.1 Introdução	51
3.7.2 Matriz de Rigidez Natural do TRIM-3	51
3.7.3 Desenvolvimento do TRUMP	56
3.7.4 Matriz de Rigidez Natural do TRUMP	58
3.7.5 Matriz de Rigidez Cartesiana	66
3.7.6 Tensões	73
3.8 O Elemento DKT	75
3.9 Comparação Entre os Elementos	82
3.9.1 Análise Espectral da Matriz de Rigidez dos Elementos	83

3.9.2	"Patch Test" da Teoria Clássica de Kirchhoff	99
3.9.3	Análise de Placas Finas Quadradas	90
3.9.4	Teste de Torção	104
Capítulo 4 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES		111
4.1	Sugestões para Continuidade do Trabalho	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		116

NOMENCLATURA

X, Y, Z - direções do sistema de coordenadas cartesiano global

x, y, z - direções do sistema de coordenadas cartesiano local

n, s - direções do sistema de coordenadas local na placa

u, v, w - deslocamentos nas direções X, Y e Z, respectivamente

M_x, M_y, M_{xy} - momentos por unidade de comprimento

Q_x, Q_y - forças cortantes por unidade de comprimento

β_x, β_y - rotações (β_x = w,_x e β_y = w,_y)

(·),_x = ∂(·)/∂x - operador derivada parcial relativo a x

θ_x, θ_y - rotações nas direções x e y

k_x, k_y, k_{xy} - curvaturas

ε_x, ε_y - deformações nas direções x e y

γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} - deformações por cisalhamento no sistema cartesiano

σ_x, σ_y - tensões normais nas direções x e y

τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} - tensões de cisalhamento no sistema cartesiano

E - módulo de elasticidade

μ - coeficiente de Poisson

G - módulo de elasticidade transversal ($G = \frac{E}{2(1+\mu)}$)

D - rigidez à flexão da placa ($D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}$)

h - fator de distribuição do cisalhamento ao longo da seção transversal (h = 5/6)

t - espessura da placa

- π - energia potencial
- W - energia de deformação
- V - energia potencial dos carregamentos aplicados
- k - vetor das curvaturas
- f - vetor das deformações por cisalhamento transversal
- M - vetor dos momentos por unidades de comprimento
- Q - vetor das forças cortantes por unidade de comprimento
- D_f - matriz elasticidade, flexão
- D_c - matriz elasticidade, cisalhamento
- B_f - matriz que relaciona deformações com deslocamentos no elemento, flexão
- B_c - matriz que relaciona deformações com deslocamentos no elemento, cisalhamento
- K_f - matriz de rigidez do elemento, flexão
- K_c - matriz de rigidez do elemento, cisalhamento
- K - matriz de rigidez do elemento ou da estrutura
- L e α - matrizes de decomposição de matriz com termos lineares em X e Y (por exemplo, $A = L \alpha$)
- d - vetor dos deslocamentos nodais do elemento
- L_i - funções de interpolação lineares do triângulo
- N_i - funções de interpolação quadráticas do triângulo

OBSERVAÇÃO

Foi utilizado o programa de computador dado em [33] para a execução das análises, com as rotinas dos elementos desenvolvidos sendo implementadas no formato indicado na referência mencionada.

O programa de [33] foi implementado em um computador CDC Cyber 170/750 sofrendo pequenas alterações para que o processamento fosse feito.

LISTA DE FIGURAS

Figura		página
2.1	Elemento diferencial de placa	5
2.2	Cinemática da placa - Teoria Clássica de Kirchhoff	7
2.3	Cinemática da placa - Teoria de Mindlin-Reissner	8
2.4	Contorno da placa - Sistema local de coordenadas n,s	14
2.5	Relações entre as rotações	18
3.1	Elemento de casca facetado	21
3.2	Elemento de viga	26
3.3	Elemento triangular de placa - 3 nós e 9 graus de liberdade	34
3.4	Elemento triangular de placa - Nós no meio dos lados e sistema local de coordenadas n,s	38
3.5	Elemento triangular de placa - coordenadas no sistema local	40
3.6	Elemento DRT	44
3.7	Elemento DRT - Geometria 2×2	46
3.8	Elemento DRT - Caso geral	47
3.9	Elemento de membrana TRIM-3	51
3.10	Elemento TRUMP - Decomposição em camadas de TRIM-3	57
3.11	Elemento TRUMP - Decomposição dos TRIM-3	59
3.12	Modos de corpo rígido e naturais de um elemento de viga	68
3.13	Esforços de corpo rígido e naturais de um elemento de viga	69
3.14	"Patch test"	89
3.15	Placas quadradas - Malhas utilizadas	91
3.16 a		
3.27	Comparações entre valores calculados e analíticos de deslocamentos e momentos para as análises de placas finas quadradas	92 a 103
3.28 a		
3.33	Comparações dos testes de torção	105 a 110

LISTA DE FIGURAS

Figura		página
2.1	Elemento diferencial de placa	5
2.2	Cinemática da placa - Teoria Clássica de Kirchhoff	7
2.3	Cinemática da placa - Teoria de Mindlin-Reissner	8
2.4	Contorno da placa - Sistema local de coordenadas n,s	14
2.5	Relações entre as rotações	18
3.1	Elemento de casca facetado	21
3.2	Elemento de viga	26
3.3	Elemento triangular de placa - 3 nós e 9 graus de liberdade	34
3.4	Elemento triangular de placa - Nós no meio dos lados e sistema local de coordenadas n,s	38
3.5	Elemento triangular de placa - coordenadas no sistema local	40
3.6	Elemento DRT	44
3.7	Elemento DRT - Geometria 2x2	46
3.8	Elemento DRT - Caso geral	47
3.9	Elemento de membrana TRIM-3	51
3.10	Elemento TRUMP - Decomposição em camadas de TRIM-3	57
3.11	Elemento TRUMP - Decomposição dos TRIM-3	59
3.12	Modos de corpo rígido e naturais de um elemento de viga	68
3.13	Esforços de corpo rígido e naturais de um elemento de viga	69
3.14	"Patch test"	89
3.15	Placas quadradas - Malhas utilizadas	91
3.16 a		
3.27	Comparações entre valores calculados e analíticos de deslocamentos e momentos para as análises de placas finas quadradas	92 a 103
3.28 a		
3.33	Comparações dos testes de torção	105 a 110

LISTA DE TABELAS

Tabela		página
3.1	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo equilátero $t = 10$	84
3.2	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo equilátero $t = 0,1$	84
3.3	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo equilátero $t = 0,001$	85
3.4	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo escaleno $t = 10$	85
3.5	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo escaleno $t = 0,1$	86
3.6	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo escaleno $t = 0,001$	86
3.7	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo retângulo $t = 10$	87
3.8	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo retângulo $t = 0,1$	87
3.8	Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos - triângulo retângulo $t = 0,001$	88

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - HISTÓRICO

A análise de cascas tem grande importância no projeto de estruturas aplicáveis em várias indústrias tais como a mecânica, naval, nuclear, química e aeroespacial. Vasos de pressão, cascos de navios e submarinos, painéis de aviões e satélites e monoblocos de veículos são alguns exemplos de cascas que necessitam de uma análise detalhada e cuidadosa. Muitas vezes esta análise deve ultrapassar o regime linear, permitindo não-linearidades físicas e geométricas, para se poder avaliar corretamente o nível de segurança do projeto.

Teorias estruturais para a análise de cascas são conhecidas desde o século passado. Soluções analíticas para estas teorias são conhecidas somente para casos muito particulares de geometria e carregamento. São utilizados, então, métodos numéricos para solução de problemas estruturais com geometrias e condições de contorno gerais.

Entre os métodos numéricos pode-se destacar o método dos elementos finitos cuja aplicação na análise de cascas iniciou-se nos anos 60. A teoria estrutural na qual os trabalhos se baseavam era a teoria clássica das cascas de Kirchhoff-Love. Esta teoria exige continuidade C^1 das funções de interpolação impondo grandes dificuldades ao desenvolvimento de elementos finitos de casca. Foram elaborados, inicialmente, elementos chamados compatíveis que atendiam a continuidade C^1 , mas com esquemas de formulação bastante complexos que tornavam sua aplicação tarefa de especialistas além de impedir sua utilização em análises não-lineares. A seguir passou-se a pesquisar elementos, ditos não conformes, que não respeitavam a condição de continuidade indicada. Foram encontrados problemas de convergência com o método, tendo sido introduzido o "patch-test" como critério de convergência [37].

No final dos anos 60 e início da década de 70 dois novos caminhos surgiram : os elementos híbridos e os elementos sólidos degenerados.

Os elementos híbridos utilizam uma interpolação para o campo de tensões distinta da interpolação do campo de deslocamentos, não sendo mais necessária a continuidade C^1 , uma vez que o funcional utilizado não é a energia potencial mas o funcional de Reissner. Os elementos híbridos, apesar de alguns excelentes resultados,

apresentaram também inconvenientes : podiam conter modos cinemáticos de deformação, podiam ser inefficientes e não facilmente generalizados para análises não-lineares de cascas.

A formulação dos elementos sólidos degenerados orientou as pesquisas para a utilização de outra teoria estrutural, a teoria das cascas de Mindlin-Reissner. Esta teoria tem a vantagem de exigir continuidade C^1 para as funções de interpolação, sendo que as rotações, além dos deslocamentos, são interpoladas. Elementos gerados dentro desta teoria são simples e com boas possibilidades de generalização para análises não-lineares. Notou-se, no entanto, para os primeiros elementos formulados que eles eram excessivamente rígidos quando aplicados em análise de cascas finas, com a rigidez ao cisalhamento encobrendo a de flexão. Para eliminar este problema, denominado travamento por cisalhamento ("shear locking"), foram tentadas algumas técnicas principalmente a integração reduzida da parcela de cisalhamento, que é equivalente a um elemento híbrido [25], mas tem o inconveniente de introduzir modos cinemáticos de deformação.

Na década de 80 continuou-se a pesquisar elementos finitos de casca para a teoria de Mindlin-Reissner. Percebeu-se, por exemplo, que elementos de casca de ordem superior que, por serem curvos, deveriam aproximar melhor as tensões de membrana, apresentam o fenómeno do travamento de membrana, prejudicando totalmente o seu desempenho, apesar de não apresentarem o travamento por cisalhamento ("shear locking"). Novamente o expediente de integração reduzida foi acionado, às custas de novos modos cinemáticos de deformação.

1.2 - CRITERIOS

Tendo em vista este histórico, passou-se a investigar qual o melhor elemento de placa/casca dentro dos seguintes critérios:

(1) O elemento pode ser triangular com três nós ou quadrangular com quatro nós e seis/três graus de liberdade por nó (três deslocamentos e três rotações/um deslocamento e duas rotações) para cascas/placas. Restringiu-se o estudo a elementos triangulares pois com eles qualquer geometria pode ser discretizada, sendo que pelo fato do elemento ter poucos nós a malha deverá ser refinada, o que pode ser vantajoso na análise-não linear.

(2) O elemento deve ter o vetor dos esforços nodais internos e a matriz de rigidez formulados explicitamente, sem integração numérica, para que o elemento seja eficiente.

(3) É conveniente que o elemento não contenha modos cinemáticos de deformação.

(4) O elemento deve ser aplicável a cascas espessas e a cascas finas, reproduzindo neste caso a teoria de Kirchhoff-Love.

(5) O elemento não deve ser sensível a distorções em sua geometria.

(6) O elemento não deve apresentar travamento por cisalhamento nem travamento de membrana. Este último não é tão relevante para elementos simples como os aqui desejados.

(7) O elemento deve ser derivado de tal forma que apresente graus de liberdade do tipo deslocamento na forma final, sendo possível a definição de um campo de deslocamentos e deformações no seu interior. Pode-se, assim, formular carregamentos nodais equivalentes, matriz de massa consistente e matriz de rigidez geométrica (por exemplo, utilizando a abordagem de [32]).

(8) O elemento deve ser facilmente generalizado para problemas com não-linearidades físicas e/ou geométricas de cascas/placas. Deve apresentar condições para a definição da matriz de rigidez geométrica como indicado em (7) acima, e permitir facilidades para aplicação em problemas com materiais anisotrópicos e com cascas/placas tipo sanduíche.

1.3 OBJETIVOS

Desde que uma estrutura de placa é um caso especial de uma estrutura de casca, de posse de um elemento de placa com as principais características indicadas acima, pode-se fazer uma generalização para a análise de cascas combinando o elemento de placa com um elemento de membrana. Deste modo, procurou-se escolher neste trabalho um elemento de placa para uma posterior generalização à análise de cascas, considerando os critérios aplicáveis indicados.

Para os elementos de placa desenvolvidos foram feitas avaliações em aplicações estáticas e lineares verificando se os critérios acima mencionados eram atendidos.

2 - TEORIA DAS PLACAS

Neste item são mostradas as equações das teorias das placas clássica de Kirchhoff e de Mindlin-Reissner, para comparação entre elas e para fornecimento das informações necessárias para o desenvolvimento dos elementos. Aspectos mais detalhados são apresentados na referência [31] para a primeira e em [17],[24] e [16] para a segunda.

A apresentação das duas teorias é feita de forma conjunta sendo discutidas as diferenças entre elas em cada grupo de equações.

2.1 - RELAÇÕES BÁSICAS

Um elemento diferencial de placa de espessura t é mostrado na Figura 2.1.

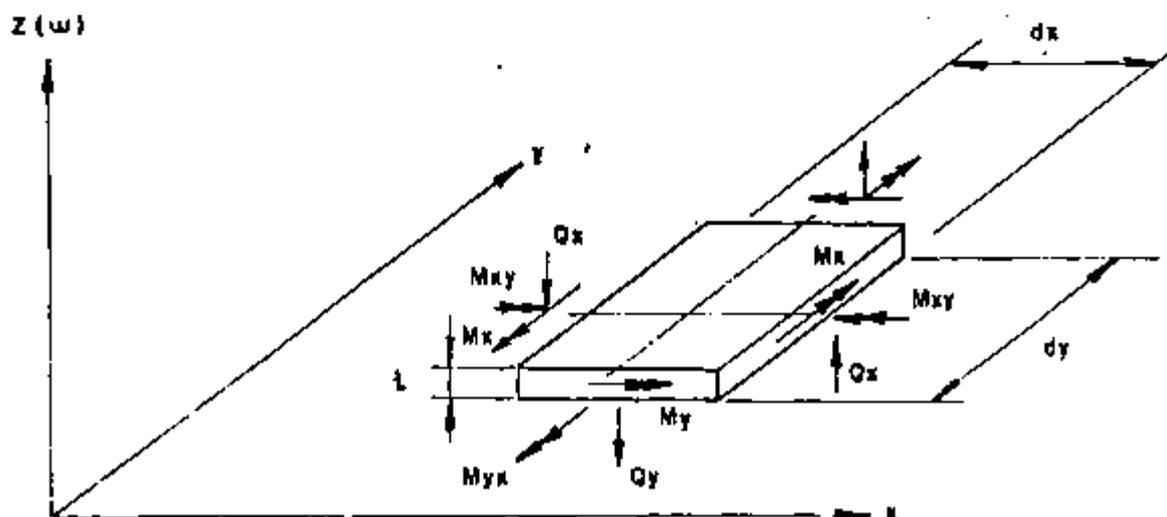


Figura 2.1 : Elemento diferencial de placa

As hipóteses básicas para as teorias das placas são :

1. Não há deformações na superfície média da placa e a superfície neutra vai gerar a superfície elástica.
2. O efeito de σ_z é desprezível no cálculo das deformações.
3. A outra hipótese vem da cinemática da placa que é indicada na Figura 2.2 para a teoria clássica de Kirchhoff e na Figura 2.3 para a teoria de Mindlin-Reissner

Para a teoria clássica de Kirchhoff as hipóteses cinemáticas são, conforme a Figura 2.2

$$u = - z \beta_x(x,y) \quad (2.1)$$

$$v = - z \beta_y(x,y) \quad (2.2)$$

$$w = w(x,y) \quad (2.3)$$

onde

$$\beta_x = w_{,x} \quad (2.4)$$

$$\beta_y = w_{,y} \quad (2.5)$$

e a utilização da vírgula denota diferenciação (isto é, $w_{,x} = \partial w / \partial x$).

Para a teoria de Mindlin-Reissner as hipóteses cinemáticas são, conforme a Figura 2.3, as mesmas das equações (2.1), (2.2) e (2.3), porém

$$\beta_x = w_{,x} - \int z z \quad (2.6)$$

$$\beta_y = w_{,y} - \int y z \quad (2.7)$$

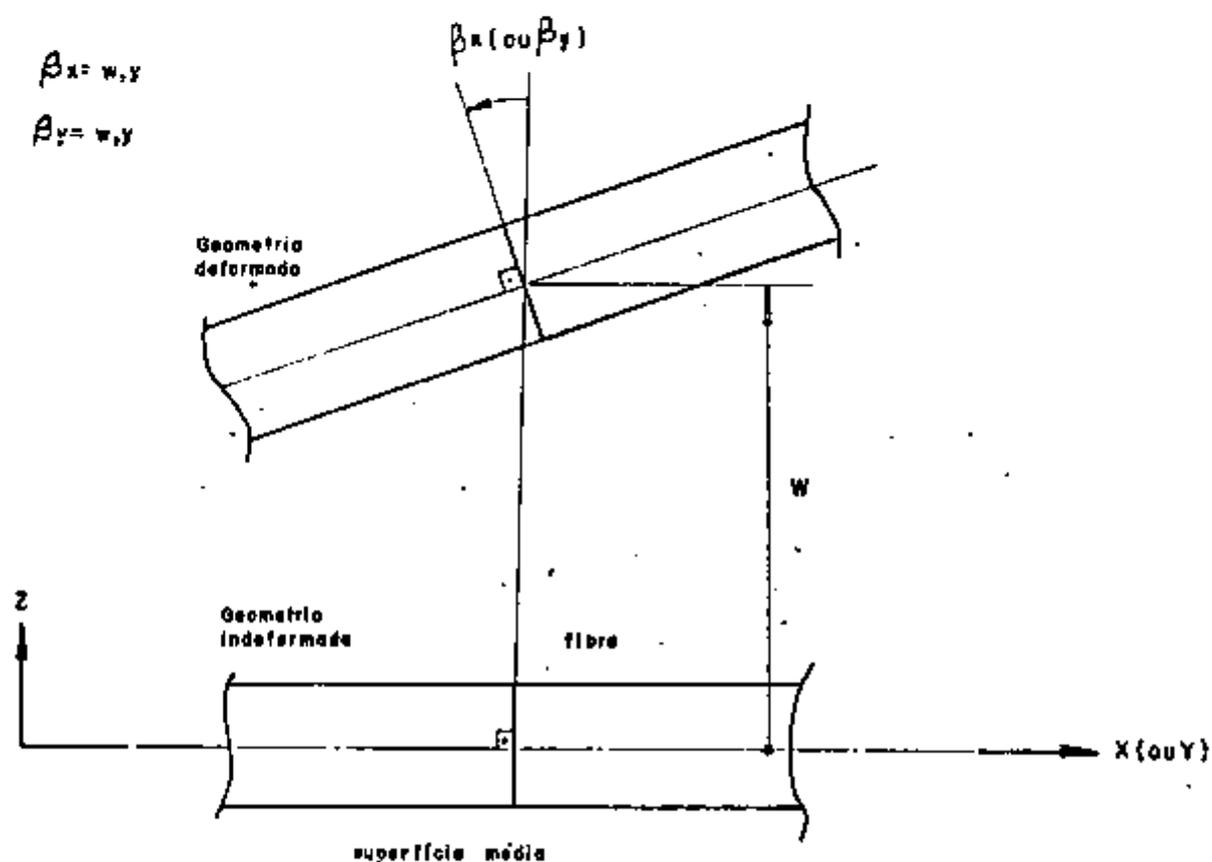


Figura 2.2 : Cinemática da placa - Teoria Clássica de Kirchhoff

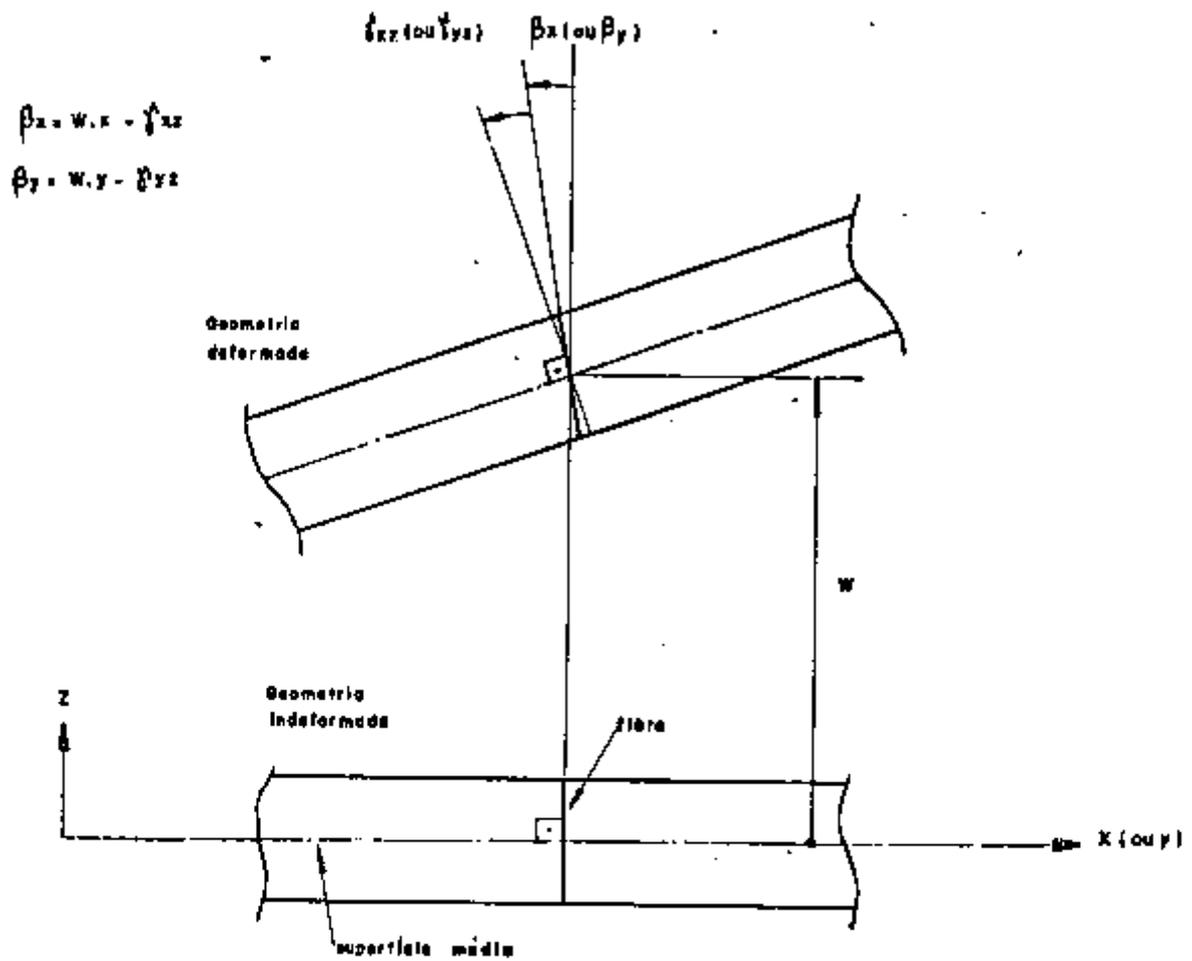


Figura 2.3 : Cinemática da placa - Teoria de Mindlin-Reissner

Das equações (2.4), (2.5), (2.6) e (2.7) pode-se notar a principal diferença entre as duas teorias das placas. Na teoria clássica de Kirchhoff os pontos que pertencem a uma fibra normal à superfície média antes da deformação permanecem numa fibra normal à superfície elástica após o equilíbrio e as deformações por cisalhamento transversal são desprezíveis para o cálculo dos deslocamentos. Na teoria de Mindlin-Reissner a fibra normal à superfície média permanece reta, porém, não necessariamente normal à superfície média deformada, havendo a acomodação das deformações por cisalhamento transversal. No limite para placas finas, onde se espera que as deformações por cisalhamento transversal sejam bem pequenas, há aderência entre as duas teorias.

2.2 - MOMENTOS E FORÇAS CORTANTES

As hipóteses de cálculo básicas nas duas teorias indicam que uma fibra reta normal à superfície média na situação indeformada permanece reta na situação deformada indicando que as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} variam linearmente ao longo da espessura t e a sua integração ao longo da espessura gera as tensões generalizadas M_x , M_y e M_{xy} , que são momentos por unidade de comprimento, cuja convenção de sinais é mostrada na Figura 2.1. As tensões generalizadas podem ser utilizadas no lugar das tensões, havendo as seguintes relações entre elas:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \, dz \quad (2.8)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \, dz \quad (2.9)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz \quad (2.10)$$

Na teoria clássica de Kirchhoff, por considerações de equilíbrio, há as forças cortantes por unidade de comprimento Q_x e Q_y , que na teoria de Mindlin-Reissner são obtidas pela integração ao longo da espessura das tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} :

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (2.11)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (2.12)$$

2.3 - RELAÇÕES DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS E CURVATURAS

As deformações ϵ_x , ϵ_y e $\hat{\gamma}_{xy}$ podem ser relacionadas com as deformações generalizadas, as curvaturas k_x , k_y e k_{xy} , a partir das equações deformações-deslocamentos:

$$\epsilon_x = u_{,x} = -z \beta_{x,x} = -z k_x \quad (2.13)$$

$$\epsilon_y = v_{,y} = -z \beta_{y,y} = -z k_y \quad (2.14)$$

$$\hat{\gamma}_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = -z (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) = -z k_{xy} \quad (2.15)$$

onde

$$k_x = \beta_{x,x} \quad (2.16)$$

$$k_y = \beta_{y,y} \quad (2.17)$$

$$k_{xy} = \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \quad (2.18)$$

As relações (2.13) a (2.18) são válidas para as duas teorias e devem ser também consideradas as equações (2.4) e (2.5) para a teoria clássica de Kirchhoff e (2.6) e (2.7) para a teoria de Mindlin-Reissner.

2.4 - RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Das relações dadas pela lei Hooke (material elástico linear e isotrópico)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \quad (2.19)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \quad (2.20)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.22)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.23)$$

sendo E o módulo de elasticidade, μ o coeficiente de Poisson e $G = E / (2(1+\mu))$.

Fazendo as integrações indicadas em (2.8) a (2.10), e utilizando as relações (2.13) a (2.18) resulta

$$M_x = -D (k_x + \mu k_y) \quad (2.24)$$

$$M_y = -D (k_y + \mu k_x) \quad (2.25)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\mu)}{2} k_{xy} \quad (2.26)$$

onde

$$D = \frac{E t^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (2.27)$$

Para a teoria de Mindlin-Reissner há duas relações adicionais:

$$\tau_{xz} = G \hat{\gamma}_{xz} \quad (2.28)$$

$$\tau_{yz} = G \hat{\gamma}_{yz} \quad (2.29)$$

e, de (2.11) e (2.12), então:

$$Q_x = C \hat{\gamma}_{xz} \quad (2.30)$$

$$Q_y = C \hat{\gamma}_{yz} \quad (2.31)$$

onde $C = h G t$ é a rigidez ao cisalhamento transversal. Para uma placa homogênea de material elástico linear isotrópico $h = 5/6$ e $G = E/(2(1+\mu))$.

O fator h serve para considerar a distribuição não uniforme das tensões de cisalhamento transversal ao longo da espessura.

2.5 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações de equilíbrio podem ser escritas, então, para as duas teorias

$$M_{x,x} + M_{xy,y} = Q_x \quad (2.32)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} = Q_y \quad (2.33)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + q = 0 \quad (2.34)$$

onde q é o carregamento transversal distribuído.

2.6 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Considerando a borda de uma placa e o sistema de coordenadas locais n e s tangenciando o contorno de acordo com a Figura 2.4, as condições de contorno mais comumente encontradas são dadas por:

Teoria Clássica de Kirchhoff

Teoria de Mindlin-Reissner

(1) Lado engastado

$$w = 0 \\ w_{,n} = 0$$

$$w = 0 \\ \theta_n = 0 \\ \theta_s = 0$$

(2) Lado simplesmente apoiado

$$w = 0 \\ M_n = 0$$

(1)	(11)
$w = 0$	$w = 0$
$M_n = 0$	$M_n = 0$
$M_s = 0$	$\theta_s = 0$

Utilizando elementos finitos desenvolvidos a partir da Teoria Clássica de Kirchhoff em problemas de placas finas simplesmente apoiadas, que tenham contornos curvos aproximados por lados retos, a condição de contorno mencionada (2)(ii) pode causar um enrijecimento fictício. Nos elementos adjacentes no contorno, a condição $w, s = 0$, onde as direções s dos elementos não são colineares, implica que ocorra, também, a condição $w, n = 0$. Se houver um refinamento da malha, um "lado simplesmente apoiado" tenderá para um "lado engastado".

