



**CNEN/SP**

**ipen** Instituto de Pesquisas  
Energéticas e Nucleares

AUTARQUIA ASSOCIADA A UNIVERSIDADE  
DE SÃO PAULO

# **DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO DE SINAIS BASEADA NA ANÁLISE SEQUENCIAL E NO FILTRO KALMAN EXTENDIDO**

**EDUARDO OLIVEIRA ASSUMPÇÃO FILHO**

**Dissertação apresentada como parte  
dos requisitos para obtenção do Grau  
de Mestre em Ciências na Área de  
Tecnologia Nuclear.**

**Orientador:  
Dr. Horácio Nakata**

**São Paulo  
1993**

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES  
AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO DE SINAIS  
BASEADA NA ANÁLISE SEQUENCIAL E NO FILTRO KALMAN EXTENDIDO

EDUARDO OLIVEIRA ASSUMPÇÃO FILHO



Dissertação apresentada como  
parte dos requisitos para obtenção  
do grau de Mestre em Tecnologia  
Nuclear.

orientador: Dr. Horácio Nakata

São Paulo

1993

COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR/SP - IPEN

## AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, IPEN/CNEN-SP, e a Coordenadoria para Projetos Especiais, COPESP, pela cesão de suas instalações

Agradecimento especial ao Dr. Horácio Nakata pela dedicação e paciência, sem as quais este trabalho não seria realizado

Aos amigos Rosane, Karla, Nelson, Ricardo e Joaquim que sempre incentivaram o término deste trabalho

DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO DE  
SINAIS BASEADA NA ANÁLISE SEQUENCIAL E NO FILTRO  
KALMAN EXTENDIDO

EDUARDO OLIVEIRA ASSUMPÇÃO FILHO

RESUMO

A operação segura de plantas nucleares está ligada a precisão e confiabilidade dos sinais provenientes do sistema de monitoração e controle da mesma. Este sistema é composto de sensores instalados em vários locais da planta e os sinais deles provenientes estão sujeitos a ruídos e falhas que porventura venham ocorrer durante seu funcionamento.

Neste trabalho foi estudada uma metodologia de validação de sinais a fim de que os requisitos de segurança sejam satisfeitos. Este estudo foi baseado na análise sequencial e na estimação ótima de Kalman.

A análise sequencial, através do teste sequencial de razão de probabilidade, foi estudada em uma situação onde há a redundância de instrumentação e foi desenvolvido um simulador de um sistema de detecção de falhas, que foi testado contra resultados de experiências em túnel de vento com 3 termopares redundantes, mostrando sua praticidade, economia e facilidade de implementação.

Para situações em que não haja redundância de instrumentação, utilizamos a análise da inovação do filtro de estimação ótima, através da utilização de um modelo simples de pressurizador de um reator PWR e com a utilização de filtro Kalman extendido. Os testes foram realizados contra simulação de falhas mais frequentemente ocorrentes na prática e demonstrou sua viabilidade para uma possível utilização prática para detecção e isolamento de falhas.

FAILURE DETECTION AND ISOLATION METHODOLOGY BASED  
ON THE SEQUENTIAL ANALYSIS AND EXTENDED KALMAN  
FILTER TECHNIQUE

EDUARDO OLIVEIRA ASSUMPÇÃO FILHO

ABSTRACT

A nuclear power plant operation relies on accurate and precise response of the monitoring system in order to assure a safety operational standard during the most predictable operational transients. The signal from the sensor are in general contaminated with noise and also with the randomic fluctuations making a precise plant assessment uncertain, thus with the possibility of erroneous operator decision or even with the false alarm actuation. In practice the noisy environment could even overcome the sensor malfunction misreading the plant operational status.

In the present work a new failure detection and isolation (FDI) algorithm has been developed based on the sequential analysis and extended Kalman filter residue monitorin. The present methodology was been applied to both highly redundant monitoring systems and to nonredundant systems where high signal reliability is required.

The sequential analysis technique has been applied in a wind-tunnel experiment with three redundant temperature sensors. The test results showed a good failure detection and isolation capability with the low false alarm rate.

In case of nonredundant systems the extended Kalman filter residue monitoring algorithm has been applied. The algorithm has been tested in a simplified pressurizer model by comparing against numerical simulation data. The failure detection

and isolation test has been performed by simulating the most representative failure types, the results showing the method's viability as a candidate for practical implementation.