Outro problema mencionado em [16] é o da placa fina rômica simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído, onde a solução analítica é singular na vizinhança dos vértices obtusos, ocorrendo momentos com sinais opostos. Nesta situação, a utilização de elementos finitos obtidos a partir da Teoria Clássica de Kirchhoff pode levar a soluções onde os momentos têm o mesmo sinal se for aplicada a condição de contorno mencionada.

Com elementos finitos desenvolvidos a partir da Teoria de Mindlin-Reissner os problemas citados podem ser evitados com a condição de contorno opcional (2)(i). Além disso, não se deve descartar a utilização da condição (2)(ii) pois em análise onde não haja riscos de problemas semelhantes ela apresenta economia pela eliminação de graus de liberdade.

2.7 - ENERGIA POTENCIAL

As formulações dos elementos finitos serão feitas via aplicação do princípio da energia potencial. Assim

$$\pi = W + V \quad (2.35)$$

onde π é a energia potencial da estrutura ou de parte dela, W é a energia de deformação e V é a energia potencial dos carregamentos aplicados.

A energia de deformação específica é na teoria clássica de Kirchhoff

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \hat{\gamma}_{xy}) \quad (2.36)$$

e, na teoria de Mindlin-Reissner

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (2.37)$$

Substituindo as equações (2.13), (2.14) e (2.15) nas equações (2.35) e (2.36) e integrando ao longo da espessura chega-se a

$$dW = \frac{1}{2} (- M_x k_x - M_y k_y - M_{xy} k_{xy}) dx dy \quad (2.38)$$

$$dW = \frac{1}{2} (- M_x k_x - M_y k_y - M_{xy} k_{xy} + Q_x f_{xz} + Q_y f_{yz}) dx dy \quad (2.39)$$

Substituindo as equações (2.16), (2.17) e (2.18) e as relações tensão-deformação (2.24), (2.25) e (2.26) na equação (2.38) e integrando, então, para a teoria clássica de Kirchhoff

$$W = \frac{1}{2} \int_A D \{ \beta^2_{x,x} + \beta^2_{y,y} + 2 \mu \beta_{x,y} \beta_{y,x} + \frac{\mu-1}{2} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x})^2 \} dx dy \quad (2.40)$$

Para a teoria de Mindlin-Reissner, substitui-se da mesma forma as equações (2.16), (2.17) e (2.18) e as relações tensão-deformação (2.24), (2.25) e (2.26) na equação (2.39), mais ainda as equações (2.6), (2.7), (2.30) e (2.31).

Fazendo a integração

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2} \int_A D \{ \beta^2 x,x + \beta^2 y,y + 2 \mu \beta_{x,y} \beta_{y,x} \\
 & + \frac{\mu-1}{2} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x})^2 \} dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_A C \{ (w,x - \beta_x)^2 + (w,y - \beta_y)^2 \} dx dy \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

Introduzindo a notação matricial

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} ; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{xz} \\ f_{yz} \end{bmatrix} ; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{D}_r = - D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\mu-1)/2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{D}_c = C \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

pode-se escrever

$$M = D_f k \quad (2.46)$$

$$Q = D_c \quad (2.47)$$

$$\pi = k_f \int_A k^t D_f k \, dA + V \quad (2.48)$$

para a teoria clássica de Kirchhoff, e

$$\pi = k_f \int_A k^t D_f k \, dA + k_f \int_A t D_c \, dA + V \quad (2.49)$$

para a teoria de Mindlin-Reissner.

Para facilitar a formulação dos elementos são introduzidas as rotações da regra da mão direita em relação aos eixos x e y, θ_x e θ_y , respectivamente, conforme a Figura 2.5. As relações entre as rotações são

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

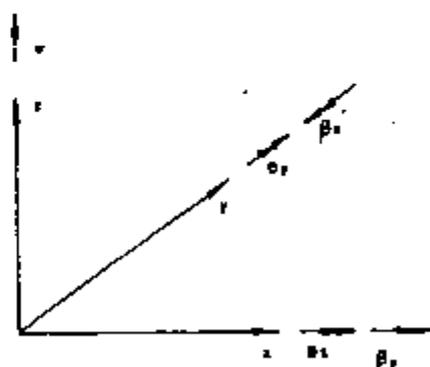


Figura 2.5 : Relações entre as rotações

Considerando um sistema de coordenadas local n,s conforme a Figura 2.4 as rotações se relacionam da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\theta_n &= \beta_s \\ \theta_s &= -\beta_n\end{aligned}\tag{2.51}$$

Deste modo, as deformações generalizadas têm as seguintes relações com os deslocamentos w , θ_x e θ_y da placa:

$$k = \begin{bmatrix} -\theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{x,x} - \theta_{y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(*)_{,x} \\ 0 & (*)_{,y} & 0 \\ 0 & (*)_{,x} & -(*)_{,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}\tag{2.52}$$

$$= \begin{bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} - \theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (*)_{,x} & 0 & 1 \\ (*)_{,y} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}\tag{2.53}$$

onde $(*)_{,x}$ indica $\partial(*)/\partial x$

Chamando

$$d^t = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}]\tag{2.54}$$

os deslocamentos nodais de um elemento triangular de placa, de N as matrizes que indicam as funções de interpolação do elemento e de B_f e B_c as matrizes que relacionam os deslocamentos nodais com as deformações generalizadas k e , então

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(*)_{,x} \\ 0 & (*)_{,y} & 0 \\ 0 & (*)_{,x} & -(*)_{,y} \end{bmatrix} N\tag{2.55}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} (\cdot) \cdot x & 0 & 1 \\ (\cdot) \cdot y & -1 & 0 \end{bmatrix} N \quad (2.56)$$

Das equações (2.48) e (2.49) as matrizes de rigidez de flexão K_f e de cisalhamento K_c são nos elementos de placa

$$K_f = \int_A B_f^t D_f B_f dA \quad (2.57)$$

$$K_c = \int_A B_c^t D_c B_c dA \quad (2.58)$$

sendo que na teoria clássica de Kirchhoff só há a matriz K_f .

Utilizando (2.46), (2.47), (2.55) e (2.56) as tensões podem ser calculadas nos elementos do seguinte modo

$$M = D_f k = D_f B_f d \quad (2.59)$$

$$Q = D_c \dot{f} = D_c B_c d \quad (2.60)$$

3 - OS ELEMENTOS ESTUDADOS

3.1 - INTRODUÇÃO

Dentro das várias possibilidades para a análise não-linear de cascas com elementos finitos optou-se por aquela onde a geometria da casca pode ser discretizada com elementos planos, com três ou quatro nós e seis graus de liberdade por nó. Mais ainda, restringiu-se o estudo a elementos de três nós obtidos, neste caso, pela superposição de um elemento de placa e de um de membrana com a inclusão de uma rigidez fictícia para a rotação em torno da normal ao plano do elemento [16],[36]. A montagem do elemento de casca como indicado é mostrada na Figura 3.1.

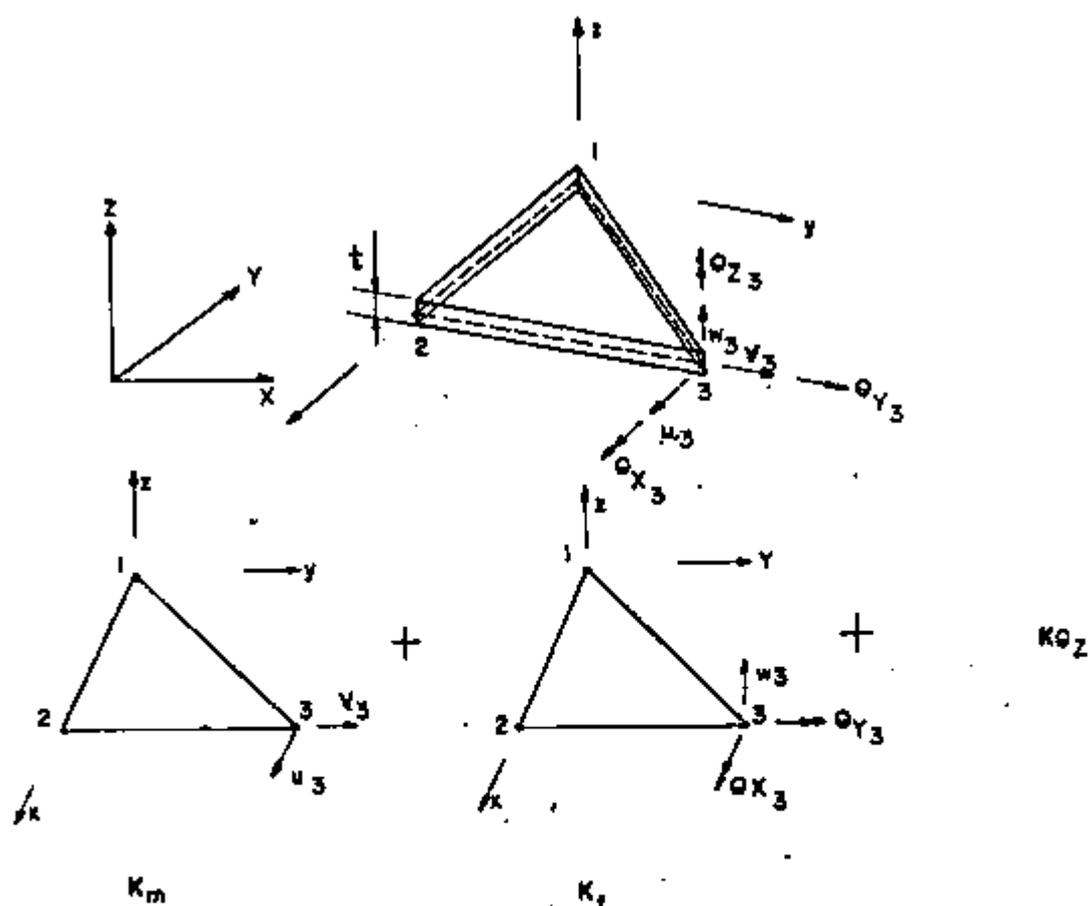


Figura 3.1 : Elemento de casca triangular facetado

Esta abordagem foi escolhida por ser a mais simples e com boas perspectivas de ser eficiente em problemas não-lineares porque facilita a modelagem de qualquer geometria e possibilita a formulação explícita, sem integração numérica, de matrizes de rigidez e de vetores de esforços internos que compensariam eventuais deficiências dos elementos com a utilização de malhas mais refinadas.

Espera-se que um elemento simples e com matriz de rigidez determinada de forma explícita seja competitivo em relação a outro mais refinado, que consuma mais tempo para a montagem de sua matriz de rigidez, na resolução de problemas não lineares mesmo que para o primeiro o modelo em elementos finitos tenha que ser mais refinado. Esta expectativa pode ser justificada pelo seguinte :

(a) Os elementos mais simples não limitam o perfil do usuário.

(b) O desenvolvimento de modelos refinados não é necessariamente um inconveniente pelas possibilidades atuais em termos de recursos para pré e pós processamento.

(c) Na análise de problemas com não linearidades físicas, como a plasticidade, é sempre necessário um refinamento do modelo nas regiões mais solicitadas.

A maior dificuldade no desenvolvimento do elemento de casca facetado triangular, conforme a Figura 3.1, é a escolha do elemento de placa (parcela de flexão do elemento) a ser utilizado. Para a parcela de membrana do elemento há elementos triangulares de três nós simples e bastante conhecidos como o chamado CST ("Constant Strain Triangle") [33] (ou o TRIM3 [2],[27]), que tem sua formulação completa feita de forma explícita, ou até mesmo o elemento da referência [35], que inclui os graus de liberdade de rotação em torno da normal ao plano do elemento ("drilling degrees of freedom") na sua formulação evitando que seja introduzida uma rigidez fictícia nestes graus de liberdade.

Deste modo passou-se a estudar elementos de placa dentro da teoria de Mindlin-Reissner pelas possibilidades de simplificação em relação à teoria clássica de Kirchhoff com a utilização de funções de interpolação dos elementos com continuidade C^0 na primeira e não C^1 como requerido pela segunda. Além disso, a teoria de Mindlin-Reissner é aplicável a problemas de placas finas e moderadamente espessas, ampliando o potencial de utilização dos elementos desenvolvidos a partir dela.

Foram estudados elementos com funções de interpolação lineares e bilineares, quadráticas e com um método não convencional com parâmetros concentrados, sendo todos na sua forma final triangulares com três nós e três graus de liberdade por nó, o deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y .

Procurou-se, na apresentação da formulação dos elementos, indicar as matrizes que relacionam os deslocamentos e as deformações com os deslocamentos nodais nos elementos, e a montagem das matrizes de rigidez, com os esquemas de integração das mesmas.

Na comparação entre os elementos serão discutidos pontos muito significativos tais como a integração das matrizes de rigidez (e, portanto, do vetor de esforços nodais equivalentes), o travamento por cisalhamento em problemas de placas finas e os modos de minimizá-los e a semelhança entre os elementos formulados com hipóteses aparentemente distintas.

3.2 - A MONTAGEM DAS MATRIZES DE RIGIDEZ

Uma das metas buscadas para os elementos estudados é que a montagem das matrizes de rigidez fosse sempre bastante simples e com integração explícita, evitando processos numéricos de integração que se tornam ineficientes em aplicações não lineares, como já foi dito anteriormente.

Assim, sendo as matrizes de rigidez K

$$K = \int_A B^t D B dA \quad (3.1)$$

elas serão obtidas de forma explícita sempre que as matrizes B que relacionam as deformações com os deslocamentos nodais forem matrizes de termos constantes, admitindo que o modelo seja refinado de tal forma que a matriz D de propriedade dos materiais possa ser considerada uma matriz de termos constantes também.

Quando as matrizes B são lineares há a possibilidade de se obter as matrizes de rigidez K de forma explícita com o esquema indicado em [21], admitindo que as matrizes D são matrizes de termos constantes. É feita a decomposição de B em elementos triangulares da seguinte maneira

$$B = L a \quad (3.2)$$

onde a é uma matriz de termos constantes e

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\text{com } l = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}, \text{ e } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Assim,

$$\mathbf{K} = \int_A \alpha^t \mathbf{L}^t \mathbf{D} \mathbf{L} \alpha \, dA \quad (3.5)$$

logo

$$\mathbf{K} = \alpha^t \int_A \mathbf{L}^t \mathbf{D} \mathbf{L} \, dA \alpha \quad (3.6)$$

e a integração indicada é feita analiticamente obtendo-se a matriz \mathbf{D}^* . Portanto a matriz de rigidez \mathbf{K} é determinada explicitamente pelo produto

$$\mathbf{K} = \alpha^t \mathbf{D}^* \alpha \quad (3.7)$$

Não havendo a possibilidade de se ter a obtenção da matriz de rigidez \mathbf{K} de forma explícita só resta a utilização da integração numérica, por meio, por exemplo, da quadratura de Gauss.

3.3 - Q TRAVAMENTO POR CISALHAMENTO

O maior problema para a aplicação dos elementos desenvolvidos dentro da teoria das placas de Mindlin-Reissner é o travamento que ocorre quando se tende para o limite das placas finas, isto é, quando a relação entre a espessura do elemento e a dimensão representativa do plano médio do mesmo tende a zero. Neste caso, a parcela da matriz de rigidez relativa ao cisalhamento transversal K_c tende a ser o termo predominante de K , encobrendo a parcela de flexão K_f . Foram tentadas vários métodos para minimizar ou eliminar este problema, e, eles serão descritos a seguir.

Para avaliar os mecanismos associados ao travamento por cisalhamento, em elementos de placa C^0 será apresentado inicialmente um tratamento de um elemento finito de viga com funções de interpolação também C^0 . Os aspectos mais importantes da formulação serão aplicados de forma análoga aos elementos de placa.

Considere um elemento de viga simplificado com dois nós e quatro graus de liberdade (uma translação e uma rotação por nó) dado na Figura 3.2 com seção retangular Ω de material elástico e linear (os efeitos axiais e torcionais bem como flexão e cisalhamento fora do plano são desprezados).

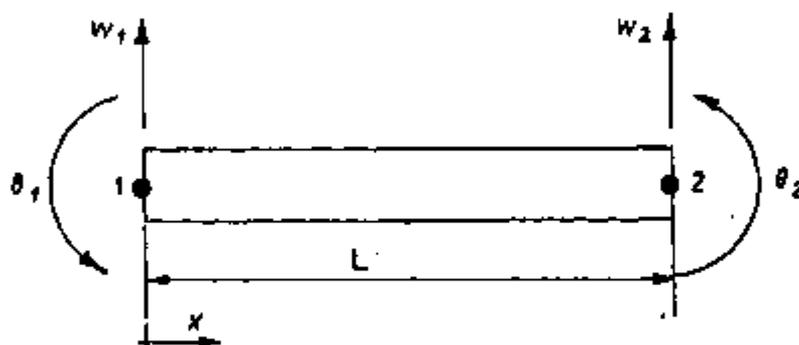


Figura 3.2 : Elemento de viga

Assumindo funções de interpolação lineares para as translações e rotações se chegará às seguintes expressões para as matrizes de rigidez

(a) Matriz de rigidez à flexão

$$K_f = \frac{E I}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

(b) matriz de rigidez ao cisalhamento integrada exatamente (dois pontos de integração)

$$K_{e2} = \frac{h G t}{12 L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

(c) matriz de rigidez ao cisalhamento com integração reduzida (um ponto de integração)

$$K_{e1} = \frac{h G t}{12 L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 3L^2 & -6L & 3L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sim.} & & & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde E, G, h foram definidos anteriormente e t é a altura do seção transversal e $I = t^3/12$ (admitindo largura unitária).

A matriz de rigidez exata de um elemento de viga tipo Timoshenko, ou seja, considerando os efeitos de cisalhamento ao longo da espessura para os graus de liberdade indicados é dada por [28],[30].

$$K_{exata} = \frac{E I}{L (1+\phi)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & (4+\phi) & -\frac{6}{L} & (2-\phi) \\ & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \text{sim.} & & & (4+\phi) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde o fator ϕ para uma viga de seção transversal Ω em estado plano de deformação é

$$\phi = \frac{12 E I}{h G \Omega L^2 (1-\mu^2)} \quad (3.12)$$

Admitindo que $\Omega = 1 \times t$ (largura unitária) e simplificando, resulta

$$\phi = \frac{2 (1+\mu)}{(1-\mu^2) h} \frac{t^3}{L^2} \quad (3.13)$$

Utilizando as matrizes K_r , K_{cz} e K_{c1} pode-se montar as seguintes matrizes

$$K^* = K_r + K_{cz} = \frac{E I}{L \phi} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & (4+\phi) & -\frac{6}{L} & (2-\phi) \\ & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \text{sim.} & & & (4+\phi) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$K^{**} = K_f + K_{c1} = \frac{E I}{L \phi} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & (3+\phi) & \frac{-6}{L} & (3-\phi) \\ \text{sim.} & & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ & & & (3+\phi) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$K^{***} = K_f +$$

$$\frac{\phi}{1+\phi} K_{c2} =$$

$$\frac{E I}{L (1+\phi)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & (5+\phi) & \frac{-6}{L} & (1-\phi) \\ \text{sim.} & & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ & & & (5+\phi) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$K^{****} = K_f +$$

$$\frac{\phi}{1+\phi} K_{c1} =$$

$$\frac{E I}{L (1+\phi)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L} \\ & (4+\phi) & -\frac{6}{L} & (2-\phi) \\ & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} \\ \text{sim.} & & & (4+\phi) \end{bmatrix}$$

(3.17)

Considerando a situação onde (t/L) é um valor pequeno o fator ϕ tende a zero e as matrizes K^* e K^{**} apresentam travamento.

Para as matrizes restantes, K^{***} e K^{****} , se (t/L) for muito pequeno o fator $(1+\phi)$ tende a 1, não ocorrendo o travamento e se (t/L) for grande o fator $\phi/(1+\phi)$ tende a 1 e

K^{***} tende a $K_f + K_{c2}$

K^{****} tende a $K_f + K_{c1}$

Comparando estas matrizes com Karata nota-se que K^{****} é exatamente igual a ela e K^{***} levemente diferente.

A diferença que ocorre na matriz K^{***} provoca um outro tipo de travamento que pode ser caracterizado por um acoplamento entre flexão e cisalhamento de tal forma que na viga sob estado de curvatura constante aparecem momentos que dependem da rigidez ao cisalhamento. A integração reduzida da parcela de cisalhamento provoca o desacoplamento e o desaparecimento deste tipo de travamento no elemento de viga.

Assim, uma tentativa para melhorar o desempenho dos elementos de placa foi a utilização da integração reduzida e seletiva [20] onde a matriz de rigidez ao cisalhamento é integrada com ordem inferior à necessária para sua obtenção de forma exata. Há dois inconvenientes neste esquema, isto é, são introduzidos modos cinemáticos de deformação e a aplicação do elemento fica restrita a problemas de placas finas, mesmo com o desenvolvimento feito com a teoria de Mindlin-Reissner.

A matriz de rigidez K fica, então,

$$K = K_f + K_{cr} \quad (3.18)$$

onde K_f é a matriz de rigidez de flexão e K_{cr} é a matriz de rigidez de cisalhamento com integração reduzida.

Deve-se mencionar que, para elementos de placa triangulares de três nós e nove graus de liberdade, se a matriz B_c tiver termos lineares, então, a matriz de rigidez K_c terá termos quadráticos. Assim, com integração numérica de Gauss, por exemplo, serão necessários três pontos de integração para que ela seja exata e um ponto na integração reduzida, equivalendo a determinação explícita da mesma.

A aplicação da integração reduzida e seletiva traz alguma vantagem em problemas de placas finas somente se houver a decomposição dos modos de flexão e cisalhamento nos elementos com funções de interpolação C^0 , do mesmo modo que para o elemento de viga, e isto foi justificado em [13]. A aplicação a problemas com não linearidades físicas e geométricas é justificada em [22].

Para elementos triangulares muito simples, como os elementos lineares por exemplo, não ocorre a decomposição entre os modos de flexão e de cisalhamento mencionada acima e, portanto, a integração reduzida e seletiva não é suficientemente eficiente para eliminar o travamento por cisalhamento como se verá mais adiante.

Do mesmo modo que para o elemento de viga os fatores de ajuste foram, também, aplicados a elementos de placa C^0 para melhoria dos seus desempenhos. As primeiras tentativas foram as indicadas em [10] e em vários outros trabalhos houve sua utilização [8],[9],[12],[14].

No caso dos elementos de placa o principal inconveniente associado aos fatores de ajuste é que sua definição é dependente do problema. Não foi possível obter uma formulação onde os fatores fossem automaticamente gerados pelo método numérico.

Se propõe, então, que para os elementos de placa os fatores de ajuste sejam definidos de modo semelhante ao utilizado para o elemento de viga adequando a relação entre as dimensões mais importantes, isto é, t/L no elemento de viga e t^2/A no de placa (A é a área do elemento). Para não restringir a aplicação a problemas de placas finas os fatores devem estar na forma $c/(1+c)$ onde c é dado por

$$c = \frac{(1+\mu)}{h(1-\mu^2)} \frac{t^2}{A} \quad (3.19)$$

O valor de c definido em (3.19) acima vem da seguinte analogia

(a) para o elemento de viga

$$\phi = \frac{12 E I}{h(1-\mu^2) G \Omega L^2} = \frac{2(1+\mu)}{h(1-\mu^2)} \frac{t^2}{L^2} \quad (3.20)$$

(b) para o elemento de placa, assumindo que a sua área tenha a ordem de grandeza de $L^2/2$ resulta

$$c = \frac{(1+\mu)}{h(1-\mu^2)} \frac{t^2}{A} \quad (3.21)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K} pode ser montada, então, das seguintes maneiras :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_r + c/(1+c) \mathbf{K}_c \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_r + c/(1+c) \mathbf{K}_{cr} \quad (3.23)$$

Deve-se notar que a integração reduzida de \mathbf{K}_c restringe a utilização dos elementos a problemas de placas finas.

3.4 - OS ELEMENTOS LINEARES

A teoria de Mindlin-Reissner requer continuidade C^0 para as funções de interpolação do campo de deslocamentos, como já foi dito anteriormente. Assim, o elemento de formulação mais simples que pode ser desenvolvido é triangular com três nós e nove graus de liberdade (conforme a Figura 3.3) com um esquema de interpolação linear :

$$w = \sum_{i=1}^3 L_i w_i ; \theta_x = \sum_{i=1}^3 L_i \theta_{xi} ; \theta_y = \sum_{i=1}^3 L_i \theta_{yi} \quad (3.24)$$

onde

$$L_1 = \frac{1}{x_2 y_3} [x_2 y_3 + (-y_3) x + (x_3 - x_2) y] \quad (3.25)$$

$$L_2 = \frac{1}{x_2 y_3} [y_3 x + (-x_3) y] \quad (3.26)$$

$$L_3 = \frac{1}{x_2 y_3} [x_2 y] \quad (3.27)$$

são as coordenadas naturais do triângulo.

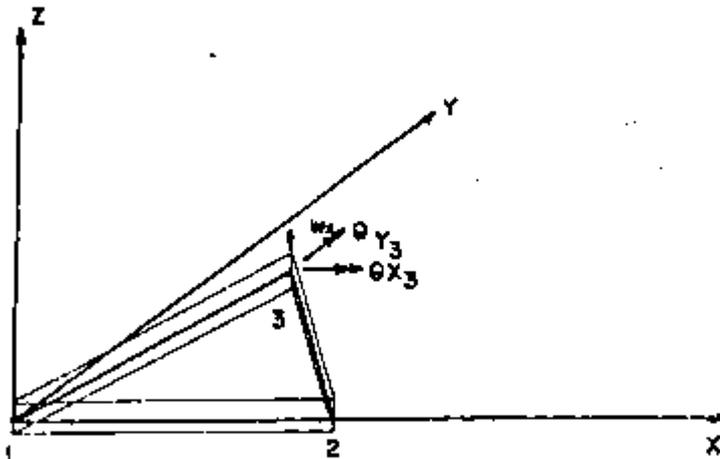


Figura 3.3 : Elemento triangular de placa - 3 nós e 9 graus de liberdade

Das equações (2.57) e (2.58) as matrizes B_f e B_c são :

$$B_f = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & -y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & -y_3 & -(x_3 - x_2) & 0 & y_3 & x_3 & 0 & 0 & -x_2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$B_c = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & L_1 x_2 y_3 & y_3 & 0 & L_2 x_2 y_3 & 0 & 0 & L_3 x_2 y_3 \\ (x_3 - x_2) & -L_1 x_2 y_3 & 0 & -x_3 & -L_2 x_2 y_3 & 0 & x_2 & -L_3 x_2 y_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e, a partir delas, são montadas, conforme as eq. (2.59) e (2.60), as matrizes de rigidez K_f e K_c .

Deve-se notar que a matriz B_r é uma matriz de termos constantes e que, portanto, K_r é uma matriz determinada de forma explícita sem necessidade de integração numérica.

A matriz B_c é uma matriz de termos lineares em x e y e a matriz K_c terá integrais com termos quadráticos em x e y , portanto, Para a integração de K_c há as seguintes possibilidades :

(a) Integração exata numérica ou, explicitamente, com o artifício indicado em [21] e descrito no item 3.2

(b) Integração reduzida [20] [25], usando somente um ponto de integração numérica (em geral, o centróide do elemento). Este elemento tem as deformações por cisalhamento constantes no elemento e a matriz B_{cr} é

$B_{cr} =$

$$\frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & x_2 y_3 / 3 & y_3 & 0 & x_2 y_3 / 3 & 0 & 0 & x_2 y_3 / 3 \\ (x_3 - x_2) & -x_2 y_3 / 3 & 0 & -x_3 & -x_2 y_3 / 3 & 0 & x_2 & -x_2 y_3 / 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e a matriz de rigidez de cisalhamento é

$$K_{cr} = \xi x_2 y_3 (B_{cr})^T D_c B_{cr} \quad (3.31)$$

(c) Utilizando, ainda, o conceito de integração reduzida pode se formular um elemento introduzindo-se as seguintes hipóteses de cálculo [6] :

i. O elemento deve ser sempre um triângulo retângulo com os catetos paralelos aos eixos x e y .

ii. São utilizados os pontos médios dos catetos para a determinação de B_c e, assim,

$$B_{c01} = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & \xi x_2 y_3 & y_3 & 0 & \xi x_2 y_3 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -\xi x_2 y_3 & 0 & 0 & -\xi x_2 y_3 & 0 & x_2 & -\xi x_2 y_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

e a matriz de rigidez de cisalhamento é

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} x_2 y_3 (B_{\alpha\beta})^t D_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \quad (3.33)$$

Com as respectivas matrizes B_1 e B_2 e as equações (2.59) e (2.60) são calculadas as tensões.

Como já foi citado a utilização da integração reduzida da matriz de rigidez de cisalhamento limita a aplicação do elemento a problemas de placas finas, somente.

Pode-se ter outros elementos utilizando os fatores de ajuste nas matrizes de rigidez de cisalhamento dadas acima.

3.5 - O ELEMENTO DE HUGHES

Este elemento tem sua formulação baseada na teoria das placas de Mindlin-Reissner conforme as referências [17],[24].

Inicialmente foram desenvolvidos elementos quadrangulares com quatro nós com linhas distintas de formulação de acordo com [19] e [18]. Foi utilizada a abordagem de [18] para formular o elemento triangular [14].

Baseado em [18],[19] e [7] foi feito o desenvolvimento de três elementos triangulares, apresentado em [23]. Este trabalho de [23] foi feito em paralelo com [14], de forma independente, apontando como conclusão principal que os três elementos formulados são praticamente idênticos, com as mesmas matrizes de rigidez.

Um aspecto muito importante do desenvolvimento de todos estes elementos mencionados é a interpolação mista dos componentes do tensor das deformações: as curvaturas são calculadas da forma usual no método dos elementos finitos a partir das interpolações dos deslocamentos e as deformações por cisalhamento são interpoladas de forma diferente, como se verá adiante.

Como a opção neste trabalho é por elementos triangulares será apresentada somente a formulação formalmente mais simples de todos os três descritos em [23]. A abordagem seguida é a de [19], descrita abaixo.

As funções de interpolação são inicialmente quadráticas para o deslocamento transversal w e lineares para as rotações θ_x e θ_y

$$w = \sum_{i=1}^6 N_i w_i ; \theta_x = \sum_{i=1}^3 L_i \theta_{xi} ; \theta_y = \sum_{i=1}^3 L_i \theta_{yi} \quad (3.34)$$

onde

$$N_1 = 2 L_1 (L_1 - L_2 - L_3) \quad (3.35)$$

$$N_2 = L_2 (2 L_2 - 1) \quad (3.36)$$

$$N_3 = L_3 (2 L_3 - 1) \quad (3.37)$$

$$N_4 = 4 L_2 L_3 \quad (3.38)$$

$$N_5 = 4 L_3 L_1 \quad (3.39)$$

$$N_6 = 4 L_2 L_1 \quad (3.40)$$

L_i , $i=1,2,3$ são as coordenadas naturais do triângulo (ver as eq.(3.25), (3.26) e (3.27)), w_i , $i=1$ a 6 são os deslocamentos transversais dos vértices e do meio dos lados do triângulo (sendo que o nó 4 fica no lado 23, o nó 5 no lado 31 e o nó 6 no lado 12) e θ_{xi} , θ_{yi} , $i=1,2,3$ são as rotações dos vértices do triângulo. Nesta configuração o elemento tem 12 graus de liberdade e, para se chegar a 9 graus de liberdade, é feita uma condensação dos deslocamentos do meio dos lados w_i , $i=4,5,6$ considerando que a deformação por cisalhamento ao longo dos lados é constante gerando a seguinte equação diferencial :

$$(w_{,s})_{,s} = (w_{,s} - \beta_s)_{,s} = 0 \quad (3.41)$$

onde s é a coordenada da direção do lado e β_s é a rotação, de acordo com a Figura 3.4.

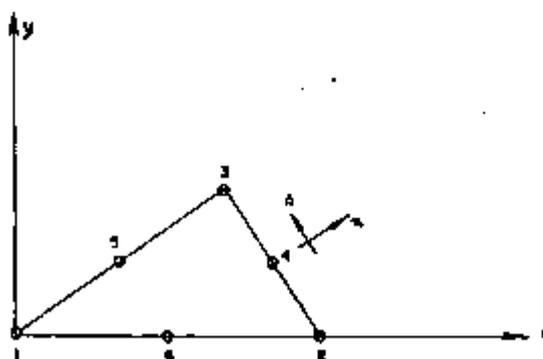


Figura 3.4 : Elemento triangular de placa - nós no meio dos lados e sistema local de coordenadas n, s

Os vínculos impostos em (3.41) resultam em funções para os deslocamentos w_i , $i=4,5,6$ do meio dos lados em termos dos outros graus de liberdade que substituídas em (3.34) levam a :

$$w = \sum_{i=1}^3 L_i w_i + N_{xi} \theta_{xi} + N_{yi} \theta_{yi} \quad (3.42)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^3 L_i \theta_{xi} \quad (3.43)$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^3 L_i \theta_{yi} \quad (3.44)$$

onde

$$N_{x1} = - \frac{y_3}{2} y_3 L_1 L_3 \quad (3.45)$$

$$N_{x2} = \frac{y_3}{2} L_2 L_3 \quad (3.46)$$

$$N_{x3} = - \frac{y_3}{2} L_3 (L_1 + L_2) \quad (3.47)$$

$$N_{y1} = - \frac{L_1}{2} (x_2 L_2 + x_3 L_3) \quad (3.48)$$

$$N_{y2} = \frac{L_2}{2} [x_2 L_1 - (x_3 - x_2) L_3] \quad (3.49)$$

$$N_{y3} = \frac{L_3}{2} [(x_3 - x_2) L_2 + x_3 L_1] \quad (3.50)$$

e x_2 , x_3 e y_3 são as coordenadas do triângulo no sistema de coordenadas cartesiano local como indicado na Figura 3.5.

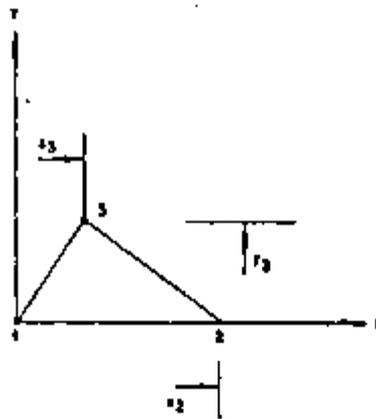


Figura 3.5 : Elemento triangular de placa - coordenadas no sistema local

Com as funções de interpolação das eq. (3.42) a (3.50) as matrizes que relacionam deformações com deslocamentos são, utilizando as relações (2.52) a (2.53) :

$$B_f = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & -y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & -y_3 & -(x_3 - x_2) & 0 & y_3 & x_3 & 0 & 0 & -x_2 \end{bmatrix}$$

(3.51)

$$B_c = \frac{1}{x_2 y_2} \begin{bmatrix} 0 L_1 + & - \psi_{x_2 y_2} L_1 + & 0 L_1 + & - \psi_{x_2 y_2} L_1 + & 0 L_1 + \\ - y_2 & 0 L_2 + & - \psi_{x_2 y_2} L_2 + & y_2 & 0 L_2 + & - \psi_{x_2 y_2} L_2 + & 0 & 0 & 0 L_2 + \\ \psi_{y_2}^* L_2 & - \psi_{x_2 y_2} L_2 & \psi_{y_2}^* L_2 & \psi(x_2 - x_1) \psi_{y_2} L_2 & & & & & - \psi_{x_2 y_2} L_2 \\ \psi_{x_2 y_2} L_1 + & 0 L_1 & 0 L_1 + & x_1 x_2 L_1 + & \psi_{x_2 y_2} L_1 + & - x_2 x_1 L_1 + & & & \\ (x_2 - x_1) & 0 L_2 + & \psi(x_2 - x_1) x_2 L_2 & - x_1 & \psi_{x_2 y_2} L_2 + & 0 L_2 + & x_1 & \psi_{x_2 y_2} L_2 + & - \psi(x_2 - x_1) x_2 L_2 + \\ - \psi(x_2 - x_1) \psi_{y_2} L_2 & \psi(x_2 - x_1) x_1 L_2 & \psi_{x_2 y_2} L_2 & - \psi(x_2 - x_1) x_1 L_2 & \psi_{x_2 y_2} L_2 & & & & 0 L_2 \end{bmatrix}$$

(3.52)

Com as eqs. (2.52), (2.53), (3.51) e (3.52) monta-se a matriz de rigidez do elemento. A matriz B_r definida na eq. (3.51) é uma matriz de termos constantes enquanto a matriz B_c dada na eq. (3.52) tem termos lineares em x e y . Deste modo, a integração da matriz de rigidez K pode seguir os dois caminhos indicados anteriormente:

(a) Integração exata, onde a integração da parcela K_r é feita de forma exata e explícita e a da parcela K_c de forma exata numericamente ou utilizando o artifício descrito em [21].

(b) Integração seletiva e reduzida, onde a integração da parcela K_r é feita de forma exata e explícita e a da parcela K_c é feita de forma reduzida com um ponto de integração (em geral, o centróide do elemento). Este elemento tem sua aplicação restringida a problemas de placas finas [20] e a forma de integração da matriz de rigidez equivale a assumir que a deformação por cisalhamento é constante nele.

No caso da integração exata, com o artifício de [21] pode-se chegar também a uma matriz de rigidez explícita como mostrado abaixo. Escrevendo

$$B_c = L \alpha$$

(3.53)

onde

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

e

$$a = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & -\xi x_2 y_3 & y_3 & 0 & -\xi x_2 y_3 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & -\xi x_2 y_3 & y_3 & 0 & -\xi x_2 y_3 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & \xi y_3^2 & -\xi x_2 y_3 & y_3 & -\xi y_3^2 & \xi(x_3 - x_2)y_3 & 0 & 0 & -\xi x_2 y_3 \\ (x_3 - x_2) & \xi x_2 y_3 & 0 & -x_3 & 0 & \xi x_3 x_2 & x_3 & \xi x_2 y_3 & -\xi x_3 x_2 \\ (x_3 - x_2) & 0 & \xi(x_3 - x_2)x_2 & -x_3 & \xi x_2 y_3 & 0 & x_3 & \xi x_2 y_3 & -\xi(x_3 - x_2)x_2 \\ (x_3 - x_2) & -\xi(x_3 - x_2)y_3 & \xi(x_3 - x_2)x_3 & -x_3 & \xi x_2 y_3 & -\xi(x_3 - x_2)x_3 & x_3 & \xi x_2 y_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

então

$$K_c = \int_A a^t L^t D_c L a \, dA \quad (3.56)$$

e como é uma matriz de termos constantes

$$K_c = a^t \int_A L^t D_c L \, dA \, a \quad (3.57)$$

Chamando

$$D_c = \int_A L^t D_c L dA \quad (3.58)$$

e fazendo a integração chega-se a :

$$D_c = \frac{EhtA}{24(1+\mu)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

e, portanto

$$K_c = a^t D_c a \quad (3.60)$$

é obtida de forma exata e explícita sem a necessidade de se fazer a integração numérica dentro do programa.

Com as matrizes B_f e B_c , D_f e D_c são calculados as tensões generalizadas, isto é, os momentos e esforços cortantes.

Nos dois casos acima indicados podem ser aplicados os fatores de ajuste para a obtenção de outros dois tipos de elementos.

3.6 - O ELEMENTO DRT

A abordagem utilizada neste elemento é semelhante à apresentada no item 3.5 com a interpolação mista das componentes do tensor das deformações. Os trabalhos [18] e [19] apresentam formulações do mesmo tipo.

O elemento DRT foi desenvolvido em [5] e [29], baseado na teoria das placas de Mindlin-Reissner, para quatro nós. Ele é mostrado na Figura 3.6.

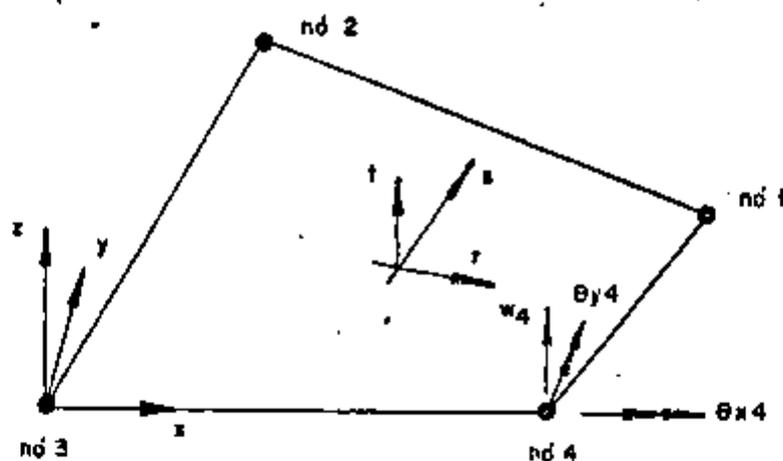


Figura 3.6 : Elemento DRT

As funções de interpolação são :

$$w = \sum_{i=1}^4 h_i w_i ; \theta_x = \sum_{i=1}^4 h_i \theta_{xi} ; \theta_y = \sum_{i=1}^4 h_i \theta_{yi} \quad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned}
 h_1 &= k (1 + r) (1 + s) \\
 h_2 &= k (1 - r) (1 + s) \\
 h_3 &= k (1 - r) (1 - s) \\
 h_4 &= k (1 + r) (1 - s)
 \end{aligned}
 \tag{3.62}$$

onde w_i , θ_{xi} e θ_{yi} , $i=1,4$ são os deslocamentos nodais, isto é,

$$dt = \{ w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} w_2 \theta_{x2} \theta_{y2} w_3 \theta_{x3} \theta_{y3} w_4 \theta_{x4} \theta_{y4} \}
 \tag{3.63}$$

e r e s são as coordenadas locais do elemento conforme a Figura 3.6.

Utilizando as relações (2.55) e (2.56) pode-se determinar as matrizes B_f e B_c do seguinte modo :

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_{1,x} & 0 & 0 & -h_{2,x} & 0 & 0 & -h_{3,x} & 0 & 0 & -h_{4,x} \\ 0 & h_{1,y} & 0 & 0 & h_{2,y} & 0 & 0 & h_{3,y} & 0 & 0 & h_{4,y} & 0 \\ 0 & h_{1,x} & -h_{1,y} & 0 & h_{2,x} & -h_{2,y} & 0 & h_{3,x} & -h_{3,y} & 0 & h_{4,x} & -h_{4,y} \end{bmatrix}
 \tag{3.64}$$

As funções de interpolação h_i , $i=1,4$ são dadas em termos das coordenadas locais r e s . Para a determinação de B_f em termos das coordenadas x e y deve ser empregado o procedimento descrito em [34] utilizando o operador Jacobiano J .

Para a montagem de B_c será utilizado um procedimento diferente do anterior para B_f . As deformações γ_{xz} e γ_{yz} serão determinadas a partir das deformações γ'_{xz} e γ'_{yz} do meio dos lados do elemento.

Para exemplificar tome-se um elemento de geometria 2X2 da Figura 3.7.

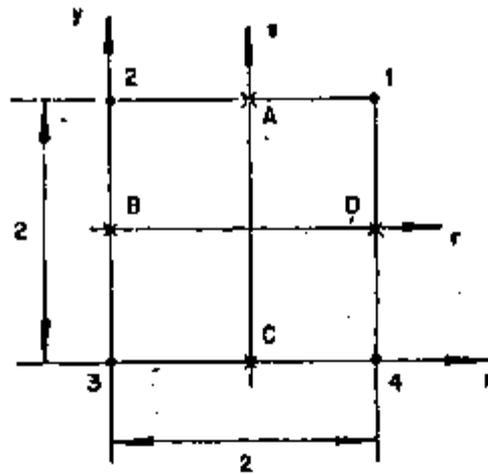


Figura 3.7 : Elemento DRT - Geometria 2x2

Neste elemento

$$\begin{aligned} f_{xz} = f_{rz} &= \frac{1}{2} (1 + \sigma) f_{rzA} + \frac{1}{2} (1 - \sigma) f_{rzC} \\ f_{yz} = f_{sz} &= \frac{1}{2} (1 + \tau) f_{szD} + \frac{1}{2} (1 - \tau) f_{szB} \end{aligned} \quad (3.65)$$

com

$$\begin{aligned} f_{rzA} &= \frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{\theta_{y1} + \theta_{y2}}{2} \\ f_{rzC} &= \frac{w_4 - w_3}{2} + \frac{\theta_{y4} + \theta_{y3}}{2} \\ f_{szD} &= \frac{w_1 - w_4}{2} - \frac{\theta_{x1} + \theta_{x4}}{2} \\ f_{szB} &= \frac{w_2 - w_3}{2} - \frac{\theta_{x2} + \theta_{x5}}{2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

No caso geral da Figura 3.8

$$\begin{aligned} v_{rs} &= v_{rx} \cos\beta - v_{sx} \cos\alpha \\ v_{yz} &= v_{rx} \sin\beta + v_{sx} \sin\alpha \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde α é o ângulo entre o eixo r e o eixo x e β é o ângulo entre o eixo s e o eixo x .

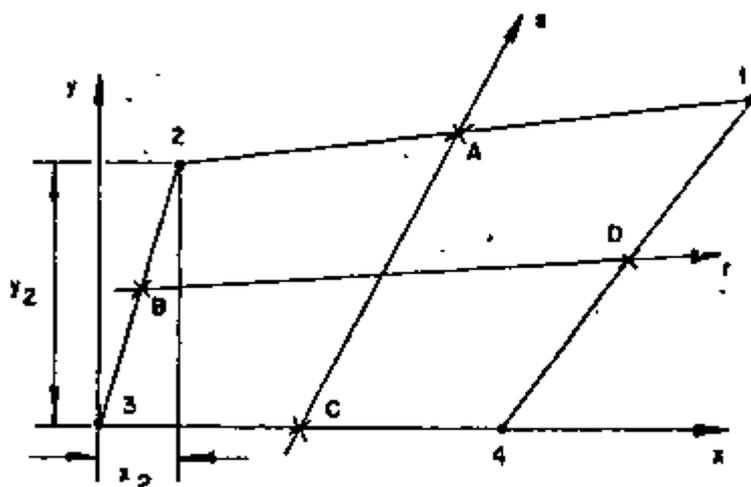


Figura 3.8 : Elemento DRT - Caso geral

Assim

$$v_{rs} = \frac{\sqrt{(C_x + r B_x)^2 + (C_y + r B_y)^2}}{8 \det J}$$

$$\left\{ (1+s) \left[\frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{4} (\theta_{y1} + \theta_{y2}) - \frac{y_1 - y_2}{4} (\theta_{x1} + \theta_{x2}) \right] \right.$$

$$\left. + (1-s) \left[\frac{w_4 - w_3}{2} + \frac{x_4 - x_3}{4} (\theta_{y4} + \theta_{y3}) - \frac{y_4 - y_3}{4} (\theta_{x4} + \theta_{x3}) \right] \right\}$$

(3.68)

$$t_{sz} = \frac{\sqrt{(Ax + \varepsilon Bx)^2 + (Ay + \varepsilon By)^2}}{8 \det J}$$

$$\begin{aligned} & \{ (1+r) \left[\frac{w_1 - w_4}{2} + \frac{x_1 - x_4}{4} (\theta_{y1} + \theta_{y4}) - \frac{y_1 - y_4}{4} (\theta_{x1} + \theta_{x4}) \right] \right. \\ & \left. + (1+s) \left[\frac{w_2 - w_3}{2} + \frac{x_2 - x_3}{4} (\theta_{y2} + \theta_{y3}) - \frac{y_2 - y_3}{4} (\theta_{x2} + \theta_{x3}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde

$$\begin{aligned} Ax &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ Bx &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ Cx &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ Ay &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\ By &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \\ Cy &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Com as equações (3.67), (3.68) e (3.69)

$$f = \begin{bmatrix} t_{xz} \\ t_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\beta & -\text{sena} \\ -\text{cos}\beta & \text{cosa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{rz} \\ t_{sz} \end{bmatrix} = C B_c^* d = B_c d \quad (3.71)$$

onde

$$C = \begin{bmatrix} C_r \text{sen}\beta & -C_s \text{sena} \\ -C_r \text{cos}\beta & C_s \text{cosa} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

e

$$C_r = \frac{\sqrt{(C_x + r B_x)^2 + (C_y + r B_y)^2}}{\delta \det J} \quad (3.73)$$

$$C_s = \frac{\sqrt{(A_x + s B_x)^2 + (A_y + s B_y)^2}}{\delta \det J}$$

$$B_s = \begin{bmatrix} \eta(1+s) & -\eta(1+s) & \eta(1+s) & -\eta(1+s) & \eta(1+s) & -\eta(1+s) & -\eta(1-s) & \eta(1-s) & \eta(1-s) & -\eta(1-s) & \eta(1-s) \\ * (y_1 - y_2) & * (x_1 - x_2) & * (y_1 - y_2) & * (x_1 - x_2) & * (y_1 - y_2) & * (x_1 - x_2) & * (y_1 - y_2) & * (x_1 - x_2) & * (y_1 - y_2) & * (x_1 - x_2) & * (y_1 - y_2) & * (x_1 - x_2) \\ \eta(1+r) & -\eta(1+r) & \eta(1+r) & -\eta(1+r) & \eta(1+r) & -\eta(1+r) & -\eta(1-r) & \eta(1-r) & \eta(1-r) & -\eta(1-r) & \eta(1-r) \\ * (y_2 - y_3) & * (x_1 - x_2) & * (y_2 - y_3) & * (x_2 - x_3) & * (y_2 - y_3) & * (x_2 - x_3) & * (y_2 - y_3) & * (x_2 - x_3) & * (y_2 - y_3) & * (x_2 - x_3) & * (y_2 - y_3) & * (x_2 - x_3) \end{bmatrix}$$

(3.74)

Determinadas as matrizes B_r na eq. (3.64) e B_s na eq. (3.74) a determinação de K se faz com as integrações indicadas em (2.57) e (2.58) :

$$K = K_r + K_s = \int_A B_r^t D_r B_r dA + \int_A B_s^t D_s B_s dA =$$

$$K = \int_A B_r^t D_r B_r \det J dr ds + \int_A B_s^t D_s B_s \det J dr ds$$

(3.75)

Utilizando a integração numérica de Gauss e chamando

$$\begin{aligned} F_{fij} &= B_{fij}^t D_f B_{fij} \det J_{ij} \\ F_{cij} &= B_{cij}^t D_c B_{cij} \det J_{ij} \end{aligned} \quad (3.76)$$

então

$$K = \sum_{i,j} a_{ij} (F_{fij} + F_{cij}) \quad (3.77)$$

onde i e j definem os pontos de integração e a_{ij} são os pesos.

O cálculo das tensões é feito a partir das matrizes B_f e B_c como indicado em (2.59) e (2.60).

O elemento triangular de três nós e nove graus de liberdade é obtido com a degeneração do elemento quadrangular fazendo coincidir os nós 3 e 4.

Pode-se aplicar também a este elemento, no caso o triangular, a integração reduzida e os fatores de ajuste indicados anteriormente para se chegar a outros elementos.

3.7 - O ELEMENTO TRUMP

3.7.1 - INTRODUÇÃO

O elemento TRUMP foi desenvolvido com base na formulação natural [2],[27] de forma completa para aplicações em cascas, incluindo não-linearidades físicas e geométricas [3] a [4].

O TRUMP tem sua formulação desenvolvida a partir da matriz de rigidez natural do elemento triangular com três nós para estado plano de tensão (TRIM3). Deste modo, para maior clareza da apresentação é mantida a notação de [3], sendo mostrada a dedução da matriz de rigidez natural do TRIM3 [27].

3.7.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ NATURAL DO TRIM3

O TRIM3 é mostrado na Figura 3.9.

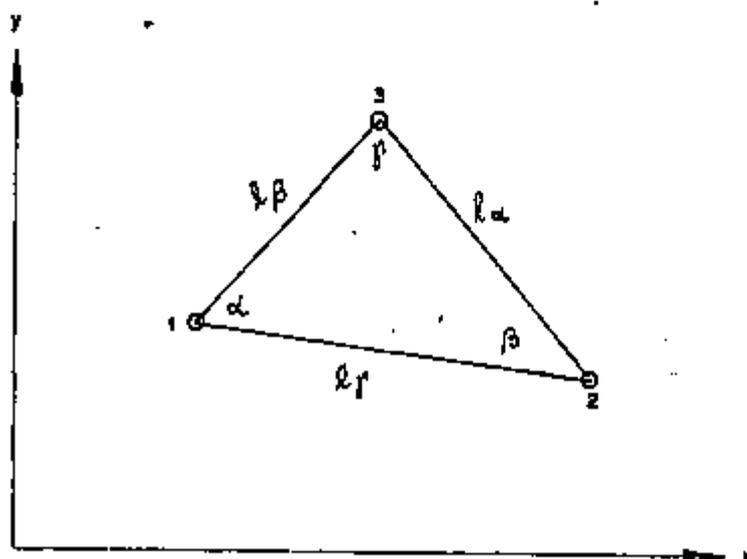


Figura 3.9 : Elemento de membrana TRIM-3

O vetor de deformações naturais totais é dado por :

$$\epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{t\alpha} \\ \epsilon_{t\beta} \\ \epsilon_{t\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

onde $\epsilon_{t\alpha}$, $\epsilon_{t\beta}$ e $\epsilon_{t\gamma}$ são as deformações dos lados 23, 31 e 12, respectivamente, e α , β e γ são os ângulos indicados na Figura 3.9.

Chamando ϵ o vetor de deformações dado por :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \sqrt{2} \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

a relação entre ϵ_t e ϵ é :

$$\epsilon_t = C^t \epsilon \quad (3.80)$$

onde

$$C^t = \begin{bmatrix} (c_{23x})^2 & (c_{23y})^2 & \sqrt{2} c_{23x} c_{23y} \\ (c_{31x})^2 & (c_{31y})^2 & \sqrt{2} c_{31x} c_{31y} \\ (c_{12x})^2 & (c_{12y})^2 & \sqrt{2} c_{12x} c_{12y} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

e $c_{23x} = \cos(23,0x)$, etc

O vetor de tensões naturais componentes σ_c é :

$$\sigma_c = \begin{bmatrix} \sigma_{c\alpha} \\ \sigma_{c\beta} \\ \sigma_{c\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

e, chamando σ o vetor de tensões dado por :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sqrt{2} \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

a relação entre σ_c e σ é :

$$\sigma = C \sigma_c \quad (3.84)$$

que pode ser deduzida a partir da eq. (3.80) e da igualdade entre as energias de deformação específicas

$$\frac{1}{2} \epsilon^t \sigma = \frac{1}{2} \epsilon_c^t \sigma_c \quad (3.85)$$

A relação entre σ e ϵ para estado plano de tensão é

$$\sigma = D \epsilon \quad (3.86)$$

onde

$$D = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{bmatrix} = \frac{E\mu}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{E}{(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

ou seja

$$D = a e^* e^* + b I_3 \quad (3.88)$$

onde I_3 é a matriz identidade 3*3 e

$$a = \frac{E\mu}{(1-\mu^2)} ; b = \frac{E}{1+\mu} ; e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Chamando

$$A = C^t C = \begin{bmatrix} 1 & \cos^2 \beta & \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \beta & 1 & \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

e a relação entre σ_c e ϵ_t de D_n , então

$$\sigma_c = D_n \epsilon_t \quad (3.91)$$

onde

$$D_n = a A^{-1} E_3 A^{-1} + b A^{-1} = \frac{E}{1+\mu} \left[A^{-1} + \frac{\mu}{1-\mu} A^{-1} E_3 A^{-1} \right] \quad (3.92)$$

e

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

A dedução da matriz D_n é indicada abaixo

$$\sigma = D \epsilon$$

$$C \sigma_c = D C^{-t} \epsilon_c$$

$$\sigma_c = C^{-1} D C^{-t} \epsilon_c$$

$$D_n = C^{-1} D C^{-t} = C^{-1} (a e^* e^{*t} + b I) C^{-t}$$

$$D_n = a C^{-1} e^* e^{*t} C^{-t} + b C^{-1} I C^{-t}$$

$$D_n = a A^{-1} A C^{-1} e^* e^{*t} C^{-t} A A^{-1} + b A^{-1}$$

$$D_n = a A^{-1} C^t \overbrace{C C^{-1}}^I e^* e^{*t} \overbrace{C^{-t} C^t}^I C A^{-1} + b A^{-1}$$

como

$$C^t e^* = \begin{bmatrix} (c_{23x})^2 + (c_{23y})^2 \\ (c_{31x})^2 + (c_{31y})^2 \\ (c_{12x})^2 + (c_{12y})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e$$

então,

$$D_n = a A^{-1} e e^t A^{-1} + b A^{-1} = a A^{-1} E_3 A^{-1} + b A^{-1}$$

que é a expressão procurada.

A energia de deformação específica é

$$\frac{1}{2} \epsilon^t D_n \epsilon^t \quad (3.94)$$

e, definindo os modos naturais como ϵ^t a matriz de rigidez natural é dada por

$$K_n = A \ t \ D_n \quad (3.95)$$

onde o traço indica que os modos naturais são ϵ^t , A é a área do triângulo 123 e t é a espessura.

3.7.3 - DESENVOLVIMENTO DO TRUMP

O elemento TRUMP é um conjunto de camadas como mostrado na Figura 3.10 e, tem como hipótese de cálculo básica que a deformação é linear ao longo da espessura.