## ÍNDICE

	Pág.
1 – Introdução Geral	
1.1 – Descrição do Problema	1
1.2 – Histórico	3
1.3 – Objetivo	10
2 – Introdução Teórica	
2.1 – Aspectos Gerais	11
2.2 – Teoria de Probabilidades	12
2.3 – Estimação em Modelos Lineares Gaussianos	22
2.4 – Processos Estocásticos	24
2.5 – Filtro Kalman Linear	34
2.6 – Filtro Kalman Extendido	43
2.7 – Análise Sequencial	48
3 – Desenvolvimento de Metodologias de Detecção de Falhas	
3.1 – Análise Sequencial de Razão de Probabilidade	53
3.2 – Análise da Inovação do Filtro de Estimação Ótima	56
3.3 – Modelagem do Sistema a Ser Monitorado	58
4 – Resultados da Experiência Numérica	
4.1 – Testes com Análise Sequencial de Razão de Probabilidades	66
4.2 – Testes com Análise da Inovação do Filtro de Kalman	70
5 – Conclusão	95
Apêndice I – Parâmetros do pressurizador do LOFT	99

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 3.1 – Esquema simplificado do pressurizador	65
Figura 4.1a – Corte transversal do túnel de vento	76
Figura 4.1 – Gráfico de falhas simuladas X valor de delta	78
Figura 4.2 – Transiente L6-3	80
Figura 4.3 – Transiente L6-1 ( Nível )	81
Figura 4.4 – Transiente L6-1 ( Pressão )	81
Figura 4.5 – Transiente L6-1 ( Temperatura )	82
Figura 4.6 – Valor do Nível para Transiente de Média Intensidade	83
Figura 4.7 – Valor da Pressão para Transiente de Média Intensidade	83
Figura 4.8 – Valor da Temperatura para Transiente de Média Intensidade	84
Figura 4.9 – Valor da função L do nível em operação normal	85
Figura 4.10 – Valor da função L da pressão em operação normal	85
Figura 4.11 – Valor da função L da temperatura em operação normal	85
Figura 4.12 – Degrau no nível	86
Figura 4.13 – Degrau na pressão	86
Figura 4.14 – Degrau na temperatura	87
Figura 4.15 – Rampa no nível	88
Figura 4.16 – Rampa na pressão	88
Figura 4.17 – Rampa na temperatura	89
Figura 4.18 – Ruído no nível	90
Figura 4.19 – Ruído na pressão	90
Figura 4.20 – Ruído na temperatura	91
Figura 4.21 – Ruídos espúrios no nível	92

Figura 4.22 – Ruídos espúrios na pressão	92
Figura 4.23 – Ruídos espúrios na temperatura	93
Figura 4.24 – Valores das funções L para grandes Transientes	94

## LISTA DE TABELAS

	Pág.
Tabela 3.1 – Demonstrativo dos possíveis resultados no caso de 3 detetores redundantes	64
Tabela 4.1 – Resultados das falhas simuladas	77
Tabela 4.2 – Variação do número de indicações de falhas em função do parâmetro $\beta$	79
Tabela 4.3 – Indicação de falhas para pulsos espúrios	79

## CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO GERAL

### 1.1 – Introdução

Em estudos de sistemas físicos, deparamos com a necessidade de representar adequadamente os aspectos mais representativos do comportamento deste, procurando estabelecer as inter-relações entre algumas variáveis de interesse e os sinais de entrada e saída do sistema.

Através das ferramentas obtidas das teorias de sistemas e controle e dos modelos matemáticos descritos por estas, somos capazes de investigar a estrutura e o modo de resposta do sistema em questão.

O grande problema é que para a construção destes modelos temos apenas duas informações sobre o comportamento do sistema, o sinal de entrada e a sua resposta, e nenhum modelo deste tipo pode fornecer um total conhecimento do desempenho do sistema em questão, pois estas teorias são determinísticas e os modelos matemáticos não são perfeitos, representando apenas os modos dominantes ou críticos da resposta do sistema deixando de lado alguns modos que, se forem introduzidos, tornariam o modelo impossível para fins práticos.

Outro ponto que devemos ressaltar é que todo sistema dinâmico é dirigido não só pelo sinal de entrada fornecido por nós, mas também por perturbações que não podemos controlar nem modelar deterministicamente. Estas perturbações, chamadas ruído, são inerentes a qualquer sistema e podem até estar ligadas com o sinal de entrada, que pode não gerar exatamente a resposta desejada.