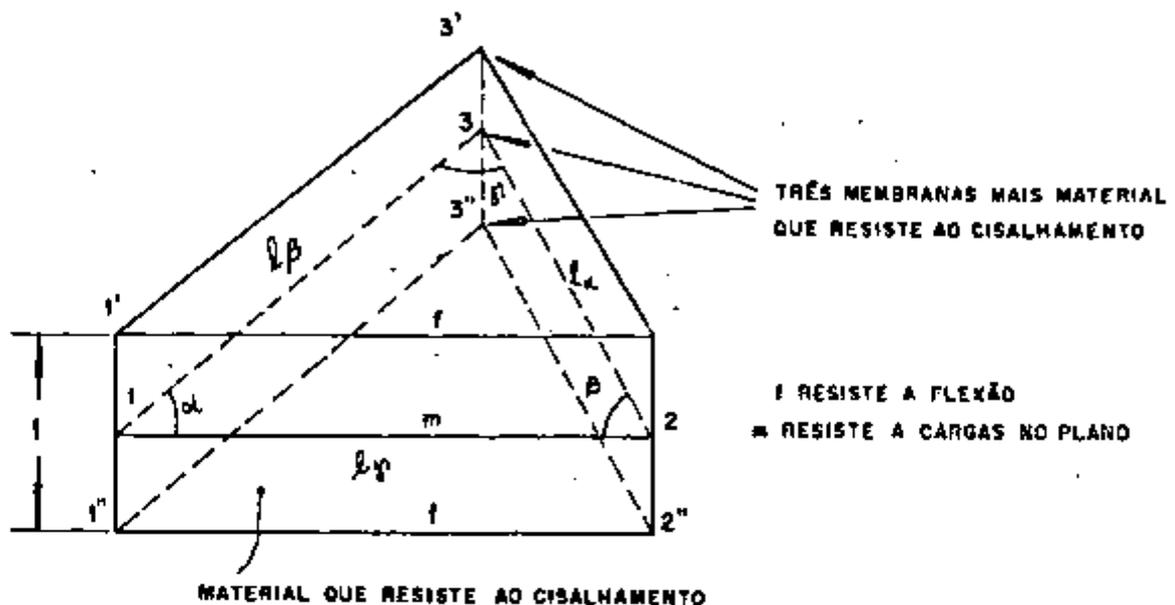


Figura 3.10 : Elemento TRUMP - Decomposição em camadas de TRIM-3

Para se fazer a formulação da parcela de placa do TRUMP é necessário definir as deformações e tensões naturais que são, respectivamente :

$$P_n = \{ \phi_{Bx} \quad \phi_{Ax} \quad \phi_{By} \quad \phi_{Ay} \quad \phi_{Bz} \quad \phi_{Az} \} \quad (3.96)$$

$$P_n = \{ M_{Bx} \quad M_{Ax} \quad M_{By} \quad M_{Ay} \quad M_{Bz} \quad M_{Az} \} \quad (3.97)$$

onde ϕ_B e ϕ_A são os modos de flexão simétrico e antissimétrico, e M_B e M_A são os respectivos momentos, descritos adiante em 3.7.5.

A matriz de rigidez natural do elemento é definida pela relação

$$P_n^e = K_n p_n \quad (3.98)$$

e a sua dedução é descrita a seguir.

3.7.4 - MATRIZ DE RIGIDEZ NATURAL DO TRUMP

O elemento é decomposto conforme a Figura 3.10 onde se tem um TRIMP central (123) no plano neutro e dois TRIMS (1'2'3') e (1"2"3") nas bordas com a espessura t entre os dois últimos preenchida por um material que suporta somente cisalhamento. As linhas 1'1", etc são consideradas como elementos rígidos fixadas aos nós 1, 2 e 3.

A matriz de rigidez do plano central 123 é, conforme a eq.(3.95),

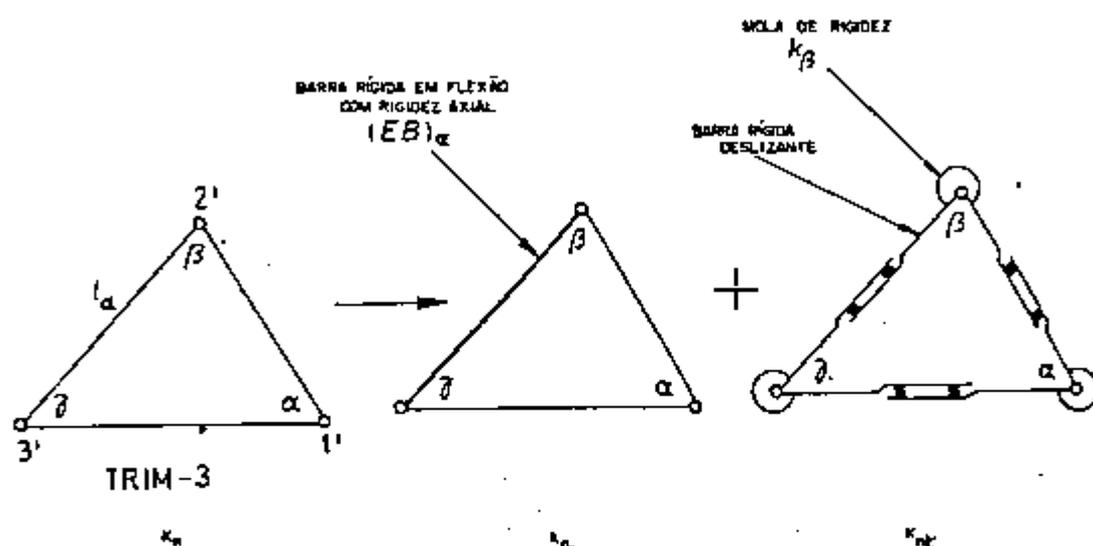
$$K_n^m = A t D_n \quad (3.99)$$

onde m indica membrana. A matriz de rigidez dos planos 1'2'3' e 1"2"3" é

$$K_n^f = \frac{A t D_n}{6} \quad (3.100)$$

onde f indica flexão, e o fator 6 ocorre pela hipótese de distribuição linear de deformações ao longo da espessura.

A formação da matriz de rigidez à flexão é feita segundo a decomposição mostrada na Figura 3.11.



OS TRIM-3 DAS SUPERFÍCIES $1'2'3'$ E $1''2''3''$ SÃO DECOMPOSTOS EM UMA PARTE EQUIVALENTE ÀS BARRAS $B_\alpha, B_\beta, B_\gamma$

E EM UMA PARTE EQUIVALENTE ÀS MOLAS ROTACIONAIS $k_\alpha, k_\beta, k_\gamma$.

Figura 3.11 : Elemento TRUMP -Decomposição dos TRIM-3

Os TRIM3 das superfícies $1'2'3'$ e $1''2''3''$ são separados em uma parte equivalente a barras B_α, B_β e B_γ e em uma parte equivalente a molas rotacionais k_α, k_β e k_γ .

Assim se

$$K_n = \begin{bmatrix} -f & -f & -f \\ K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} & K_{\alpha\gamma} \\ & -f & -f \\ & K_{\beta\beta} & K_{\beta\gamma} \\ \text{sim.} & & -f \\ & & K_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

define-se

$$K_{nt} = \begin{bmatrix} -f & -f & -f \\ K_{nt\alpha} & K_{nt\beta} & K_{nt\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

e

$$K_{nt} = K_n - K_{nf} \quad (3.103)$$

onde

$$K_{nf} = K_{n\alpha} + K_{n\beta} + K_{n\gamma}, \text{ etc} \quad (3.104)$$

A contribuição de $K_{nf\alpha}$ à energia de deformação é $\frac{1}{2} (\epsilon t_\alpha)^2 K_{nf\alpha}$ que é a mesma de uma barra de área B_α e de lado l_α onde

$$(E B)_\alpha l_\alpha = K_{nf\alpha} \quad (3.105)$$

Deste modo,

$$K_{nf} = \begin{bmatrix} (E B)_\alpha l_\alpha & & \\ & (E B)_\beta l_\beta & \\ & & (E B)_\gamma l_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

e, $\overset{-f}{K_{nt}}$ não dá nenhuma contribuição à energia quando o triângulo permanece semelhante ao seu estado original. $\overset{-f}{K_{nt}}$ representa a contribuição das três molas dos vértices da Figura 3.11.

As duas barras de área $(E B)_\alpha = \overset{-f}{K_{nt} f_\alpha} / l_\alpha$ ao longo de 2'3' e 2"3" podem ser combinadas com uma alma para formar a rigidez à flexão da viga.

$$(E I)_\alpha = \frac{(E B)_\alpha t^2}{2} \quad (3.107)$$

Se a rigidez ao cisalhamento é $(G A)_\alpha$, a energia de deformação por flexão e por cisalhamento em termos dos modos de flexão simétrico e antisimétrico $\phi_{s\alpha}$ e $\phi_{A\alpha}$ é

$$U_\alpha = \frac{(E I)_\alpha \phi_{s\alpha}^2}{2 l_\alpha} + \frac{3 (E I)_\alpha \phi_{A\alpha}^2}{2 l_\alpha (1 + g_\alpha)} \quad (3.108)$$

onde

$$g_\alpha = \frac{12 (E I)_\alpha}{(G A)_\alpha l_\alpha^2} \quad (3.109)$$

A energia restante de flexão e empenamento é devida a $\overset{-f}{K_{nt}}$.

Deve-se notar que somente os modos naturais de flexão $\phi_{st} = \{ \phi_{s\alpha} \quad \phi_{s\beta} \quad \phi_{s\gamma} \}$ contribuem para ϵ_t nas membranas 1'2'3' e 1"2"3". Logo

$$\epsilon_{t\alpha} = \pm \frac{\phi_{s\alpha} t}{2 l_\alpha}, \text{ etc} \quad (3.110)$$

e isto é o dado fundamental para a determinação das tensões no elemento.

A energia de deformação devido a \bar{K}_{nt}^{-f} é

$$\frac{1}{2} t^T \phi^T l^{-1} \bar{K}_{nt}^{-f} l^{-1} \phi s \quad (3.111)$$

com

$$l = \begin{bmatrix} l_a & l_p & l_t \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Para a formação da matriz de rigidez natural elástica do elemento K_n define-se

$$\frac{1}{2} t^T l^{-1} \bar{K}_{nt}^{-f} l^{-1} = \begin{bmatrix} (K_{aa})^2 & (K_{ap})^2 & (K_{at})^2 \\ & (K_{pp})^2 & (K_{pt})^2 \\ \text{sim.} & & (K_{tt})^2 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

Com as eqs. (3.108) e (3.113) é possível definir K_n^e

$$K_n^e = \begin{bmatrix} \frac{(E I)_a}{l_a} + (K_{ax})^2 & 0 & (K_{ax})^2 & 0 & (K_{ax})^2 & 0 \\ 0 & \frac{3(E I)_a}{l_a(l+a)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (K_{ax})^2 & 0 & \frac{(E I)_a}{l_a} + (K_{ax})^2 & 0 & (K_{ax})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3(E I)_a}{l_a(l+a)} & 0 & 0 \\ (K_{ax})^2 & 0 & (K_{ax})^2 & 0 & \frac{(E I)_a}{l_a} + (K_{ax})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3(E I)_a}{l_a(l+a)} \end{bmatrix}$$

simétrica

(3.114)

Na referência [4] há um modo mais simples de se definir K_n^e . A matriz de rigidez a flexão do TRUMP é dada por

$$K_n^f = \frac{A t^3}{12} l^{-1} D_n l^{-1} = \frac{A t^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{D_{aa}}{l_a^2} & \frac{D_{ab}}{l_a l_b} & \frac{D_{af}}{l_a l_f} \\ & \frac{D_{bb}}{l_b^2} & \frac{D_{bf}}{l_b l_f} \\ \text{sim.} & & \frac{D_{ff}}{l_f^2} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

e a matriz de rigidez natural do elemento K_{ne}

$$K_{ne} = \frac{A t^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{D_{\alpha\alpha}}{l\alpha^2} & 0 & \frac{D_{\alpha\beta}}{l\alpha l\beta} & 0 & \frac{D_{\alpha t}}{l\alpha l t} & 0 \\ & K_{\alpha\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{D_{\beta\beta}}{l\beta^2} & 0 & \frac{D_{\beta t}}{l\beta l t} & 0 \\ & & & K_{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{D_{t t}}{l t^2} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & K_{\alpha t} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

onde

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{3 (E I)_{\alpha}}{l\alpha (1+g_{\alpha})}, \text{ etc} \quad (3.117)$$

$$g_{\alpha} = \frac{12 (E I)_{\alpha}}{(G A)_{\alpha} l\alpha^2}, \text{ etc} \quad (3.118)$$

$$(E I)_{\alpha} = \frac{A t^3 D_{n\alpha}}{12 l\alpha}, \text{ etc} \quad (3.119)$$

$$D_{n\alpha} = D_{\alpha\alpha} + D_{\alpha\beta} + D_{\alpha t}, \text{ etc} \quad (3.120)$$

$$(G A)_{\alpha} = G R t \cos \alpha, \text{ etc} \quad (3.121)$$

e R é o raio circunscrito ao triângulo 123.

O cálculo de g_{α} , etc requer uma estimativa do valor de rigidez ao cisalhamento das almas das vigas ao longo dos lados do triângulo. A distribuição das tensões de cisalhamento depende da distribuição das tensões de flexão admitindo-se que as almas absorvem a mesma

energia de deformação por cisalhamento que o material verdadeiro quando submetido a um estado de deformação por cisalhamento constante.

Com relação a um referencial (O,x,y)

$$f^t = \{ \delta_{xx} \quad \delta_{yx} \} \quad (3.122)$$

e a energia de deformação específica é da forma

$$\frac{1}{2} f^t G f \quad (3.123)$$

com

$$G = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3.124)$$

logo a energia de deformação é

$$\frac{1}{2} A t f^t G f \quad (3.125)$$

se f for constante no elemento. Se o lado la estiver inclinado em relação a x e y a tensão na alma é

$$f_a = \delta_{xz} c_a + \delta_{yz} s_a, \quad c_a \text{ e } s_a \text{ são os cossenos diretores} \quad (3.126)$$

e a energia de deformação nas três almas é

$$\frac{1}{2} [(G A)_a f_a^2 l_a + (G A)_\beta f_\beta^2 l_\beta + (G A)_r f_r^2 l_r] \quad (3.127)$$

Substituindo f_u , etc de (3.126) em (3.127) e igualando (3.127) com (3.125) obtém-se o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} c_{uu} & c_{up} & c_{us} \\ c_{pu} & c_{pp} & c_{ps} \\ c_{su} & c_{sp} & c_{ss} \end{bmatrix} \mathbf{1} \begin{bmatrix} (GA)_u \\ (GA)_p \\ (GA)_s \end{bmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{bmatrix} G \\ G \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

que resolvido dá a expressão (3.121).

As expressões de K_n^e de (3.114) e (3.116) são iguais e isto é facilmente demonstrável. Será utilizada a expressão (3.116) pela sua facilidade de programação.

3.7.5 - MATRIZ DE RIGIDEZ CARTESIANA

Determinada a matriz de rigidez natural K_n^e é possível, então, calcular a matriz de rigidez cartesiana K^e por meio de transformações adequadas, isto é,

$$K^e = \mathbf{a}_n^t K_n^e \mathbf{a}_n \quad (3.129)$$

sendo necessária a montagem de \mathbf{a}_n .

A matriz de transformação \mathbf{a}_n é a relação entre o vetor de deslocamentos naturais (ou generalizados) p_n dados na eq. (3.96) e o vetor de deslocamentos nodais

$$\mathbf{d}^t = \{ w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} w_2 \theta_{x2} \theta_{y2} w_3 \theta_{x3} \theta_{y3} \} \quad (3.130)$$

onde w_i , θ_{xi} , θ_{yi} , $i=1,3$ são, respectivamente, os deslocamentos na direção z e as rotações nas direções x e y dos nós 1,2 e 3 do elemento. Assim,

$$p_n = \mathbf{a}_n \mathbf{d} \quad (3.131)$$

Como o elemento TRUMP é composto por três vigas nas direções dos lados será indicada inicialmente a matriz \mathbf{a}_n^v dos elementos de

viga. O vetor de deslocamentos generalizados do elemento de viga é de acordo com a Figura 3.12.

$$\bar{p}_v^t = \begin{Bmatrix} p_{0v} & p_{1v} \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} & p_{06} \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & p_{n4} & p_{n5} & p_{n6} \end{Bmatrix} \quad (3.132)$$

onde p_{0i} e p_{ni} são os modos de corpo rígido e os modos naturais, sendo que os modos de interesse são o simétrico e antissimétrico, p_{n4} e p_{n5} , identificados como ϕ_B e ϕ_A , respectivamente, com os índices α , β e dados conforme o lado do elemento.

O vetor de esforços generalizados do elemento de viga é de acordo com a Figura 3.13.

$$\bar{p}_v^t = \begin{Bmatrix} P_{0v} & P_{1v} \\ P_{01} & P_{02} & P_{03} & P_{04} & P_{05} & P_{06} \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & P_{n4} & P_{n5} & P_{n6} \end{Bmatrix} \quad (3.133)$$

onde P_{0i} e P_{ni} são os esforços de corpo rígido e os esforços naturais, sendo que os esforços de interesse são o simétrico e antissimétrico, P_{n4} e P_{n5} , identificados como M_B e M_A , respectivamente, com os índices α , β e dados conforme o lado do elemento.

Assim, se o vetor de deslocamentos nodais for para a viga

$$p_v^t = \{ u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2} \} \quad (3.134)$$

as relações entre eles são

$$p_v = A_v \bar{p}_v \quad (3.135)$$

$$p_v = a_v p \quad (3.136)$$

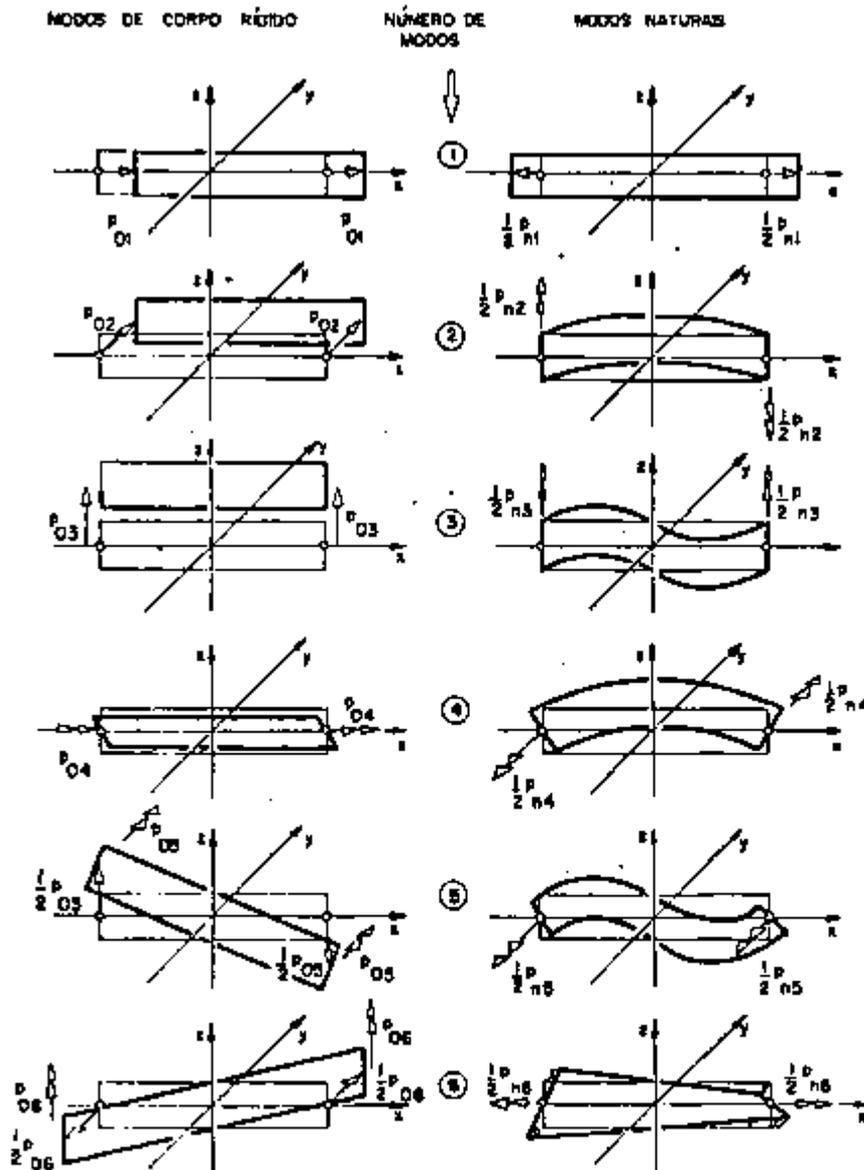


Figura 3.12 : Modos de corpo rígido e naturais de um elemento de viga

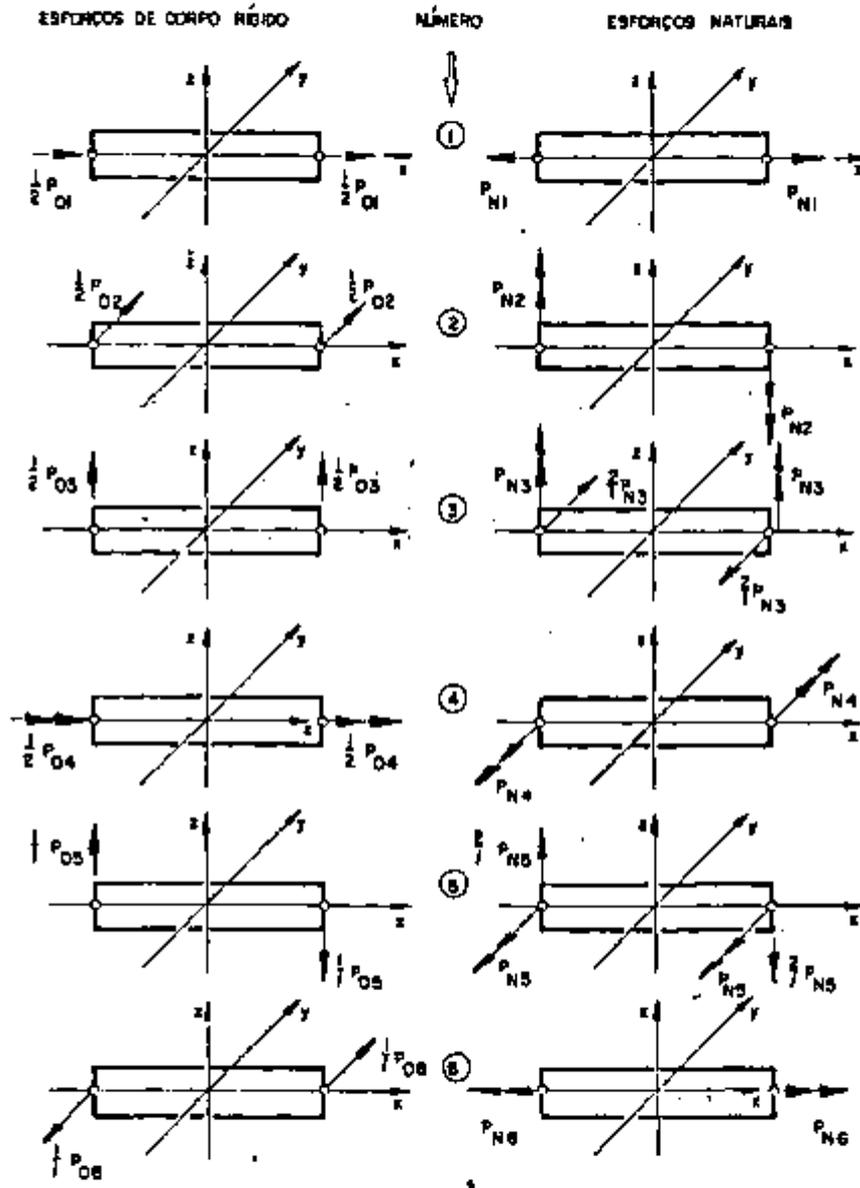


Figura 3.13 : Esforços de corpo rígido e naturais de um elemento de viga

onde

$$\Delta v = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

$$\mathbf{a}_v = \begin{bmatrix}
 k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & \frac{2}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{2}{l} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{l} & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

Supondo que a viga 12 faça ângulo θ com a direção x do sistema cartesiano, então, a relação entre o vetor de deslocamentos nodais locais e globais é

$$\mathbf{d}_l = \mathbf{T} \mathbf{d}_g \quad ; \quad l - \text{local e } g - \text{global} \quad (3.139)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}
 t & 0 & 0 & 0 \\
 0 & t & 0 & 0 \\
 0 & 0 & t & 0 \\
 0 & 0 & 0 & t
 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix}
 \cos\theta & \sin\theta & 0 \\
 -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

Deste modo,

$$\mathbf{p}_v = \mathbf{a}_v \mathbf{T} \mathbf{d} = \mathbf{a}_v \mathbf{d} \quad (3.141)$$

onde

$$anv^* = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2\sin\theta/l & 2\cos\theta/l & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\sin\theta/l & -2\cos\theta/l & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2/l & \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 & -2/l & \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

(3.142)

*
Separando de anv as linhas relativas a $pn4$ e $pn5$ (modos simétrico e antissimétrico) e as colunas relativas a $w1$, θ_{r1} , θ_{y1} , $w2$, θ_{r2} e θ_{y2} chega-se a

$$* \text{anTRUMP} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \\ 2/l & \sin\theta & -\cos\theta & -2/l & \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

*
Assim, rearranjando $anTRUMP$ corretamente para conter as três vigas

$$an = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_a}{l_a} & -\frac{x_a}{l_a} & 0 & -\frac{y_a}{l_a} & \frac{x_a}{l_a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l_a} & \frac{y_a}{l_a} & -\frac{x_a}{l_a} & -\frac{2}{l_a} & \frac{y_a}{l_a} & -\frac{x_a}{l_a} \\ 0 & -\frac{y_p}{l_p} & \frac{x_p}{l_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_p}{l_p} & -\frac{x_p}{l_p} \\ -\frac{2}{l_p} & \frac{y_p}{l_p} & -\frac{x_p}{l_p} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l_p} & \frac{y_p}{l_p} & -\frac{x_p}{l_p} \\ 0 & \frac{y_r}{l_r} & -\frac{x_r}{l_r} & 0 & -\frac{y_r}{l_r} & \frac{x_r}{l_r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{l_r} & \frac{y_r}{l_r} & -\frac{x_r}{l_r} & -\frac{2}{l_r} & -\frac{y_r}{l_r} & -\frac{x_r}{l_r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

onde $x_a = x_{23} = x_2 - x_3$, etc

3.7.6 - TENSÕES

Da eq.(3.110)

$$\epsilon_{ta} = \frac{\phi_{sa}}{l_a} z ; \epsilon_{tb} = \frac{\phi_{sb}}{l_b} z ; \epsilon_{tf} = \frac{\phi_{sf}}{l_f} z \quad (3.145)$$

logo

$$\epsilon_t = z \begin{bmatrix} \phi_{sa} / l_a \\ \phi_{sb} / l_b \\ \phi_{sf} / l_f \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

Da eq.(3.91)

$$\sigma_c = D_n \epsilon_t = z D_n \begin{bmatrix} \phi_{sa} / l_a \\ \phi_{sb} / l_b \\ \phi_{sf} / l_f \end{bmatrix} = z D_n T^* d \quad (3.147)$$

onde

$$T^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_a}{l_a} & \frac{-x_a}{l_a} & 0 & \frac{-y_a}{l_a} & \frac{x_a}{l_a} \\ 0 & \frac{-y_b}{l_b} & \frac{x_b}{l_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_b}{l_b} & \frac{-x_b}{l_b} \\ 0 & \frac{y_f}{l_f} & \frac{-x_f}{l_f} & 0 & \frac{-y_f}{l_f} & \frac{x_f}{l_f} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Chamando $\sigma^{*t} = \{ \sigma_x \sigma_y \tau_{xy} \}$ então

$$\sigma^* = \bar{C} \sigma_c = z \bar{C} D_n T d \quad (3.149)$$

onde \bar{C} é igual a C substituindo os coeficientes f_3 por 1 .

Como $M^t = \{ M_x M_y M_{xy} \}$ é dado por

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma dz = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \bar{C} D_n T d dz = t^3 \bar{C} D_n T d \quad (3.150)$$

então

$$M = \frac{t^3}{12} B_f d \quad (3.151)$$

onde

$$B_f = \bar{C} D_n T \quad (3.152)$$

sendo determinadas as tensões a partir dos deslocamentos nodais cartesianos.

3.6 - O ELEMENTO DKT

Este elemento é desenvolvido a partir da teoria de Mindlin-Reissner. Sua aplicação é restrita a placas finas porque na formulação são impostas condições de vínculo tais que se tenha deformações por cisalhamento transversal nulas em alguns pontos discretos, vindo daí o nome DKT (" Discrete Kirchhoff Theory ") [1],[15].

As hipóteses básicas para a formulação do elemento são :

(a) Aplica-se a teoria de Mindlin-Reissner considerando que as deformações por cisalhamento transversal e, portanto, a energia de deformação por cisalhamento transversal são desprezíveis quando comparadas às deformações e a energia de deformação por flexão da placa. Será deduzida somente a matriz de rigidez de flexão neste elemento.

(b) As rotações θ_x e θ_y variam quadraticamente no elemento, isto é,

$$\theta_x = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{xi} ; \theta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{yi} \quad (3.153)$$

onde N_i , $i=1,6$ são as funções das equações (3.35) a (3.40), com os nós dos vértices e dos lados definidos da mesma forma que o indicado lá.

(c) As hipóteses de Kirchhoff são impostas em

1. nos nós dos vértices

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} w_{,x} - \theta_{xz} \\ w_{,y} - \theta_{yz} \end{bmatrix} = 0 \text{ nos nós } 1, 2 \text{ e } 3 \quad (3.154)$$

1. nos nós do meio dos lados

$$w_{,sk} - \theta_{nk} = 0 \quad k=4,6 \quad (3.155)$$

(d) O deslocamento transversal é definido somente ao longo do contorno do elemento e sua variação é cúbica. Assim, os valores de w , $w_{,x}$ e $w_{,y}$ são requeridos para definir os deslocamentos ao longo dos lados :

$$w_{,k} = \frac{-3}{2l_{ij}} w_i + \frac{1}{4} w_{,i} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j + \frac{1}{4} w_{,j} \quad (3.156)$$

com k indicando o nó do meio do lado ij e l_{ij} o comprimento deste lado.

(e) É imposta uma variação linear de θ_x ao longo dos lados, isto é :

$$\theta_{xk} = \frac{1}{2} (\theta_{xi} + \theta_{xj}) \quad (3.157)$$

onde k denota nós no meio dos lados (ver Figura 3.4).

(f) Por (3.153) e (3.156) o elemento tem 18 graus de liberdade que com (3.154), (3.155) e (3.157) são reduzidos a 9 (3 deslocamentos e 6 rotações nos nós dos vértices).

Com as hipóteses de cálculo acima indicadas monta-se a relação entre as rotações θ_x e θ_y e os deslocamentos nodais d , isto é,

$$\{ \theta_x \ \theta_y \}^t = N \{ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \}^t \quad (3.158)$$

onde a matriz N é

$$N = \begin{bmatrix} \frac{3N_x C_x}{2 \ l_{12}} & N_1 + \frac{1}{2} N_x S_x^2 & -\frac{1}{2} N_x S_x C_x & \frac{3N_x C_x}{2 \ l_{12}} & N_2 + \frac{1}{2} N_x S_x^2 & -\frac{1}{2} N_x S_x C_x & \frac{3N_x C_x}{2 \ l_{12}} & N_3 + \frac{1}{2} N_x S_x^2 & -\frac{1}{2} N_x S_x C_x \\ \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & +\frac{1}{2} N_x S_x^2 & -\frac{1}{2} N_x S_x C_x & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & +\frac{1}{2} N_x S_x^2 & -\frac{1}{2} N_x S_x C_x & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & +\frac{1}{2} N_x S_x^2 & -\frac{1}{2} N_x S_x C_x \\ \frac{3N_x C_x}{2 \ l_{12}} & +\frac{1}{2} N_x C_x^2 & +\frac{1}{2} N_x C_x S_x & \frac{3N_x C_x}{2 \ l_{12}} & +\frac{1}{2} N_x C_x^2 & +\frac{1}{2} N_x C_x S_x & \frac{3N_x C_x}{2 \ l_{12}} & +\frac{1}{2} N_x C_x^2 & +\frac{1}{2} N_x C_x S_x \\ \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & N_1 + \frac{1}{2} N_x C_x^2 & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & N_2 + \frac{1}{2} N_x C_x^2 & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & N_3 + \frac{1}{2} N_x C_x^2 \\ \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & +\frac{1}{2} N_x C_x^2 & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & +\frac{1}{2} N_x C_x^2 & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & +\frac{1}{2} N_x C_x^2 \\ \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & -\frac{1}{2} N_x S_x^2 & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & -\frac{1}{2} N_x S_x^2 & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & -\frac{1}{2} N_x S_x^2 \\ \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & -\frac{1}{2} N_x S_x^2 & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & -\frac{1}{2} N_x S_x^2 & \frac{3N_x S_x}{2 \ l_{12}} & \frac{3N_x S_x C_x}{4} & -\frac{1}{2} N_x S_x^2 \end{bmatrix}$$

$$e \quad S_k = x_{ij}/l_{ij} ; C_k = -y_{ij}/l_{ij} ; x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j ; l_{ij} = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2}$$

$$e \text{ para } k=4, i=2 \text{ e } j=3 \\ k=5, i=3 \text{ e } j=1 \\ k=6, i=1 \text{ e } j=2$$

Utilizando as equações (2.50) e (2.51) pode-se determinar a matriz B_f , que relaciona as curvaturas com os deslocamentos nodais. Neste caso a matriz B_f é uma matriz com lineares em x e y e pode ser decomposta da seguinte maneira

$$B_f = L \alpha \quad (3.160)$$

onde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

$$e \ 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e \ 1 = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix}, \quad (3.162)$$

sendo L_i , $i=1,3$ as coordenadas naturais do triângulo e a matriz α

$$\begin{bmatrix}
 y_{23} & 0 & -y_{23} & -y_{23} & 0 & -y_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 -y_{23} & 0 & 2y_{23} & y_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 y_{23} & -y_{23} & y_{23}(2-r_1) & y_{23} & y_{23} & -y_{23}(r_1-2) & -y_{23}(2+r_1) & y_{23}(r_1-1) & y_{23}(r_1-2) \\
 -x_{23} & x_{23} & -x_{23} & 0 & x_{23} & 0 & x_{23} & x_{23}(r_1-1) & -x_{23} \\
 0 & x_{23} & 0 & x_{23} & x_{23} & -x_{23} & -x_{23} & x_{23}(r_1-1) & -x_{23} \\
 x_{23} & x_{23}(1-r_1) & x_{23} & -x_{23} & x_{23}(1-r_1) & x_{23} & -x_{23}(1+r_1) & -x_{23}(1-r_1) & x_{23}(1+r_1) \\
 -x_{23} & x_{23} & -x_{23} & x_{23} & -x_{23} & 2x_{23} & x_{23} & x_{23} & 1-r_1-2r_1 \\
 -x_{23} & y_{23} & x_{23} & x_{23} & -x_{23} & -x_{23} & -x_{23} & x_{23} & (r_1-2)r_1 \\
 x_{23} & -x_{23}(1-r_1) & (2-r_1)x_{23} & -x_{23} & (1-r_1)y_{23} & (2-r_1)x_{23} & -x_{23}(1+r_1) & -x_{23}(1-r_1) & -x_{23}(1+r_1)
 \end{bmatrix}$$

(3.163)

COM $x_{ij} = x_i - x_j$; $y_{ij} = y_i - y_j$; $l_{ij}^2 = x_{ij}^2 + y_{ij}^2$

$$p_4 = -6x_{23}/l_{23}^2 ; p_5 = -6x_3/l_{31}^2 ; p_6 = -6x_{12}/l_{12}^2$$

$$t_4 = -6y_{23}/l_{23}^2 ; t_5 = -6y_3/l_{31}^2$$

$$q_4 = 3x_{23}y_{23}/l_{23}^2 ; q_5 = 3x_3y_3/l_{31}^2$$

$$r_4 = 3y_{23}^2/l_{23}^2 ; r_5 = 3y_3^2/l_{31}^2$$

A matriz de rigidez K é dada, neste elemento, por

$$K = \int_A B_r^t D_r B_r dA \quad (3.164)$$

somente com a parcela devida a flexão.

Substituindo a eq. (3.160) em (3.164)

$$K = \int_A \alpha^t L^t D_f \alpha L dA \quad (3.165)$$

e como α é uma matriz de termos constantes

$$K = \alpha^t \int_A L^t D_f L dA \alpha \quad (3.166)$$

Chamando

$$D_f^* = \int_A L^t D_f L dA \quad (3.167)$$

e fazendo a integração chega-se a

$$D_f^* = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2D & D & D & 2\mu D & \mu D & \mu D & 0 & 0 & 0 \\ D & 2D & D & \mu D & 2\mu D & \mu D & 0 & 0 & 0 \\ D & D & 2D & \mu D & \mu D & 2\mu D & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu D & \mu D & \mu D & 2D & D & D & 0 & 0 & 0 \\ \mu D & 2\mu D & \mu D & D & 2D & D & 0 & 0 & 0 \\ \mu D & \mu D & 2\mu D & D & D & 2D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D(1-\mu) & \frac{1}{2}D(1-\mu) & \frac{1}{2}D(1-\mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}D(1-\mu) & D(1-\mu) & \frac{1}{2}D(1-\mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}D(1-\mu) & \frac{1}{2}D(1-\mu) & D(1-\mu) \end{bmatrix}$$

(3.168)

$$\text{com } D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}$$

A matriz de rigidez K é, então, obtida de forma explícita com o seguinte produto

$$K = \alpha^t D r^* \alpha \quad (3.169)$$

Para o cálculo das tensões generalizadas $M^t = (M_x \ M_y \ M_{xy})$, pela relação (2.54)

$$M = D r B r^* d = D r L \alpha d \quad (3.170)$$

sendo L calculada para o ponto escolhido e M obtido pelo produto indicado.

Há as seguintes observações em relação a este elemento :

1. Desde que w varia cubicamente ao longo dos lados, w,s varia quadraticamente e, também, θ_n . Desde que w,s é igual a θ_n em três pontos ao longo de cada lado, a hipótese de Kirchhoff ($s_z = \theta_n - w,s = 0$) é satisfeita em todo o contorno do elemento.
2. A integração da matriz de rigidez na forma como foi indicada é explícita e facilmente programável.
3. A interpolação para o deslocamento transversal não é definida internamente ao elemento. Assim, não pode haver a definição consistente do vetor de esforços transversais nodais bem como das matrizes de massa e de rigidez geométrica. Como aproximação, pode ser utilizada na prática a variação linear de w dentro do elemento.
4. A convergência para a solução da teoria clássica de Kirchhoff é obtida porque a energia de deformação por cisalhamento transversal é desprezada e porque as hipóteses de Kirchhoff são satisfeitas no contorno do elemento.
5. Com a restrição imposta a θ_s na eq. (3.157), θ_x e θ_y são dadas por polinômios completos de 1º grau no elemento.

6. Quando esta formulação é aplicada a um elemento de viga, a matriz de rigidez com polinômio cúbico de w é obtida.
7. A formulação é extensível a elementos quadrilaterais com 12 graus de liberdade e outros elementos poligonais de placa.

3.9 - COMPARAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS

Para uma comparação entre os elementos eles serão chamados T1, T2, etc como definido a seguir :

T1 - é o elemento descrito em 3.4 com integração exata de K_f e K_c .

T2 - é o elemento T1 com o fator $c/(1+c)$ multiplicando K_c .

T3 - é o elemento descrito em 3.4 com integração exata de K_f e reduzida de K_c .

T4 - é o elemento T3 com o fator $c/(1+c)$ multiplicando K_c .

T5 - é o elemento descrito em 3.5 com integração exata de K_f e K_c .

T6 - é o elemento T5 com o fator $c/(1+c)$ multiplicando K_c .

T7 - é o elemento descrito em 3.5 com integração exata de K_f e reduzida de K_c .

T8 - é o elemento T7 com o fator $c/(1+c)$ multiplicando K_c .

T9 - é o elemento descrito em 3.6 com integração exata de K_f e K_c .

T10 - é o elemento T9 com o fator $c/(1+c)$ multiplicando K_c .

T11 - é o elemento descrito em 3.6 com integração exata de K_f e reduzida de K_c .

T12 - é o elemento T11 com o fator $c/(1+c)$ multiplicando K_c .

T13 - é o elemento descrito em 3.4 com integração reduzida e otimizada (o elemento é sempre um triângulo retângulo).

T14 - é o elemento descrito em 3.7

T15 - é o elemento descrito em 3.8

Os elementos acima relacionados tiveram suas matrizes de rigidez comparadas para algumas situações, como se verá a seguir, e foram submetidos a alguns testes em problemas de placas finas estáticos e lineares para avaliação do seu desempenho. Buscou-se avaliar se os elementos estudados atendiam os critérios descritos no item 1 deste trabalho, não se preocupando, nesta fase, em testá-los ou utilizá-los em análises de placas moderadamente espessas ou em análises não-lineares e/ou dinâmicas.

3.9.1 - ANÁLISE ESPECTRAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

Para uma primeira comparação entre os elementos estudados são apresentados nas Tabelas 3.1 a 3.9 os autovalores das matrizes de rigidez dos elementos com diferentes geometrias. Sendo esta comparação apenas um exercício numérico não foram consideradas unidades de medida.

Nas Tabelas 3.1 a 3.3 o elemento é um triângulo equilátero de lado unitário, módulo de elasticidade $E=3000$, coeficiente de Poisson $\mu=0.3$, com a espessura variando de $t=10$, $t=0.1$ e $t=0.001$.

Nas Tabelas 3.4 a 3.6 o elemento é um triângulo escaleno cujos vértices tem as seguintes coordenadas $(x;y)$: $(0;0)$, $(1;0)$ e $(1.5;1)$ e nas Tabelas 3.7 a 3.9 o elemento é um triângulo retângulo com catetos de $l=1$. As propriedades do material e as espessuras são as mesmas do triângulo equilátero.

Tabla 2.1 : Autovalores de matrices de rigidez dos elementos
Triângulo equilátero con espesura 1:11

Modo	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0	
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0	
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0	
4	.1210E+2	.1210E+2	0.0	0.0	.3157E+2	.1154E+2	0.0	0.0	.1023E+2	.1023E+2	0.0	0.0	---	.2700E+2	.2066E+2	
5	.3094E+4	.3223E+4	---	.3223E+4	.2460E+3											
6	.3094E+4	.3223E+4	.4024E+4	.3223E+4	.3223E+4	.3223E+4	.3223E+4	---	.3223E+4	.5351E+3						
7	.3564E+3	---	.3564E+3	.1031E+2												
8	.3564E+3	---	.3564E+3	.1705E+2												
9	.1023E+6	.1023E+6	.1023E+6	.2023E+6	.3023E+6	.4023E+6	.5023E+6	.6023E+6	.7023E+6	.8023E+6	.9023E+6	.1023E+6	.2023E+6	---	.1023E+6	.1005E+1

Tabla 2.2 : Autovalores das matrices de rigidez dos elementos
Triângulo equilátero con espesura 1:0.1

Modo	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0	
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0	
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0	
4	.1033	.1033	0.0	0.0	.3260E-1	.0004E-2	0.0	0.0	.5030E-1	.0223E-2	0.0	0.0	---	.5030E-1	.2066E-1	
5	.0615	.0021	.0021	.1033	.3260E-1	.3262E-2	.5060E-2	.5062E-2	.5060E-1	.5062E-1	.5062E-1	.5062E-1	.5062E-1	---	.5062E-1	.2066E-2
6	.0615	.0021	.0615	.0021	.1033	.5252E-2	.5250E-2	.5252E-1	.1033	.5257E-1	.5250E-1	.5250E-1	.5250E-1	---	.0070E-1	.5551E-1
7	.1523E+1	.1551E+1	.0615	.0021	.1557E+1	.1033	.1033	.1033	.1023E+1	.1033	.1033	.1033	.1033	---	.1033	.1033
8	.3354E+2	.3354E+2	.3354E+2	.3354E+2	.3354E+2	.3270E+1	.3354E+2	.3270E+1	.3354E+2	.3270E+1	.3354E+2	.3270E+1	.3354E+2	---	.1423E+1	.1005E+1
9	.3354E+2	.3354E+2	.3354E+2	.3354E+2	.3354E+2	.3270E+1	.3354E+2	.3270E+1	.4270E+2	.3354E+2	.3270E+1	.3354E+2	.3270E+1	---	.1423E+1	.1005E+1

Tabela 3.3 : Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos
Triângulo equilátero com espessura $t=0,001$

Node	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
4	.0199E-2	.0711E-2	0.0	0.0	.5360E-7	.4579E-7	0.0	0.0	.5260E-7	.4079E-7	0.0	0.0	---	.5252E-7	.3468E-7
5	.0199E-2	.0031E-2	.0199E-2	.0031E-2	.5360E-7	.3752E-7	.5360E-7	.5032E-7	.5260E-7	.5252E-7	.5360E-7	.5252E-7	---	.5252E-7	.3066E-7
6	.0031E-2	.0031E-2	.0199E-2	.0031E-2	.3031E-6	.5252E-7	.5360E-7	.5252E-7	.1031E-6	.5260E-7	.5360E-7	.5252E-7	---	.3031E-6	.5031E-7
7	.1523E-1	.1031E-1	.3031E-1	.1031E-1	.1157E-1	.2011E-6	.3031E-6	.1031E-6	.1032E-1	.1031E-6	.3031E-6	.1031E-6	---	.1031E-6	.1031E-6
8	.3254	.3254	.3254	.3254	.3254	.1220E-5	.3254	.1220E-5	.3254	.3220E-5	.3254	.3220E-5	---	.1220E-5	.1265E-5
9	.3254	.3254	.3254	.3254	.3254	.1220E-5	.3254	.1220E-5	.4170	.1653E-5	.3270	.1270E-5	---	.1197E-5	.1265E-5

Tabela 3.4 : Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos
Triângulo escaleno com espessura $t=10$

Node	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	.7017E3	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
4	.0074E+3	.0052E+3	0.0	0.0	.3222E+2	.1229E+3	0.0	0.0	.6070E+3	.0155E+3	0.0	0.0	---	0.0	.1000E+3
5	.2100E+4	.2093E+6	.2100E+4	.2093E+4	.3517E+4	.5512E+4	.2517E+4	.3512E+4	.1567E+4	.1562E+4	.1524E+4	.3510E+4	---	.2452E+4	.2770E+3
6	.9567E+4	.0523E+4	.0527E+4	.0523E+4	.0000E+4	.0077E+4	.0000E+4	.0077E+4	.0422E+4	.0460E+4	.0203E+4	.0240E+4	---	.0000E+4	.4771E+3
7	.2100E+5	.2600E+5	.2612E+5	.2612E+5	.2609E+5	.2600E+5	---	.2600E+5	.2000E+6						
8	.0041E+5	.0420E+5	.0220E+5	.0023E+5	.0420E+5	.0420E+5	.0420E+5	.0420E+5	.0422E+5	.0420E+5	.0420E+5	.0420E+5	---	.0720E+5	.5243E+8
9	.2264E+6	.2160E+4	.2264E+6	---	.2264E+6	.1493E+7									

Tabla 3.4 : Autovalores das matrices de rigidez dos elementos
Triángulo escaleno con espesura $t=0.1$

Modo	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	-.1229	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
4	.0007E-1	-.0127E-1	0.0	0.0	.2366E-1	.2170E-1	0.0	0.0	.2060E-1	.1551E-1	0.0	0.0	---	0.0	.1900E-1	
5	.1070	.1600	-.5774E-1	-.5774E-1	.3777E-1	.2165E-1	.2165E-1	.2065E-1	.2100E-1	.2067E-1	.2060E-1	.2060E-1	---	.2060E-1	.1770E-1	
6	.2250	.2250	.3511E-1	.0407E-1	.2750	.1670	-.0192E-1	.0310E-1	.2250	.1247	-.0407E-1	.0451E-1	---	-.4507E-1	-.1770E-1	
7	.1110E+1	.1251E+1	.2250	.2250	.3205E+1	.2250	.2250	.2250	.1765E+1	.2250	.2250	.2250	---	.2250	.2000	
8	.3331E+2	.2441E+2	.2210E+2	.2107E+2	.1606E+2	.5206	.1504E+2	.5206	.1610E+2	.5000	.1556E+2	.3411	---	.1401E+1	.5206	
9	.0703E+2	.0563E+2	.0785E+2	.4500E+2	.0063E+2	.2974E+1	.0913E+2	.2973E+1	.0556E+2	.3172E+1	.0322E+2	.3013E+2	---	.3530E+1	.1407E+1	

Tabla 3.5 : Autovalores das matrices de rigidez dos elementos
Triángulo escaleno con espesura $t=0.001$

Modo	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	-.3242E-6	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	---	0.0	0.0
4	-.3774E-2	-.0612E-2	0.0	0.0	.2366E-2	.2280E-2	0.0	0.0	.2060E-2	.1504E-2	0.0	0.0	---	0.0	.1000E-2
5	.1066E-2	.1207E-2	-.5774E-2	-.5774E-2	.3420E-1	.2065E-1	.2060E-1	.2065E-1	.2029E-2	.2067E-2	.2060E-1	.2060E-1	---	.2065E-2	.2770E-2
6	.2250E-2	.2000E-2	.3511E-1	.0411E-1	.2250E-6	.1707E-6	.0304E-7	-.0211E-1	.2250E-1	.2250E-1	.0400E-1	.0450E-1	---	-.4406E-2	-.0770E-2
7	.3410	.2250	.2250	.2250	.3246E-1	.2250E-6	.2250E-6	.2250E-6	.1715E-1	.2250E-6	.2250E-6	.2240E-6	---	.2250E-6	.2000E-6
8	.1000	.0672	.0004	.6500	.1005	.5340E-6	.1505	.3511E-6	.2010	.5502E-6	.1556	.3250E-6	---	.1460E-5	.5206E-6
9	.3103	.0674	.0785	.7061	.0063	.3975E-5	.0062	.3975E-5	.0556	.3200E-5	.0313	.3107E-5	---	.3600E-5	.1407E-5

Tabela 3.7 : Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos
Triângulo retângulo com espessura $t=10$

Nodo	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	.2931E+3	.2024E+3	0.0	0.0	.1375E+3	.3321E+3	0.0	0.0	.3201E+2	.9264E+2	0.0	0.0	0.0	0.0	.2001E+3
5	.2144E+4	.2157E+4	.2544E+4	.3157E+4	.2124E+4	.2127E+4	.2134E+4	.2127E+4	.2224E+4	.2222E+4	.2151E+4	.2145E+4	.2201E+4	.2200E+4	.2048E+4
6	.6019E+4	.4875E+4	.4019E+4	.4076E+4	.5303E+4	.5280E+4	.5263E+4	.5290E+4	.5822E+4	.5015E+4	.5449E+4	.5439E+4	.5567E+4	.5202E+4	.5028E+4
7	.4026E+5	.4926E+5	.4026E+5												
8	.6420E+5														
9	.1492E+6														

Tabela 3.8 : Autovalores das matrizes de rigidez dos elementos
Triângulo retângulo com espessura $t=0.1$

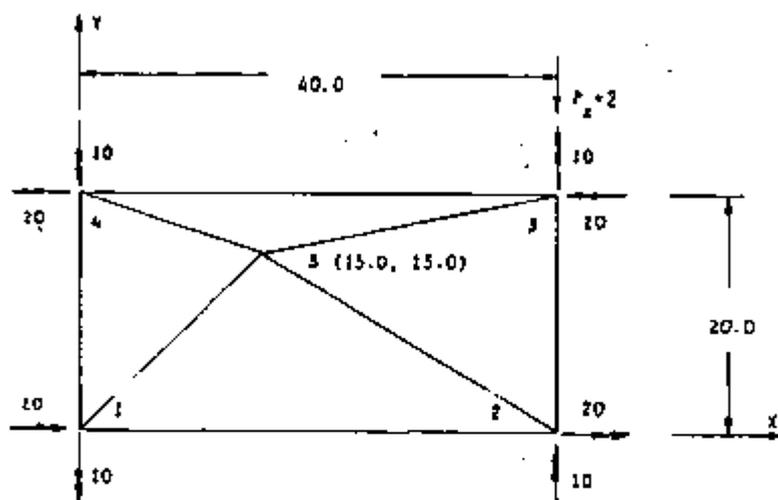
Nodo	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	.1428	.1428	0.0	0.0	.3023E-1	.3041E-1	0.0	0.0	.3023E-1	.2420E-1	0.0	0.0	0.0	0.0	.2000E-1
5	.4415	.3218	.1428	.1428	.4022E-1	.3027E-1	.3027E-1	.3017E-1	.4643E-1	.3023E-1	.3022E-1	.3020E-1	.3022E-1	.3018E-1	.3044E-1
6	.6673	.4071	.4415	.3218	.1428	.4018E-1	.6153E-1	.6123E-1	.1428	.3028E-1	.6212E-1	.6193E-1	.7544E-1	.6410E-1	.5628E-1
7	.2852E+1	.1997E+1	.6673	.4071	.1776E+1	.1428	.1428	.1428	.2259E+1	.1428	.1428	.1428	.1428	.1428	.1345
8	.3017E+2	.2763E+2	.3017E+2	.2763E+2	.2228E+2	.7124	.1226E+2	.3406	.2369E+2	.7546	.2204E+2	.1828	.7519	.1826E+1	.7386
9	.7015E+2	.7145E+2	.7015E+2	.7195E+2	.5609E+2	.1062E+1	.5600E+2	.1062E+1	.6202E+2	.2039E+1	.5610E+2	.1020E+1	.2015E+1	.2066E+1	.1503E+1

Tabla 3.9 : Valores de las matrices de rigidez de los elementos
Triángulo rectángulo con espesura $t=0.001$

Node	31	32	33	34	35	36	37	38	39	Y10	Y11	Y12	Y13	Y14	Y15
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	.4439E-2	.0051E-2	0.0	0.0	.2823E-7	.0004E-7	0.0	0.0	.0023E-7	.2104E-7	0.0	0.0	0.0	0.0	.0063E-7
5	.6678E-2	.0210E-2	.4113E-2	.4093E-2	.4632E-7	.0010E-7	.0021E-7	.0018E-7	.0662E-7	.0021E-7	.0023E-7	.0020E-7	.0020E-7	.0010E-7	.0040E-7
6	.1026E-1	.0015E-2	.7548E-2	.7102E-2	.1026E-6	.0004E-7	.0550E-7	.0331E-7	.1026E-6	.7912E-7	.0210E-3	.0302E-7	.0010E-7	.0410E-3	.0020E-7
7	.7699E-3	.1026E-1	.1026E-2	.1026E-1	.1761E-1	.1026E-6	.1026E-6	.1026E-6	.1234E-1	.1026E-6	.1026E-6	.1026E-6	.1026E-6	.1026E-6	.1026E-6
8	.0017	.0017	.0017	.0017	.0220	.0667E-6	.0220	.7650E-6	.2000	.0007E-6	.2204	.7671E-6	.0010E-6	.0011E-6	.7700E-6
9	.7015	.7015	.7015	.7015	.0600	.1025E-6	.0600	.1025E-6	.0201	.2120E-6	.0000	.1005E-6	.2120E-6	.2002E-6	.1565E-6

3.9.2 - "PATCH TEST" DA TEORIA CLÁSSICA DE KIRCHHOFF

Os elementos estudados foram utilizados na análise de uma placa fina retangular submetida a um estado de flexão onde os três momentos resultantes são constantes na placa. A geometria, carregamentos, discretização e a solução analítica são mostrados na Figura 3.14 [11],[14].



Dados : $E = 1000$, $\nu = 0.3$, $t = 1$
 Condições de Contorno : $w = 0$ nos nós 1, 2 e 4
 Solução Analítica : $M_x = M_y = M_{xy} = 1$ na placa

Figura 3.14 : "Patch-test"

O elemento T15 satisfaz completamente o teste com os momentos calculados reproduzindo exatamente os momentos da solução analítica ($M_x = M_y = M_{xy} = 1$). Os elementos T13 e T14 com uma malha com quatro triângulos retângulos (com o nó central no centro geométrico da placa) também satisfazem completamente o teste.

Pode-se dizer que os elementos de T5 a T12 satisfazem o teste pois os momentos calculados variam numa faixa entre 0.96 e 1.04, bem próximos aos valores da solução analítica. Notar que estes elementos foram desenvolvidos com a Teoria de Mindlin-Reissner.

Os elementos T1 a T4 e T14 (na configuração da Figura 3.14) não satisfazem o teste pois os momentos são totalmente diferentes entre si e em relação aos valores da solução analítica.

3.9.3 - ANÁLISE DE PLACAS FINAS QUADRADAS

Os elementos T5 a T15 foram utilizados em problemas com placas finas quadradas. Duas situações foram analisadas:

(a) Placa fina quadrada simplesmente apoiada nas bordas sob carregamento uniforme com as seguintes características:

lado	$L = 8$	$L/t = 100$
espessura	$t = 0,08$	
	$E = 1000$	
	$\mu = 0,3$	
carga distribuída	$q = - 0,1$	

(b) Placa fina quadrada engastada nas bordas sob carga concentrada no centro da placa com as seguintes características:

lado	$L = 8$	$L/t = 100$
espessura	$t = 0,08$	
	$E = 1000$	
	$\mu = 0,3$	
carga concentrada	$P = - 4$	

Somente um quadrante da placa foi modelado por considerações de simetria e as malhas, denominadas A, B e C, são mostradas na Figura 3.15, sendo N o número de elementos da malha. As condições de contorno empregadas foram $w = 0$ nos lados simplesmente apoiados e $w = \theta_x = \theta_y = 0$ nos lados engastados.