Além do que foi explicado acima, existe o fato de que os sensores utilizados nas medidas das variáveis de interesse não podem fornecer todas as informações que gostaríamos de ter: ou porque é impossível construir um sensor para a medida desejada, ou porque o custo (volume, peso, dinheiro, etc..) para coleta desta informação é proibitivo para fins práticos. Vale lembrar que um sensor também é um sistema e, portanto, também tem o seu sinal alterado por um ruído.

Tudo o que foi descrito acima torna-se mais crítico quando as condições do sistema necessitam ser aferidas e ao mesmo tempo serem mantidas dentro de limites pré-determinados, requisitos normalmente ligados com a segurança e disponibilidade do sistema. Na área de segurança esbarramos no problema de que a confiabilidade de sensores individuais normalmente não satisfazem os requisitos de segurança necessários. Dessa forma há necessidade de novas metodologias, que associadas aos modelos do sistema, possam aumentar a confiabilidade da planta.

O problema se torna mais crítico na área nuclear, pois a operação segura de plantas nucleares depende da precisão dos sinais obtidos através de sensores localizados em diversos pontos do sistema. Estes sensores fornecem sinais contaminados por ruídos, tanto da planta nuclear como do sistema de detecção, e caso ocorra falha de um destes sensores, esta deve ser identificada e o sinal falho deve ser isolado no menor intervalo de tempo possível afim de que somente os sinais válidos sejam utilizados para decisão e alteração do regime de operação da planta. O ruído que contamina os sinais dos sensores podem causar oscilações espúrias que devem ser diferenciadas de falhas de pequena magnitude afim de que não se incorra numa alta taxa de alarmes falsos.

As metodologias desenvolvidas para este fim /1-12/ são conhecidas como validação e isolamento de sinais e podem ser entendidas como a detecção, isolamento e caracterização de sinais falhos, onde estes três processos estão colocados em ordem de dificuldade crescente. A tarefa mais difícil destas metodologias é identificar as mudanças causadas por falhas do sistema de medida das mudanças ocasionadas durante transientes do processo monitorado.

Estas metodologias vem sendo estudadas desde o início da década de 40 e tem tido papel fundamental em três áreas: aviação, controle de órbitas de satélites e controle de plantas nucleares.

## 1.2 – Histórico

As pesquisas iniciais em validação de sinais foram centradas na metodologia mais óbvia, ou seja, na utilização de sensores redundantes para cada uma das variáveis de interesse. As técnicas utilizadas nesta situação podem ser divididas em dois grandes grupos: técnicas determinísticas e técnicas estatísticas.

Dentre as técnicas determinísticas destacamos:

- Lógica.
- Votação.

A validação pelo método da lógica utiliza-se de um algoritmo que indica a existência de alguma anormalidade baseado na informação de que um determinado número de sensores encontra-se fora da faixa de operação segura, faixa esta determinada pelas condições de operação do sistema em questão. Este algoritmo tem por desvantagem a não determinação do valor da variável monitorada, além da não detecção e isolamento de falhas em algum dos sensores do sistema.

O método da votação é utilizado para determinar o valor da variável de interesse através de um determinado algoritmo (média aritmética, média ponderada, segundo máximo, etc..). Embora o algoritmo não indique a existência de falhas, ele gera o valor da variável em questão utilizando apenas os sensores que estão com valores dentro de uma faixa pré-estabelecida.

Com relação as técnicas estatísticas destacamos:

- Representação no espaço de paridade.
- Razão de probabilidade generalizada.
- Teste sequencial.

A representação no espaço de paridade é um método para determinação do grau de coerência (ou incoerência) de cada uma das fontes de dados redundantes que tem por objetivo determinar: (1) o subconjunto de dados com o maior grau de coerência para ser

utilizado na estimativa das variáveis de processo medidas; e (2) a identificação do subconjunto com maior grau de incoerência ou falhas na fonte de dados. O grau de coerência dos dados é determinado através da checagem simultânea da coerência relativa de pequenos subconjuntos dos dados redundantes com base num dado limite de erro, onde a consistência entre estes sinais é verificada.

O teste de razão de probabilidade generalizada utiliza uma razão entre duas probabilidades que definem um teste de hipótese sobre a parte estatística dos sinais. Estas hipóteses estão relacionadas com o tipo de falha do sensor e a razão entre elas é comparada com limites pré-estabelecidos afim de verificar a existência ou não de falhas nos sensores.