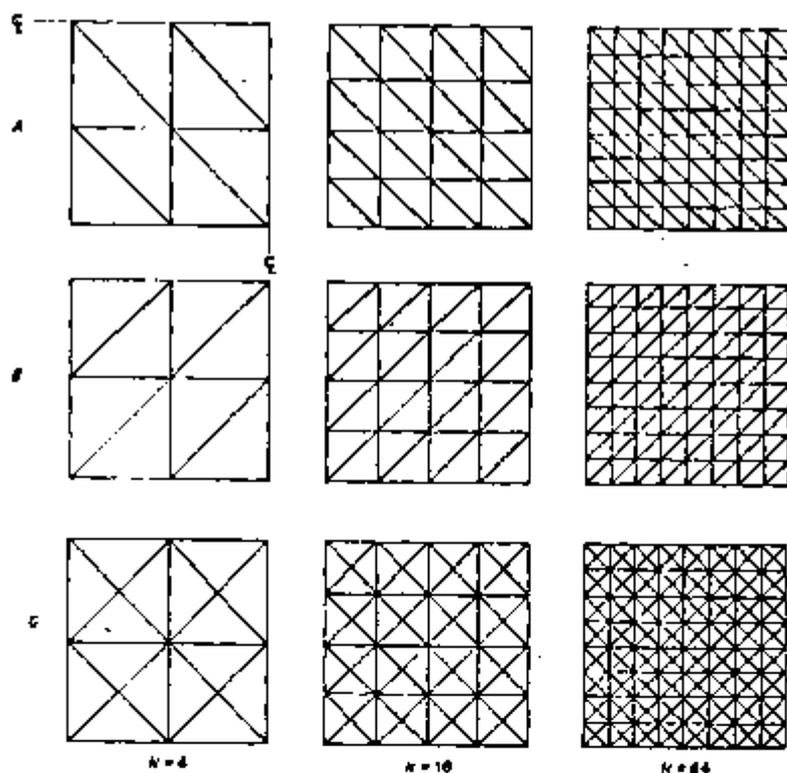


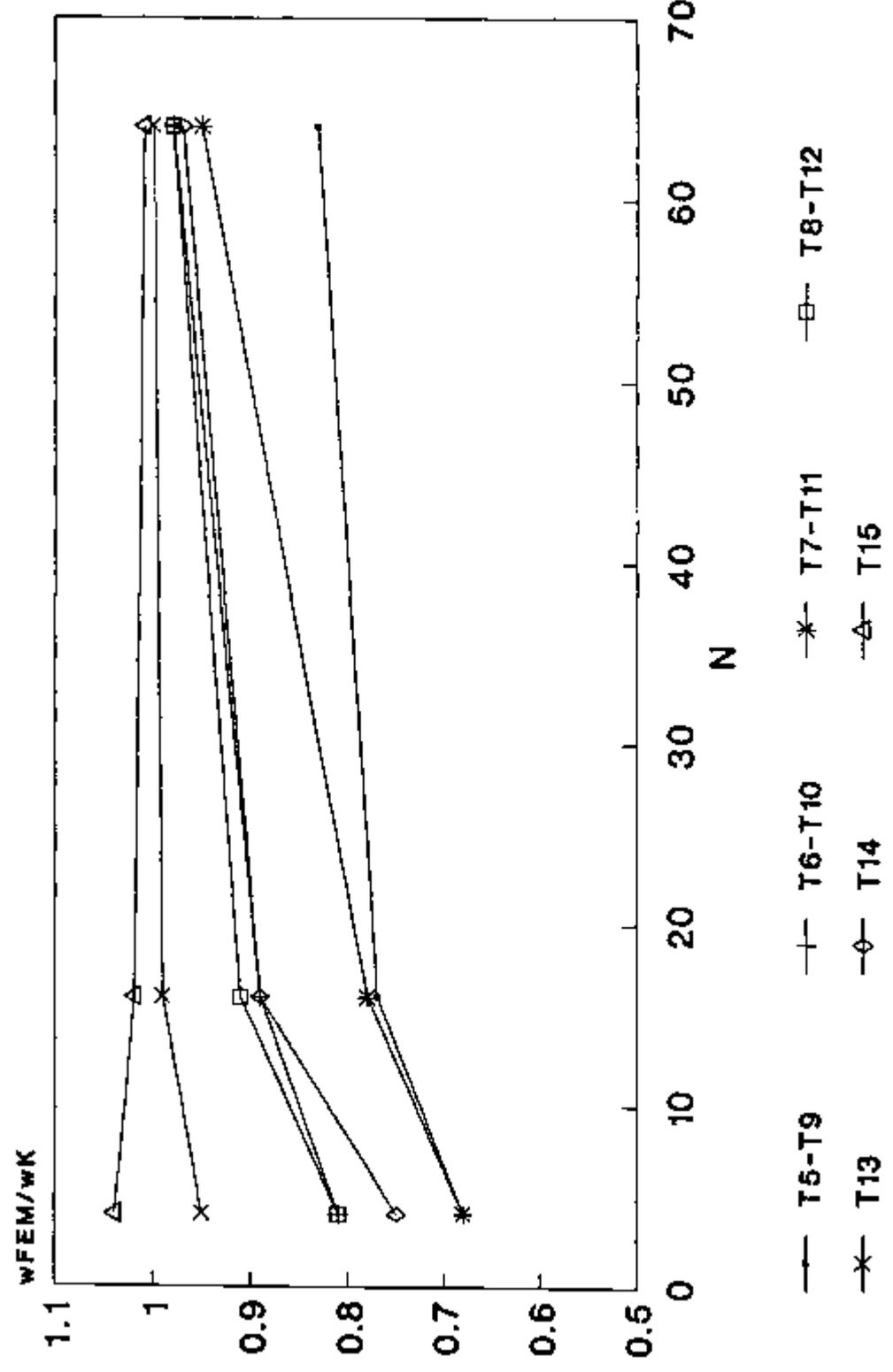
Figura 3.15 : Placas quadradas - Malhas utilizadas

Foi feita uma comparação entre os resultados das análises com elementos finitos e das soluções analíticas para os dois problemas. Esta comparação é apresentada nas Figuras 3.16 a 3.27.

Nas Figuras 3.16 a 3.18 e 3.22 a 3.24 são comparados os valores de deslocamento no centro da placa. Nas Figuras 3.19 a 3.21 são comparados os momentos no centro da placa (obtidos pela média quando os vértices dos elementos coincidem) para o caso onde o carregamento é distribuído uniformemente e nas Figuras 3.25 a 3.27 a reação (momento) no centro do lado da placa sob carga concentrada no centro.

Figura 3.16

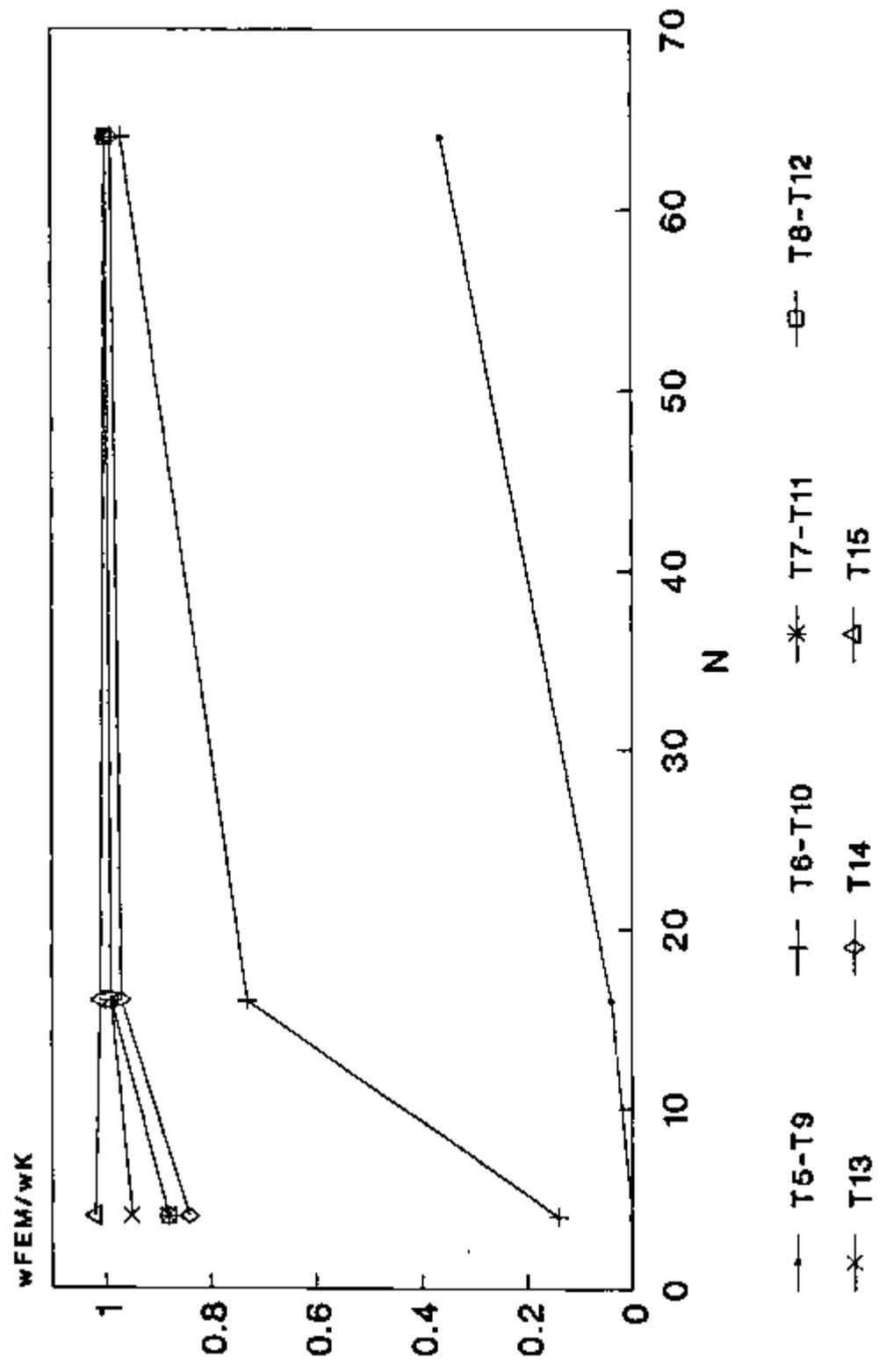
PLACA QUADRADA FINA SIMPLEMENTE APOIADA
 Carregamento uniforme-L/t = 100 - μ = 0,3
 Deslocamento no centro da placa



malha A

Figura 3.17

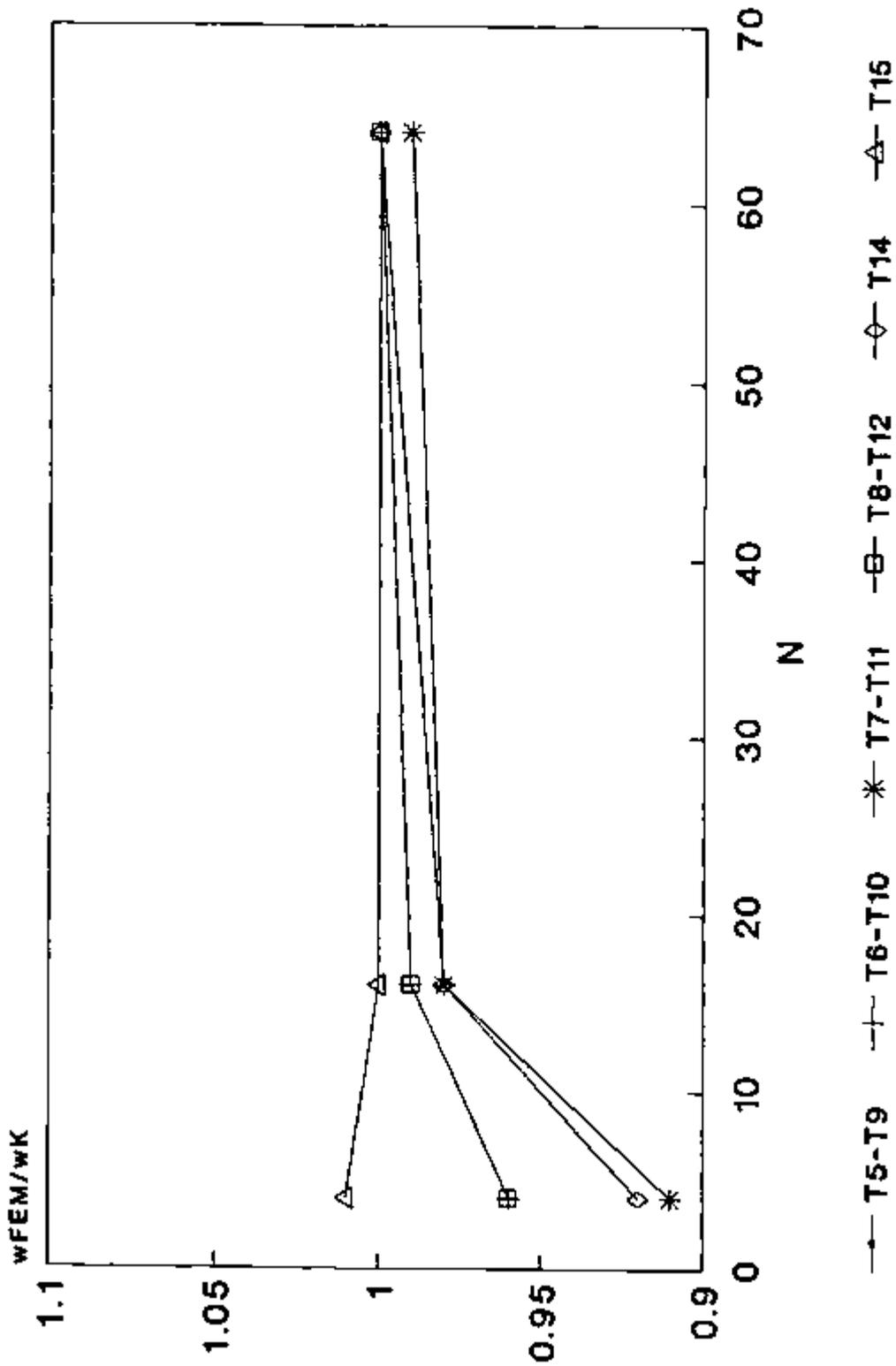
PLACA QUADRADA FINA SIMPLEMENTE APOIADA
 Carregamento uniforme $L/t = 100 - \mu = 0,3$
 Deslocamento no centro da placa



malha B

PLACA QUADRADA FINA SIMPLEMENTE APOIADA
 Carregamento uniforme-L/t = 100 - ν = 0,3
 Deslocamento no centro da placa

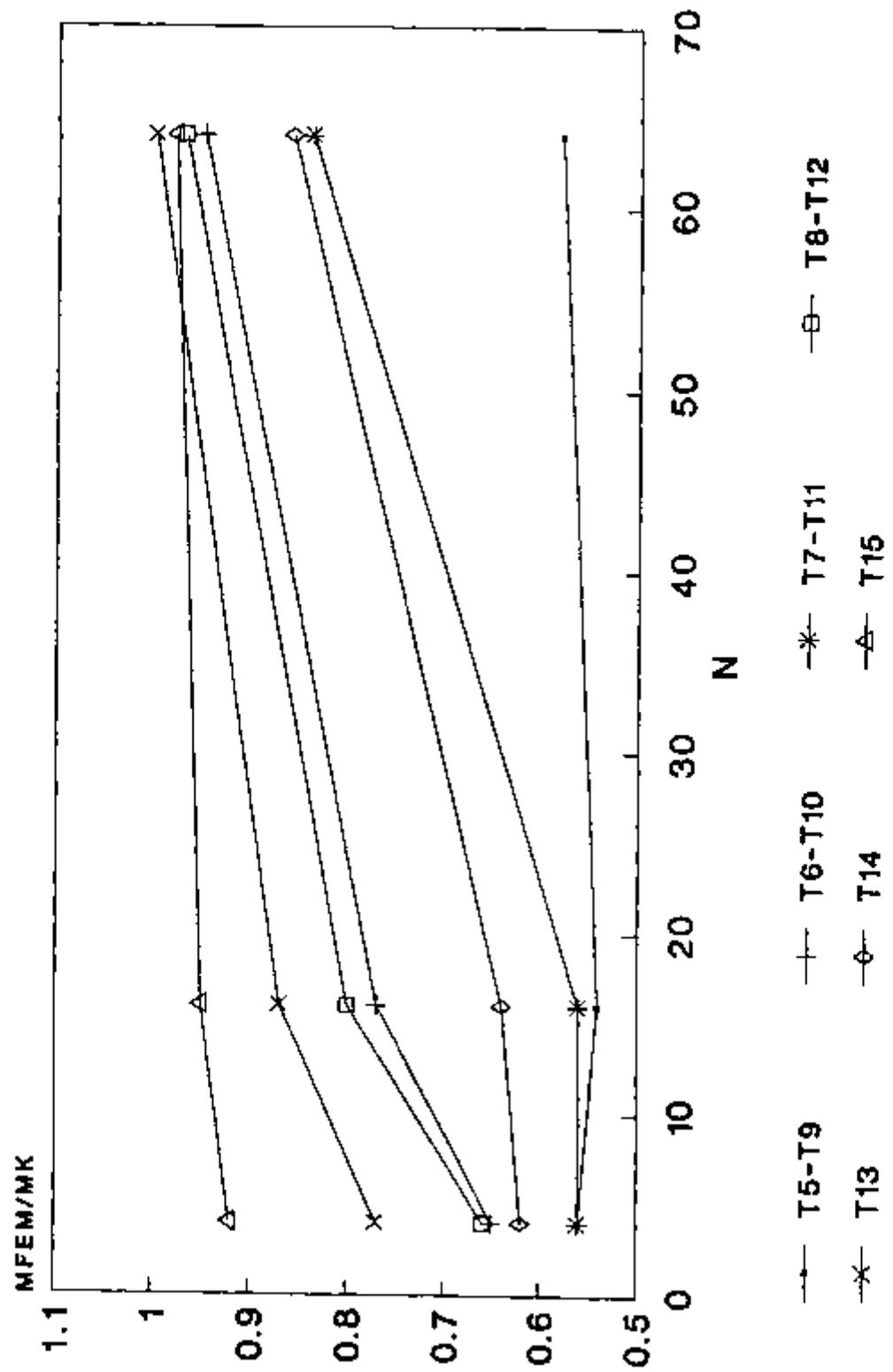
Figura 3.18



malha C

PLACA QUADRADA FINA SIMPLEMENTE APOIADA
 Carregamento uniforme-L/t = 100 - μ = 0,3
 Momento no centro da placa

Figura 3.19



malha A

Figura 3.20

PLACA QUADRADA FINA SIMPLEMENTE APOIADA
 Carregamento uniforme- $L/l = 100 - \mu = 0,3$
 Momento no centro da placa

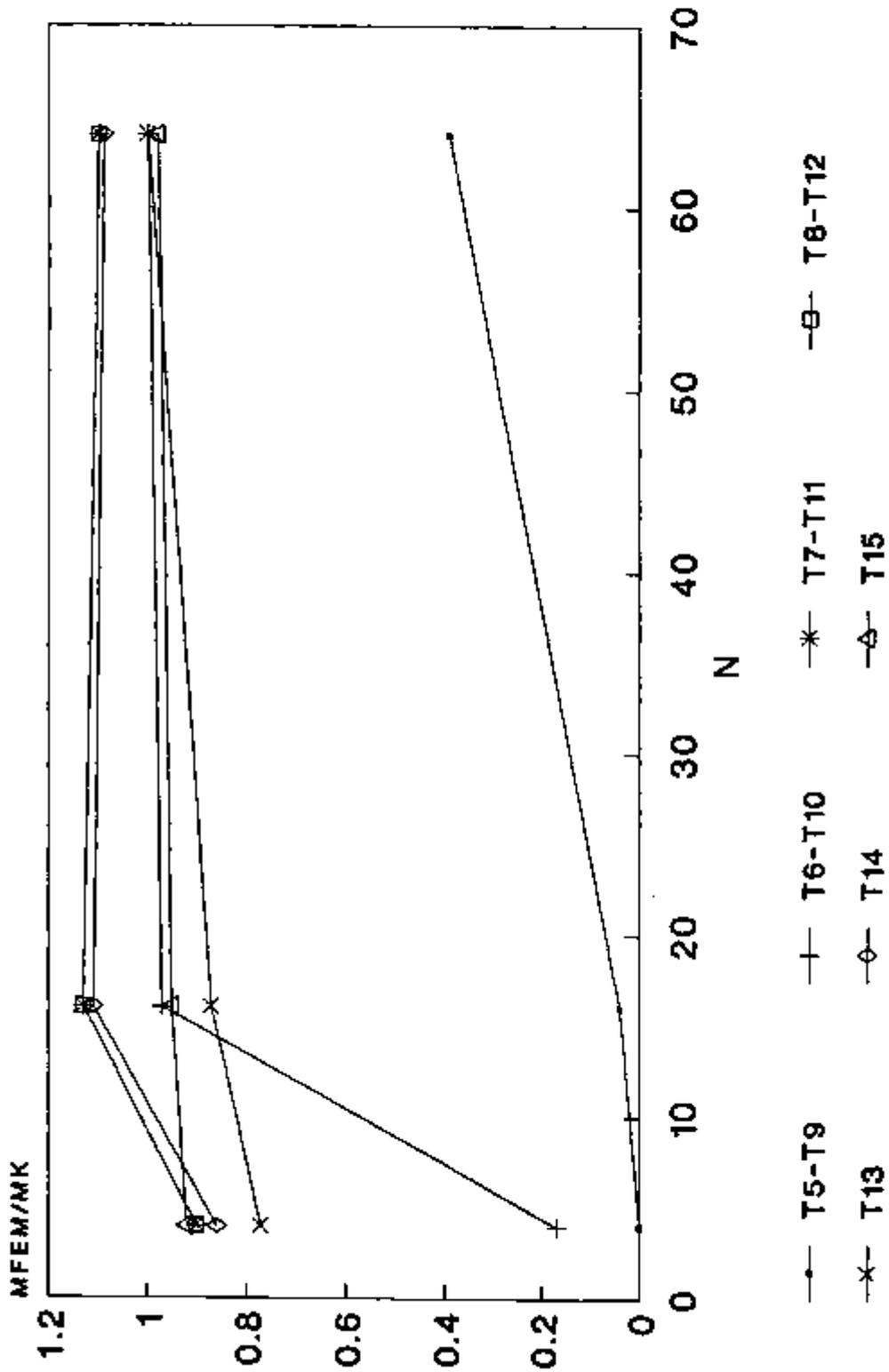
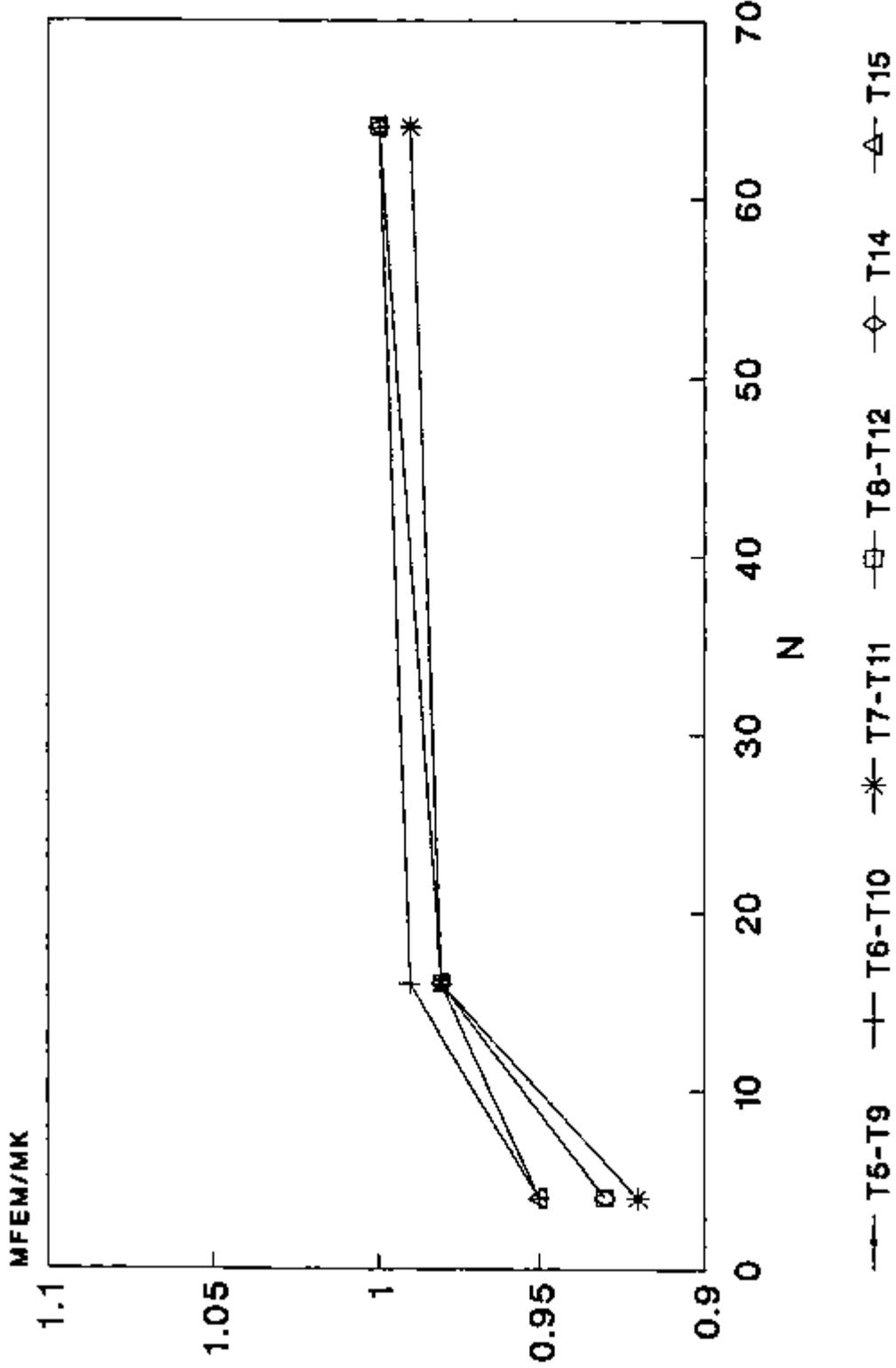


Figura 3.21

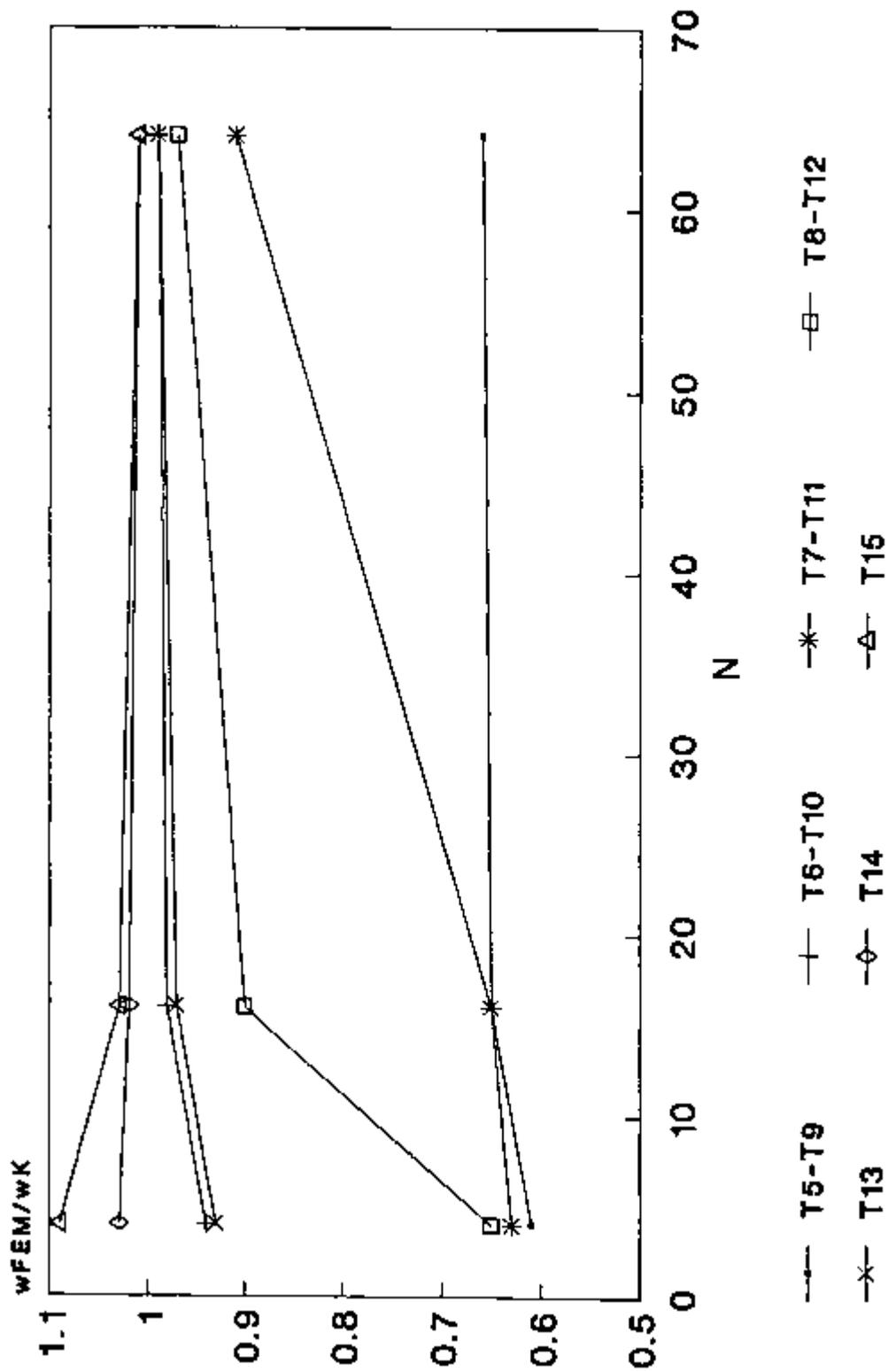
PLACA QUADRADA FINA SIMPLEMENTE APOIADA
 Carregamento uniforme-L/t = 100 - $\mu = 0,3$
 Momento no centro da placa



malha C

Figura 3.22

PLACA QUADRADA FINA ENGASTADA - $L/t=100$
 Carga concentrada no centro - $\mu = 0,3$
 Deslocamento no centro da placa



malha A

PLACA QUADRADA FINA ENGASTADA - $L/t=100$
 Carga concentrada no centro - $\mu=0.3$
 Deslocamento no centro da placa

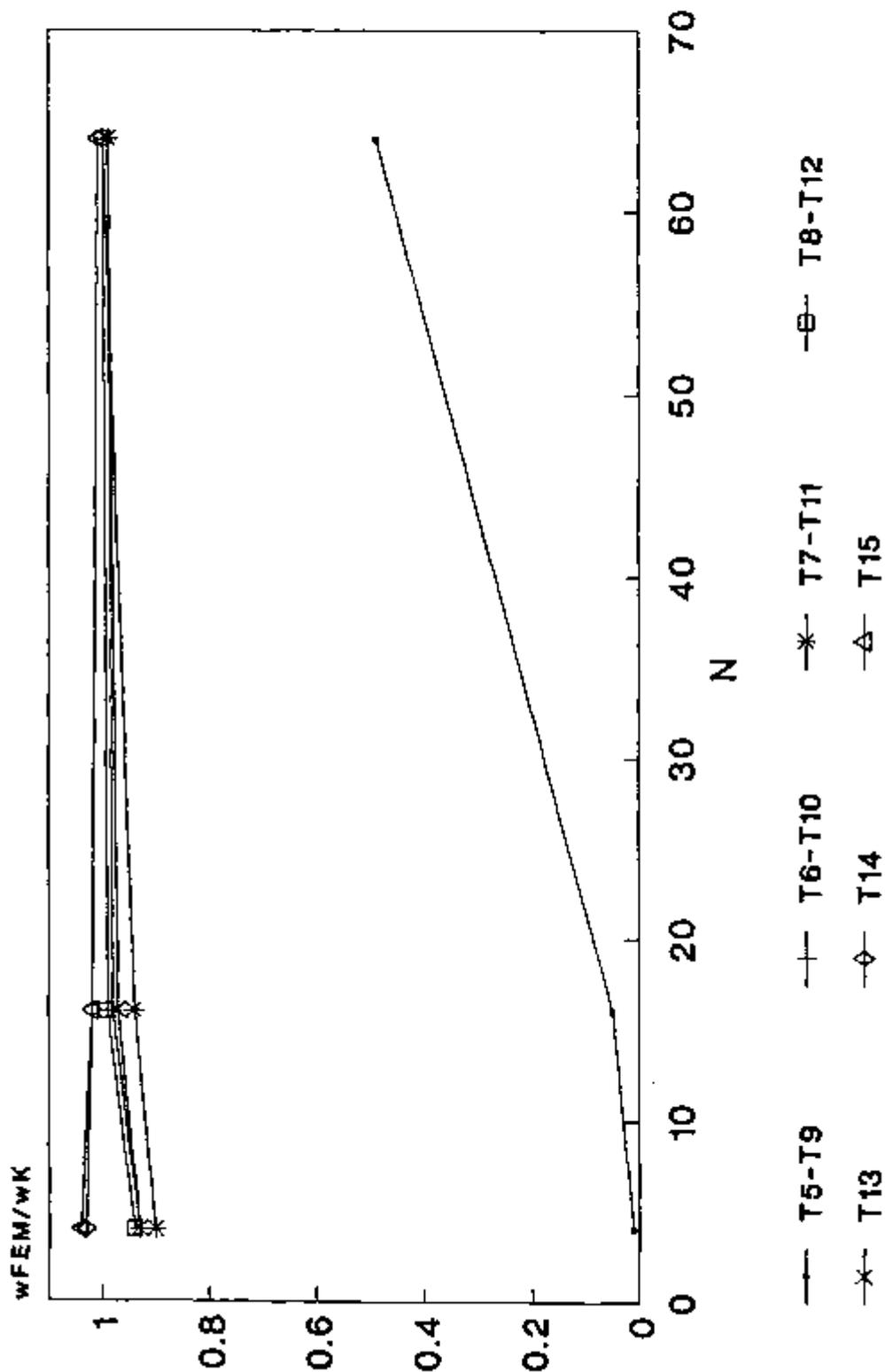
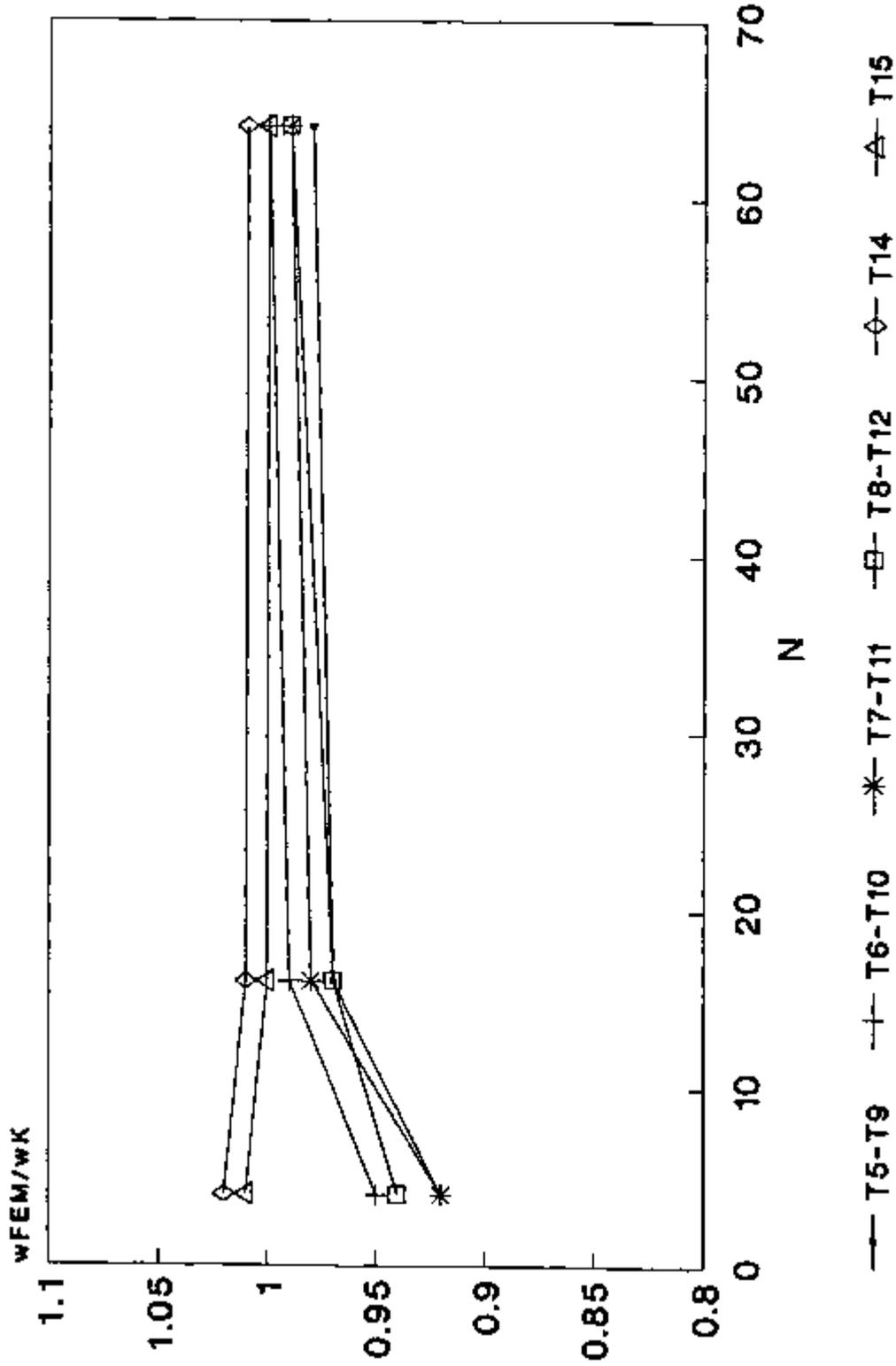


Figura 3.23

matha B

Figura 3.24

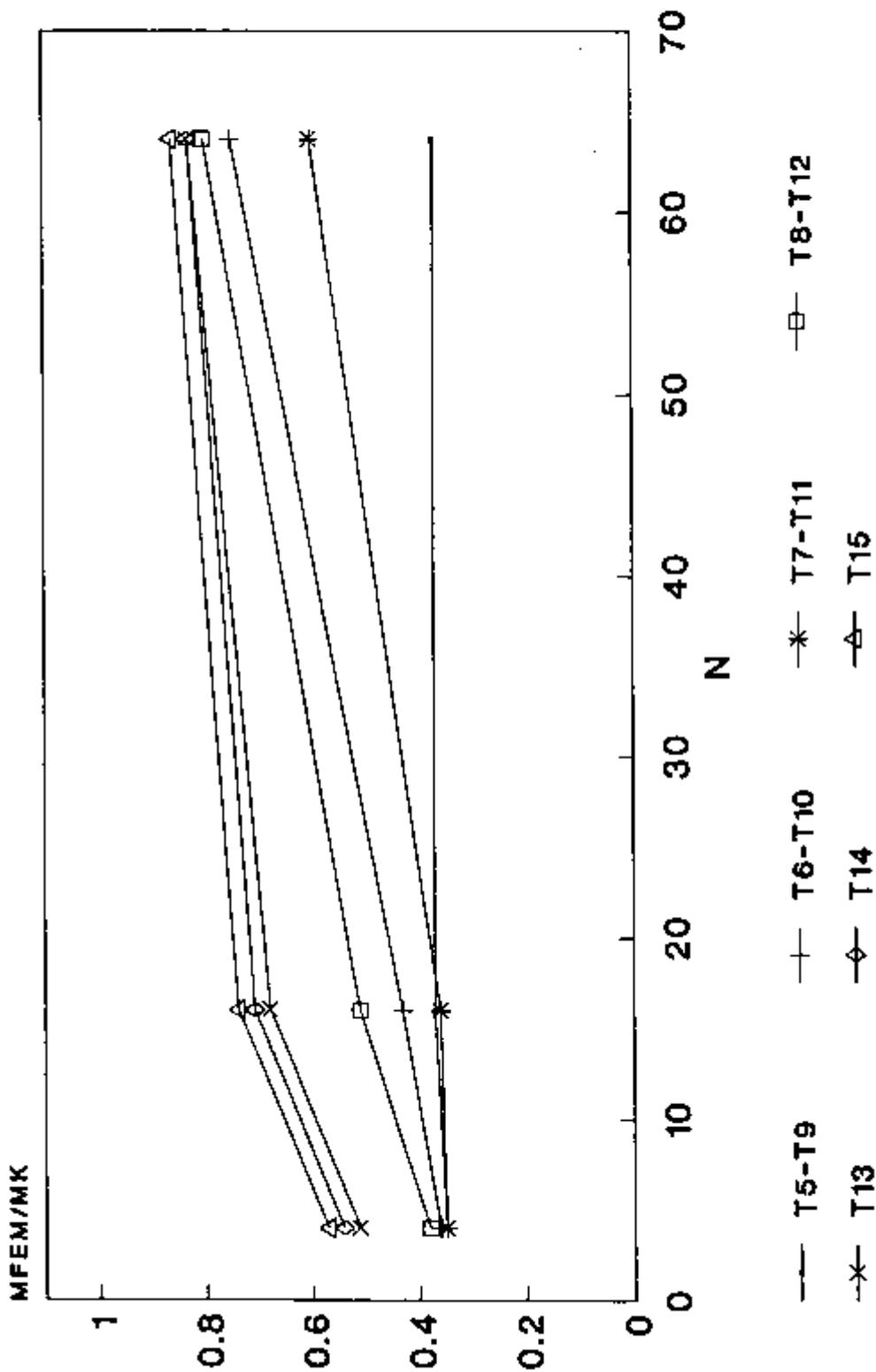
PLACA QUADRADA FINA ENGASTADA - L/l=100
 Carga concentrada no centro - $\mu = 0,3$
 Deslocamento no centro da placa



malha C

Figura 3.25

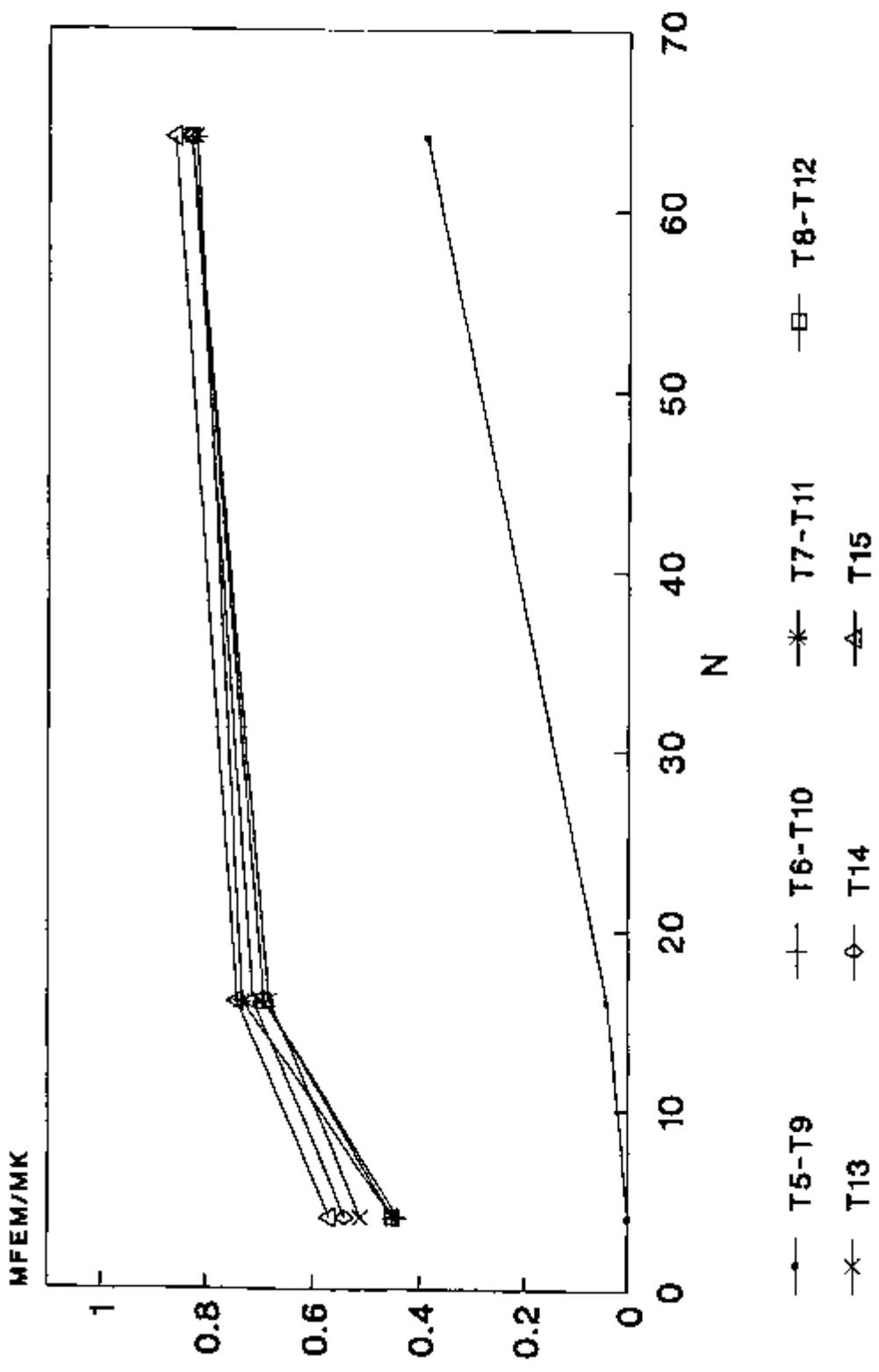
PLACA QUADRADA FINA ENGASTADA - $L/t=100$
 Carga concentrada no centro $\mu=0,3$
 Reação no centro da lado da placa



malha A

Figura 3.26

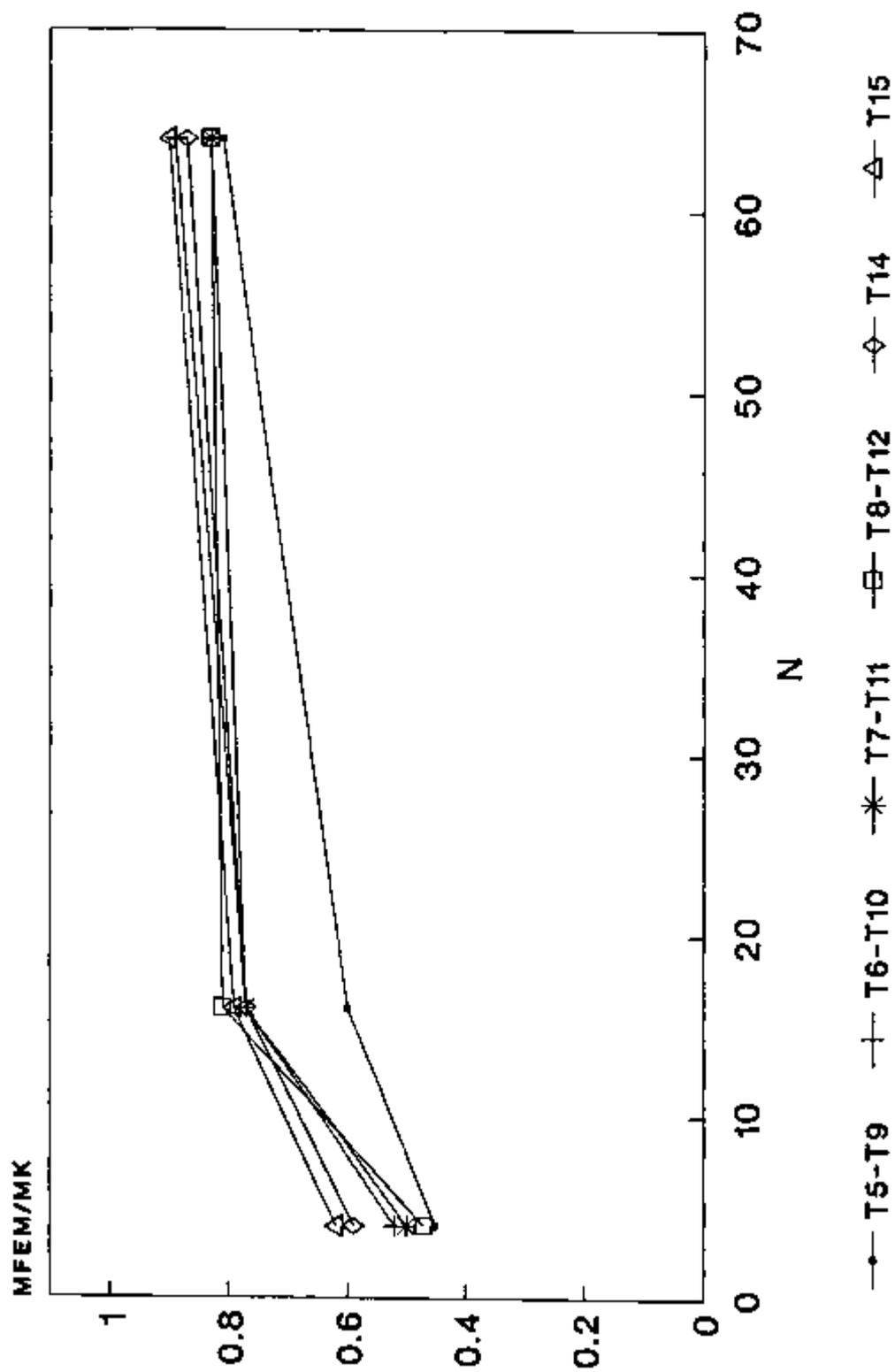
PLACA QUADRADA FINA ENGASTADA - $L/t=100$
 Carga concentrada no centro - $\mu = 0,3$
 Reação no centro da placa



malha 8

Figura 3.27

PLACA QUADRADA FINA ENGASTADA - L/t=100
 Carga concentrada no centro - $\mu=0,3$
 Reação no centro da lado da placa



malha C

3.9.4 - TESTE DE TORÇÃO

Este é um teste para verificar elementos de placa triangulares em malhas com poucos elementos (dois ou quatro) bastante distorcidos.

Foram utilizados somente os elementos T5 a T12 e T15 nestes testes. A geometria, carregamentos, discretização, o padrão de comparação ("benchmark" [15]) e os resultados são mostrados nas Figuras 3.28 a 3.33 que dão a variação do deslocamento de um vértice da extremidade livre da placa em função do comprimento da placa engastada.

TESTE DE TORÇÃO

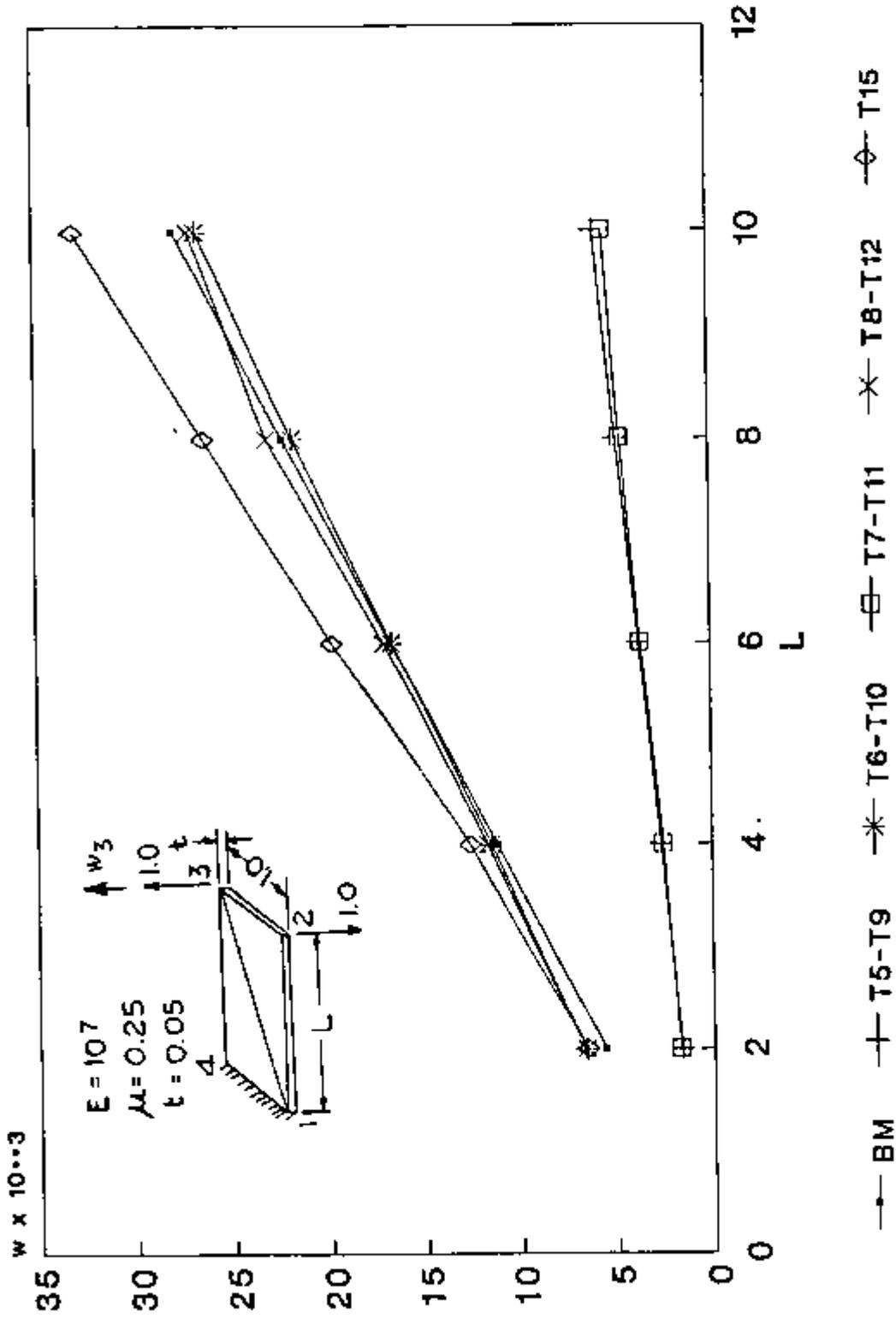
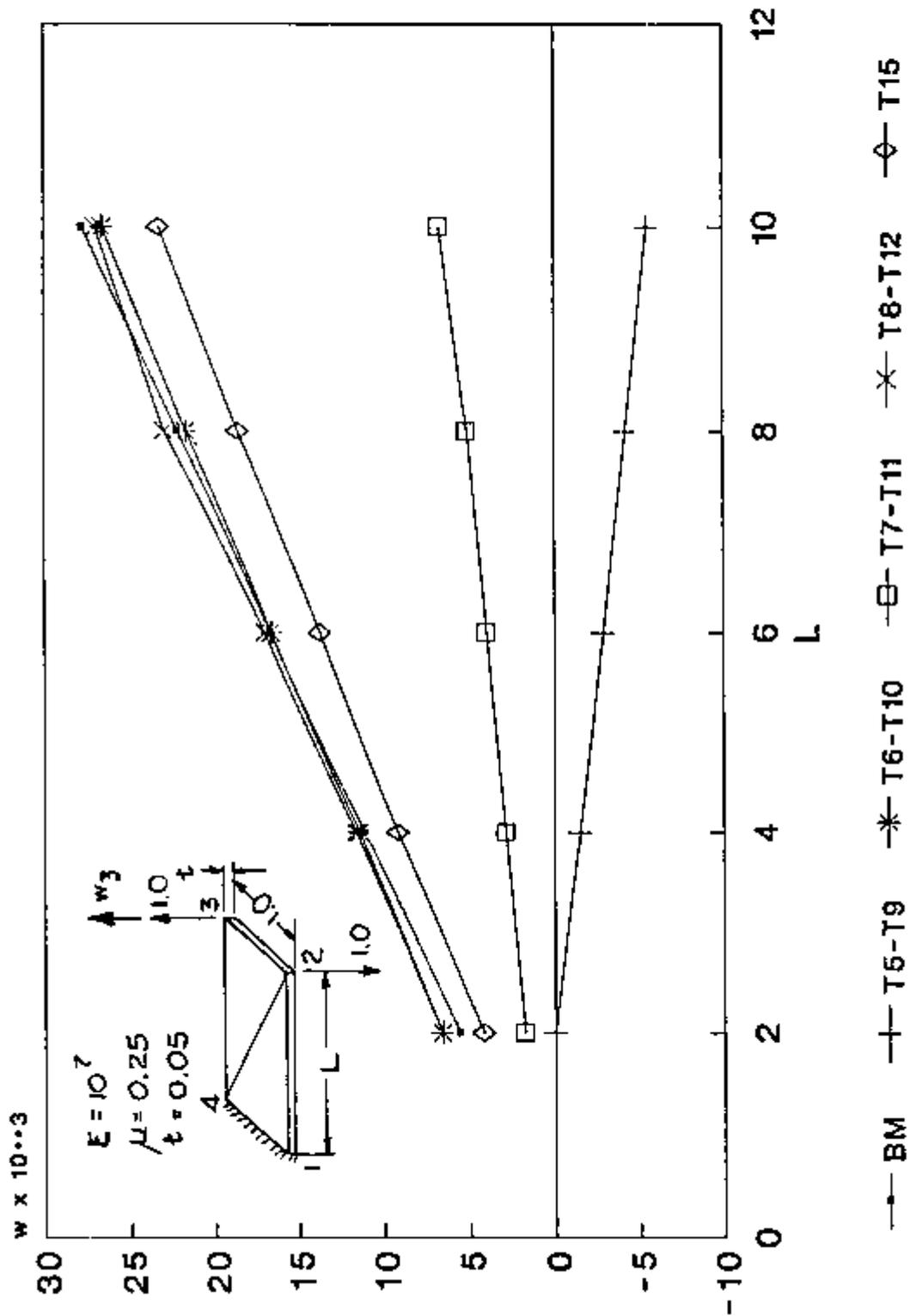


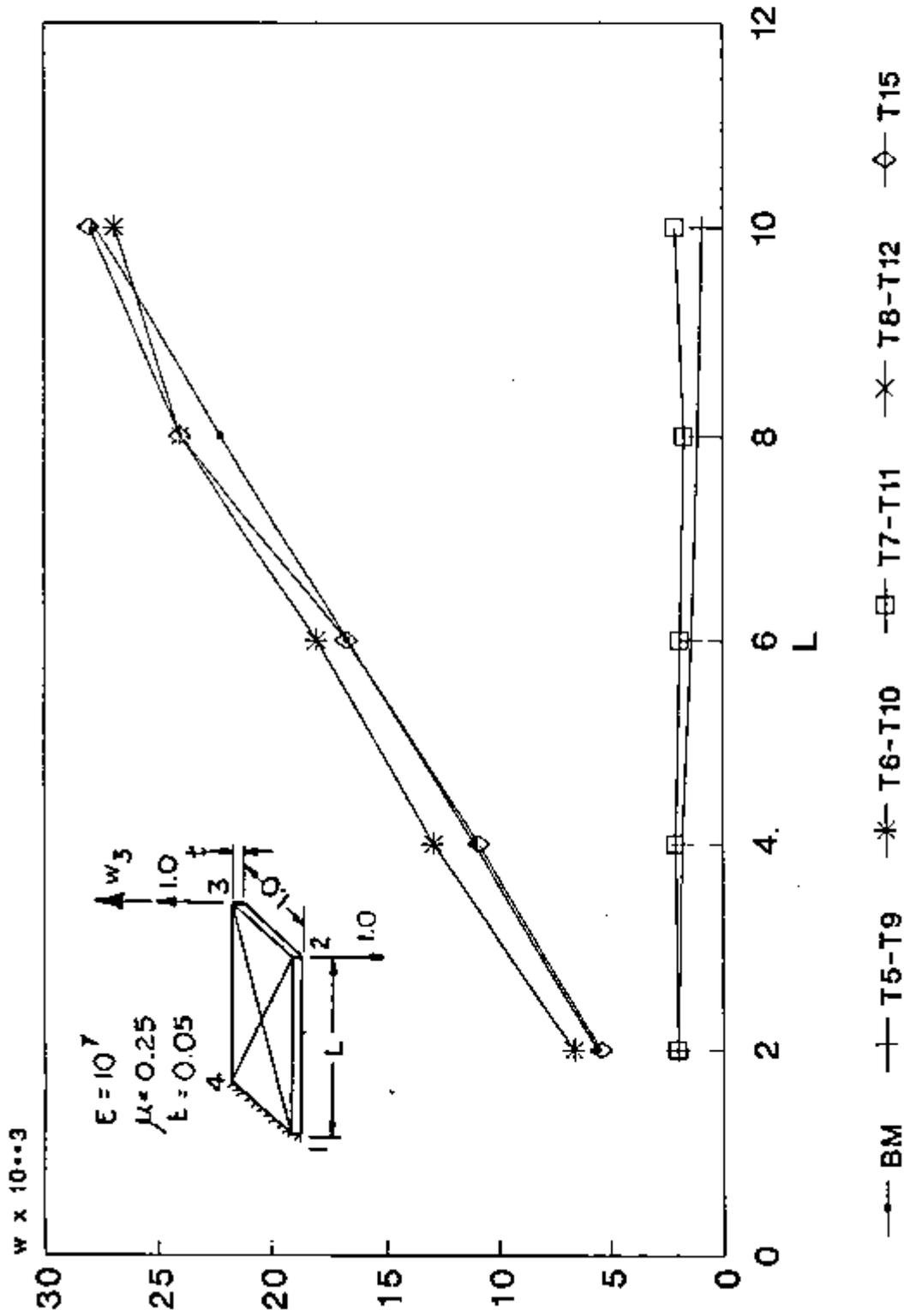
Figura 3.28

TESTE DE TORÇÃO

Figura 3.29



TESTE DE TORÇÃO



malha C

Figura 3.31

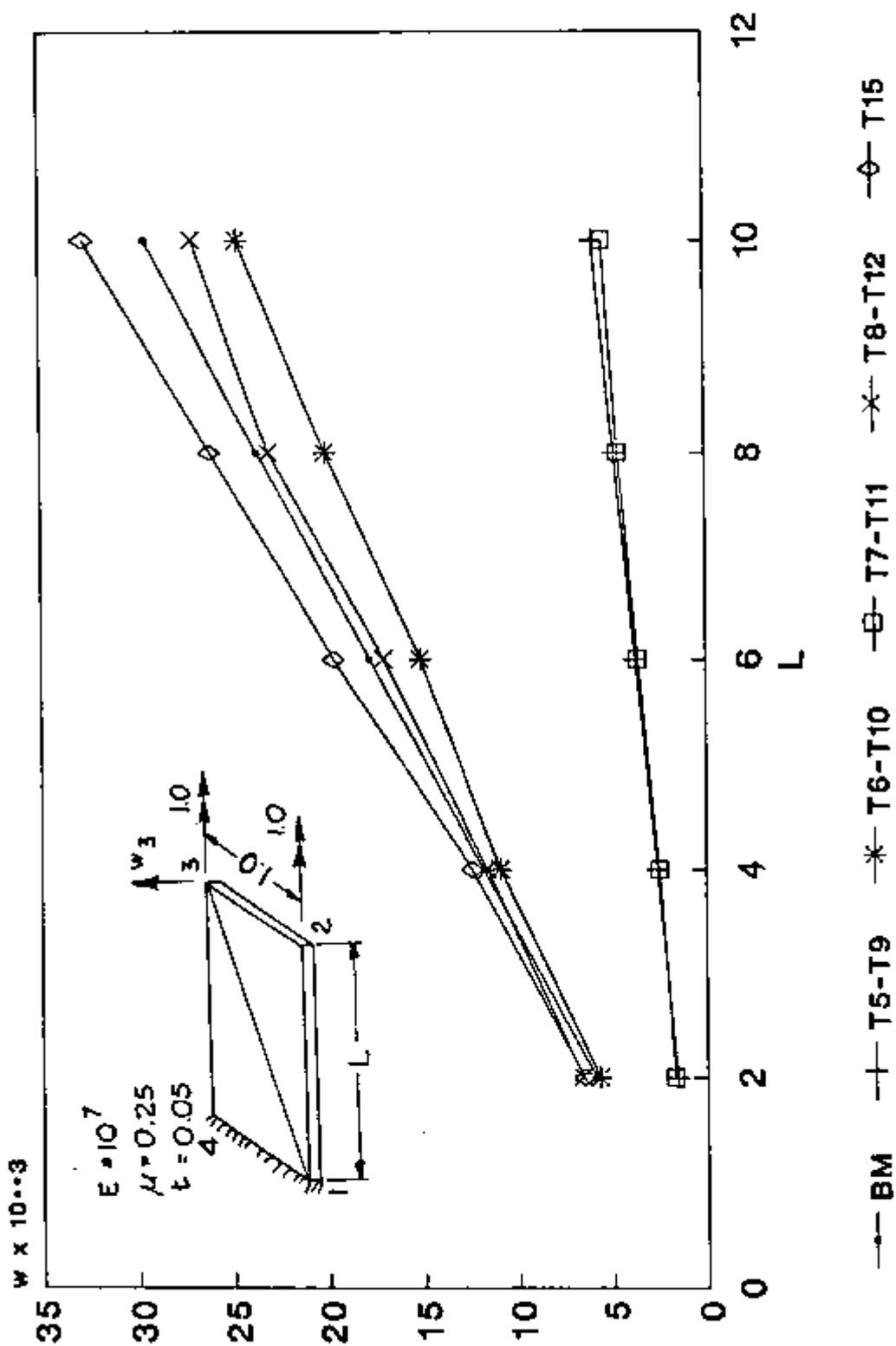
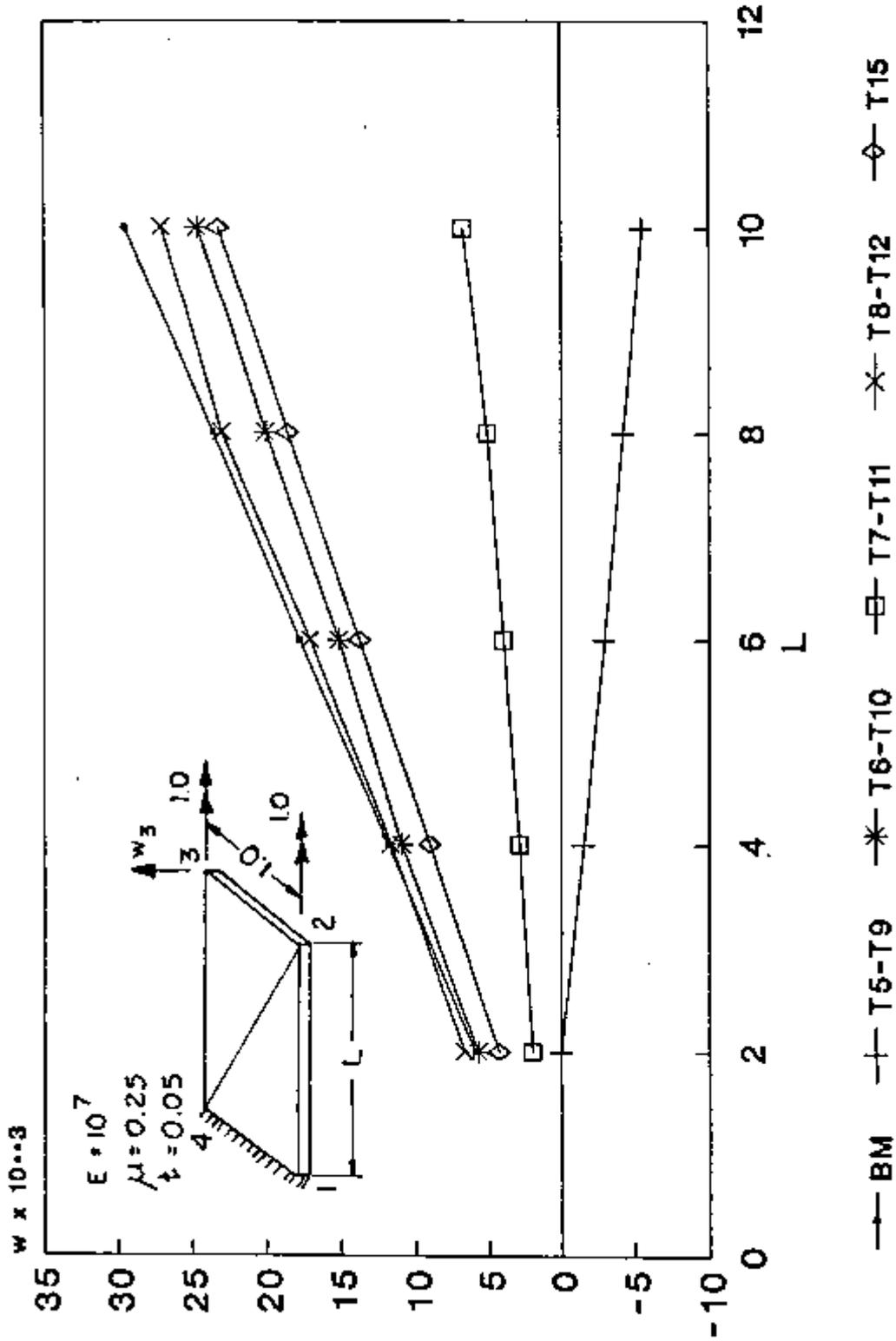


Figura 3.32

TESTE DE TORÇÃO
momento



maíha B

TESTE DE TORÇÃO

momento

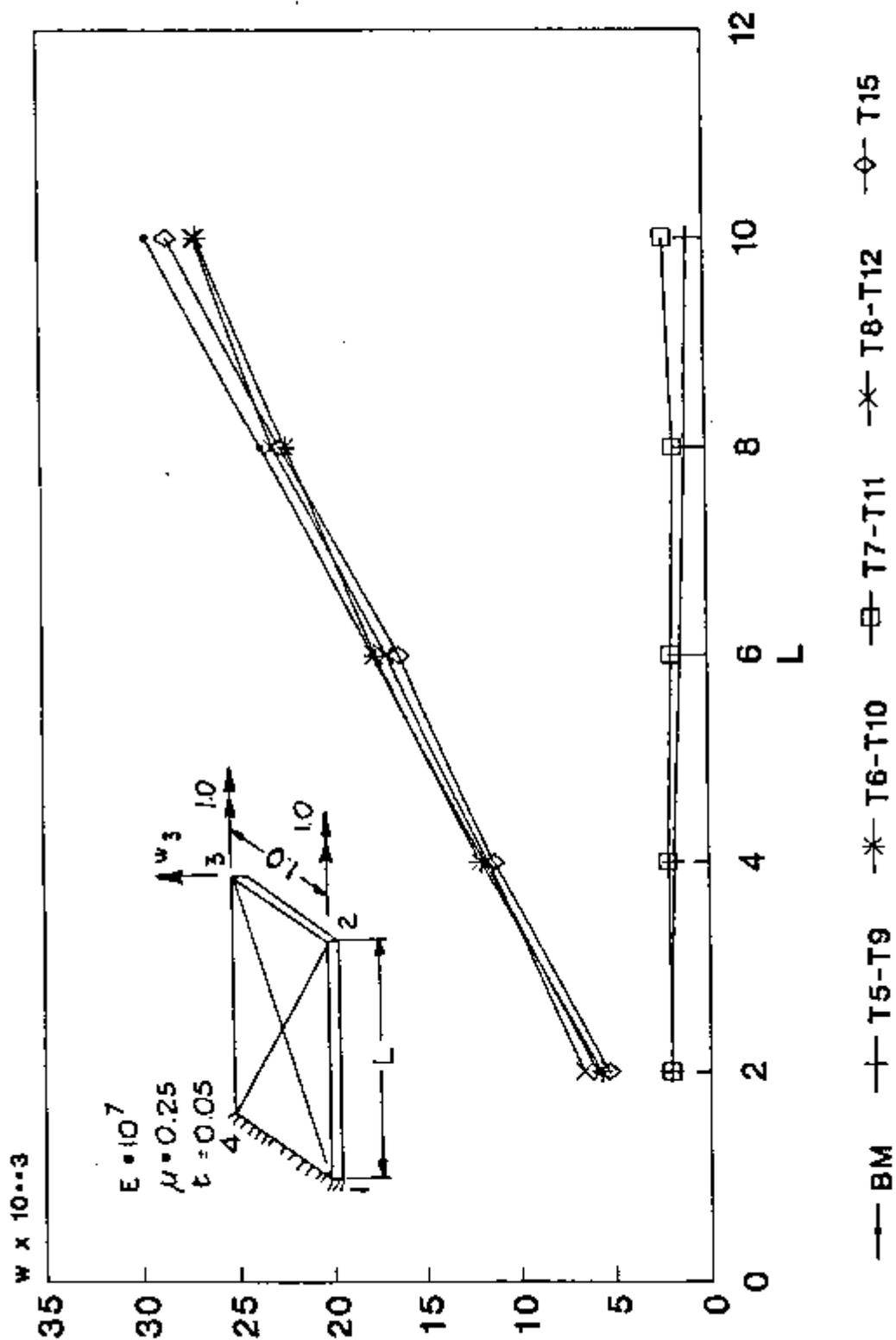


Figura 3.33

4 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

(1) O elemento T15 é aplicável somente a placas finas, como foi dito anteriormente, e de acordo com [1],[15] apresenta bons resultados em problemas deste tipo. Os autovalores obtidos de suas matrizes de rigidez servirão de base, portanto, para a comparação com os autovalores obtidos dos outros elementos nos casos de espessuras finas ($t=0,1$ e $0,001$). Sua inadequação a problemas com placas espessas pode ser vista pelos autovalores das Tabelas 3.1, 3.4 e 3.7 onde os seus valores de rigidez são bem grandes. Além disso, o campo de deslocamentos w não é definido no interior deste elemento dificultando a formulação da matriz de rigidez geométrica, por exemplo.

(2) Os elementos com integração reduzida da parcela de cisalhamento são aplicáveis somente a problemas de placas finas.

(3) Os elementos T1, T2, T3, T4, T5, T7, T9 e T11 apresentam o problema de travamento por cisalhamento ("shear locking") se forem aplicados a problemas de placas finas. Os autovalores de ordem 8 e 9 destes elementos são sempre bem maiores que os do elemento T15 para $t=0,1$ e $0,001$.

(4) Os elementos T1 a T4 apresentam o problema de travamento por cisalhamento em todas as situações. A explicação para isto é que pela simplicidade de suas formulações (funções de interpolação lineares para o deslocamento w e as rotações θ_x e θ_y) não se consegue o desacoplamento entre os modos de flexão e de cisalhamento nem com a integração reduzida da parcela de cisalhamento da matriz de rigidez. Nestes casos, como já foi mencionado, a utilização dos fatores de ajuste não traz melhorias pois pelo menos um tipo de travamento por cisalhamento se mantém.

(5) Os elementos T7 e T11 apresentam um grau menor de travamento que os elementos T5 e T9 porque, também, para os últimos os autovalores de ordem 7 são bem maiores que os do T15 nas espessuras mencionadas.

(6) Comparando o desenvolvimento dos elementos de placa e de viga C^0 nota-se que ocorrem nos primeiros os dois tipos de travamento mencionados para os segundos. Para os elementos de placa formulados com funções de interpolação lineares para o deslocamento w e as rotações θ_x e θ_y não se consegue,

no entanto, com a integração reduzida da parcela de cisalhamento da matriz de rigidez eliminar o travamento por cisalhamento causado pelo acoplamento dos modos de flexão e de cisalhamento como para os elementos de viga. É necessário utilizar, no mínimo, a interpolação mista dos campos de deformação por flexão e por cisalhamento para obter o desacoplamento mencionado.

Com a eliminação do primeiro tipo de travamento ainda assim é fundamental a aplicação dos fatores de ajuste para eliminar o segundo tipo, do mesmo modo que para os elementos de viga. Infelizmente para os elementos de placa os fatores de ajuste não podem ser obtidos diretamente da formulação, como para os elementos de viga.

(7) Todos os elementos que tem integração reduzida da parcela de cisalhamento da matriz de rigidez apresentam modos cinemáticos de deformação porque possuem autovalores nulos em número superior aos três modos de corpo rígido. O comportamento do elemento T14 depende de sua geometria havendo um autovalor nulo a mais quando o triângulo for retângulo (um ângulo interno de noventa graus) e um autovalor espúrio (negativo) com geometrias onde houver ângulos internos do triângulo maiores que noventa graus, sem modos cinemáticos de deformação quando os três ângulos internos do elemento forem menores que noventa graus.

O fato do elemento ter modos cinemáticos de deformação é um aspecto potencialmente inconveniente. No caso dos elementos simples como os triangulares isto não é problemático porque em malhas com dois ou mais elementos os efeitos desta ocorrência são eliminados [16].

Um aspecto importante a ser mencionado é que para os elementos T7, T8, T11 e T12 a integração reduzida da matriz de rigidez de cisalhamento não traz nenhum benefício porque não é ela que produz o desacoplamento entre modos de flexão e de cisalhamento (que é causa de um tipo de travamento), obtido pela própria formulação destes elementos, além de não eliminar o segundo tipo, o que se consegue somente com a aplicação dos fatores de ajuste (desde que haja o desacoplamento mencionado).

(8) O desempenho dos elementos T13 e T14 têm uma dependência muito grande das suas geometrias. O elemento T13 é aplicável somente a problemas de placas finas em malhas com triângulos retângulos, somente, e com os catetos paralelos aos eixos X e Y. O elemento T14 apresenta resultados aceitáveis somente quando seus ângulos internos forem menores ou iguais a noventa graus. Sua melhor configuração é a de um triângulo equilátero, e ele falha

completamente quando houver ângulos internos maiores que noventa graus.

Estes fatos indicam que deverá haver um controle das malhas nas análises feitas com eles, causando dificuldades adicionais para o usuário ou para o desenvolvimento de pós-processadores, principalmente no caso de sua utilização de problemas com cascas.

(9) Os elementos apresentados nos itens 3.5 e 3.6 (chamados T5 a T12 no item 3.9) tem como característica semelhante na formulação a utilização da interpolação mista das componentes do tensor das deformações com as deformações por cisalhamento calculadas a partir das interpolações dos deslocamentos e as deformações por cisalhamento a partir de vínculos impostos em pontos escolhidos dos elementos.

As opções para os esquemas de interpolação das deformações por cisalhamento se restringem quanto mais simples se tornam os elementos. No caso dos elementos triangulares esta semelhança (por que não dizer, identidade) foi constatada em [23] e só não ocorreu entre os elementos dos itens 3.5 e 3.6 porque não se conseguiu eliminar o efeito da integração numérica da degeneração do elemento para três nós, já que ele é formulado com quatro nós. Nas Tabelas 3.1 a 3.3, onde os elementos são triângulos equiláteros, todos os autovalores são bem próximos para os elementos T5, T6, T7 e T8 quando comparados com T9, T10, T11 e T12, respectivamente. Nos outros casos, Tabelas 3.4 a 3.9, há maior diferença entre os autovalores mencionados por que o efeito da degeneração fica mais acentuado quanto mais esconso fica o elemento.

Para elementos de quatro nós, que também são simples, foi notada em [16] semelhança entre os elementos descritos em [5], [18] e [19], concebidos com abordagens distintas e independentes. Mais ainda, foi citado em [16] um erro na formulação de [5], utilizada no item 3.6, que não foi identificado neste trabalho.

Com o aumento da complexidade na formulação dos elementos com esta abordagem (por exemplo, elementos quadriláteros com oito nós) haverá possibilidades de vários tipos de elementos dependendo das hipóteses de interpolação das deformações por cisalhamento bem como pelas possibilidades diferentes de integração numérica ao longo da espessura no caso de cascas.

(10) Os elementos T6 e T10 com fatores de ajuste $c/(1+c)$ apresentam bons resultados nos casos analisados, tendo boa taxa de convergência nos problemas de placas quadradas e não sendo sensíveis à distorção nas suas formas nos problemas de

placas sob torção, apresentando desempenho semelhante ao do T15.

(11) Considerando somente os elementos descritos em 3.5 e 3.6 e os comentários feitos sobre sua semelhança, os primeiros têm vantagens sobre os segundos pelos seguintes motivos :

(a) a formulação é mais clara e simples

(b) suas matrizes de rigidez são definidas de forma explícita, sem integração numérica

(c) a formulação pode ser feita diretamente para triângulos sem a necessidade de degeneração de quadriláteros

(d) não há dúvidas sobre a formulação como as mencionadas em [16]

(12) Das comparações feitas e dos resultados obtidos, observando os critérios dados no item 1 considera-se o elemento triangular desenvolvido no item 3.5, com integração exata de K_r e de K_c e com o fator $c/(1+c)$ multiplicando K_c como o melhor para se prosseguir visando a aplicação em problemas não lineares de cascas/placas finas e moderadamente espessas. A maior dificuldade é a utilização dos fatores de ajuste do tipo $c/(1+c)$ aplicados em K_c , sobre os quais deve-se mencionar que:

(a) Para análises lineares, estáticas e dinâmicas, não há inconvenientes para a aplicação destes fatores de ajuste [13].

(b) Para análises com não linearidades geométricas há boas possibilidades do emprego destes fatores de ajuste, não havendo referências que as comprovem ainda.

(c) Com não linearidades dos materiais as complicações são maiores dificultando até mesmo previsões sobre a extensão destes fatores para este tipo de problemas.

4.1 - SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO

Como sugestões para a continuidade do trabalho pode-se mencionar :

- (a) Avaliação do elemento escolhido em problemas de placas moderadamente espessas ou em análises dinâmicas
- (b) Aplicação do elemento de placa escolhido em cascas por meio da superposição mencionada em utilizando o CST [33], por exemplo.
- (c) Estudo do elemento de casca/placa escolhido em problemas com não linearidades geométricas.
- (d) Estudo para utilização do elemento de casca/placa escolhido em problemas com não linearidades dos materiais.
- (e) Estudo dos elementos quadriláteros baseados na formulação com interpolação mista.

5. - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BATOZ, J.-L.; BATHE, K.-J.; WONG, L.-H. A study of three-node triangular plate bending elements. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 15:1771-1812, 1980.
- [2] ARGYRIS, J. H.; HAASE, M.; MLEJNEK, H. P. Some considerations on the natural approach. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 30(3):335-346, 1982.
- [3] ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C.; MALEJANNAKIS, G. A.; SCHELKE, E. A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 10:371-403, 1977 continued 11:97-131, 1977.
- [4] ARGYRIS, J. H.; BALMER, H.; KLEIBER, M.; HINDENLANG, U. Natural description of large inelastic deformation for shells of arbitrary shape - Application of TRUMP element. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 22:361-389, 1980.
- [5] BATHE, K.-J. & DVORKIN, E. N. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 21:367-383, 1985.
- [6] PRATHAP, G. A simple plate/shell triangle. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 21:1149-1156, 1985.
- [7] BELYTSCHKO, T.; STOLARSKI, H.; CARPENTER, N. A C^0 triangular plate element with one-point quadrature. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 20:797-802, 1984.
- [8] FRIED, I.; JOHNSON, A.; TESSLER, A. Minimal-degree thin triangular plate and shell bending finite elements of order two and four. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 56: 283-307, 1986.
- [9] FRICKER, A. J. A simple method for including shear deformations in thin plate elements. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 23:1355-1366, 1986.
- [10] FRIED, I. & YANG, S. K. Triangular nine-degrees-of-freedom, C^0 plate bending element of quadratic accuracy. Quarterly Of Applied Mathematics, :302-312, 1973.

- [11] ROBINSON, J. An evaluation of skew sensitivity of thirty three plate bending elements in nineteen FEM programs. Nuclear Engineering And Design, 90:67-85, 1985.
- [12] GARNET, H.; CROUZET-PASCAL, J.; PIFKO, A. B. Aspects of a simple triangular plate bending finite element. Computers & Structures, 12(6):783-789, 1980.
- [13] CARPENTER, N.; BELYTSCHKO, T.; STOLARSKI, H. Locking and shear factors in C^0 bending elements. Computers & Structures, 22(1):39-52, 1986.
- [14] TESSLER, A. & HUGHES, T. J. R. A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 50:71-101, 1985.
- [15] BATOZ, J.-L. An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 18:1077-1089, 1982.
- [16] HUGHES, T. J. R. The finite element method, 1 ed., Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1987.
- [17] MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic, elastic plates. ASME Journal Of Applied Mechanics, 18:31-38, 1951.
- [18] TESSLER, A. & HUGHES, T. J. R. An improved treatment of transverse shear in the Mindlin-type four-node quadrilateral element. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 38:311-335, 1983.
- [19] HUGHES, T. J. R. & TEZDUYAR, T. E. Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. ASME Journal Of Applied Mechanics, 48:587-596, 1981.
- [20] HUGHES, T. J. R.; COHEN, M.; HAROUN, M. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. Nuclear Engineering And Design, 46:203-222, 1978.
- [21] JOSEPH, K. T. & RAO, K. S. A fast algorithm for triangular plate bending element. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 14:1100-1104, 1979.
- [22] HUGHES, T. J. R. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 15:1412-1418, 1980.
- [23] MATTAR NETO, M. & PIMENTA, P. M. Comparação entre elementos de placa triangulares baseados na teoria de

Mindlin. In: Anais do 1. Congresso Geral de Energia Nuclear, Vol. 1, pag. 272-275, Rio de Janeiro, 17 a 20/Mar./1986.

[24] REISSNER, E. The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates. ASME Journal Of Applied Mechanics, 67: , 1945.

[25] MALKUS, D. S. & HUGHES, T. J. R. Mixed finite elements - Reduced and selective integration techniques : a unification of concepts. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 15:63-81, 1978.

[26] RAMM, E. & STEGMULLER, H. The displacement finite element method in nonlinear buckling analysis of shells. In: RAMM, E., ed. Buckling of shells, 1. ed., Berlin, Springer, 1982, pag. 201-235.

[27] ARGYRIS, J. H.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J. St.; DUNNE, P. C.; HAASE, M.; MLEJNEK, H.-P.; MULLER, M.; SCHARPF, D. W. Finite element method - The natural approach. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 17/18:1-106, 1979.

[28] PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of matrix structural analysis, 1. ed., New York, McGraw-Hill, 1967.

[29] BATHE, K.-J.; DVORKIN, E. N.; HO, L.-W. Our discrete Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis - An assessment. Computers & Structures, 16:89-98, 1983.

[30] GERE, J. M. & WEAVER JR., W. Análise de estruturas reticuladas, 1. ed., Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1981.

[31] TIMOSHENKO, S. P. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells, 2nd ed., Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, sem data.

[32] PIMENTA, P. M. Análise não-linear de treliças espaciais. Boletim Técnico n. BT/PEF-8604, Escola Politécnica da USP, Departamento de Estruturas e Fundações, São Paulo, 1986.

[33] ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method, 3rd ed., London, McGraw-Hill, 1977.

[34] BATHE, K.-J. Finite element procedures in engineering analysis, 1st ed., Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1982.

[35] BERGAN, P. G. & FELLIPA, C. A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 50:25-69, 1985.

[36] BATHE, K.-J. & HO, L.-W. A simple and effective element for analysis of shell structures. Computers & Structures, 13:673-681, 1981.

[37] IRONS, B. M. & RAZZAQUE, A. Experience with the patch test for convergence of finite element method. In: AZIZ, A. R., Mathematical foundations of the finite element method, Academic Press, 1972, pag. 557-587.