O teste sequencial está baseado numa análise estatística onde uma decisão é tomada com base em informações acumuladas através da história passada das medidas realizadas. A decisão deve ser tomada entre dois modos, o chamado normal e o chamado modo alternativo ou degradado, e é tomada através de um teste de razão de probabilidade. Este teste requisita, em média, o menor número de amostras para identificação do modo de operação do sistema para uma dada probabilidade de erro. Para o teste, as amostras são consideradas como uma sequência de variáveis randômicas gaussianas independentes e através da sua função densidade de probabilidade podemos chegar numa fórmula recursiva para a razão de probabilidade entre os dois modos. O método possui algumas limitações como insensibilidade para flutuações graduais das leituras dos sensores e falhas de modo comum.

Quando existe a dificuldade de implementação da redundância física devemos lançar mão dos chamados modelos dinâmicos, onde o valor da variável de interesse é obtido através de técnicas de estimação de estado permitindo realizar a detecção de falhas através de técnicas computacionais de processamento de sinais. Para este fim assume-se que a dinâmica da planta a ser monitorada é linear e os estimadores de estado utilizados

são observadores de Luenberger ou filtros Kalman onde as variáveis do processo são modeladas à partir das equações de balanço de massa, momento e energia. Atualmente utiliza-se preferencialmente o filtro Kalman pois este nos fornece a melhor estimativa, retirando o máximo de informação das medidas realizadas. Estes métodos foram generalizados com a utilização do chamado filtro Kalman estendido /7/, onde o modelo do sistema monitorado não necessita ser linear.

Seguindo esta linha de trabalho, apresentaremos os principais métodos que vem sendo estudados quanto à sua potencialidade para utilização prática. Estes estudos vem combinando e alterando alguns aspectos particulares do filtro de Kalman, procurando obter o maior grau possível de eficiência e, ao mesmo tempo, preservar uma simplicidade em sua implementação para futura utilização comercial. Ressalta-se que nenhum dos métodos que serão apresentados avançaram ao estágio de aplicação prática visto que, acredita-se, muitos outros métodos poderão ser propostos no decorrer da consolidação da técnica que ainda se encontra em seu estágio inicial.

Todos os métodos apresentados visam à utilização em pressurizadores de um reator tipo PWR, por ser este componente de vital importância no controle da pressão do circuito primário do reator, evitando a formação de vapor no interior do núcleo, o que poderia acarretar o rompimento das varetas combustíveis e, em casos extremos, o derretimento de partes do núcleo devido a baixa retirada do calor produzido.

No estágio atual do desenvolvimento destas técnicas a preocupação maior está na determinação das melhores combinações que podem produzir resultados confiáveis com menor grau de complexidade possível. Dessa forma, os problemas naturais que deverão surgir na fase de implementação prática não são, ainda, objeto de estudo e preocupação dado o estágio incipiente das metodologias estudadas. Dentre eles destaca-se o problema da divergência do filtro que, provalvemente, será a maior dificuldade na viabilização prática de qualquer metodologia escolhida visto que cada método tem uma melhor afinidade com uma dada técnica de estabilização.

Os métodos são:

- Redundância analítica
- Razão de probabilidade generalizada (GLR)
- Filtro de aproximação zero
- Análise de inovação

A redundância analítica é similar a redundância de sensores exceto que a comparação é feita entre uma estimativa analítica da variável de interesse e o valor medido pelo sensor. No caso de um sistema de múltiplas saídas, é construído um filtro para cada uma das variáveis que, processando todos os dados do sistema, fornece a estimativa da variável em questão. Se a diferença entre o valor medido de uma das variáveis e sua estimativa for maior do que um limite pré-determinado, é acusada uma falha deste sensor. Este método foi investigado por Clark e Campbell /4/ no pressurizador do LOFT (Loss-Of-Fluid Test Facility), utilizando o modelo desenvolvido por Tylee /5/. O método foi testado utilizando resultados de uma simulação numérica, através das equações de estado, para um transiente de curta duração: degrau de surto positivo de 1 lb/s entre 25 e 50 segundos seguido de um surto negativo de mesma magnitude entre 75 e 100 segundos, adicionando um ruído da ordem de 1 sigma de cada um dos sensores no respectivo resultado fornecido pelo modelo.

O esquema de detecção e isolamento de falhas se dá através da definição das seguintes funções:

$$\gamma_1 = (x_{p1} - x_{p2})(x_{p1} - x_{p3})$$

$$\gamma_2 = (x_{p2} - x_{p1})(x_{p2} - x_{p3})$$

$$\gamma_3 = (x_{p3} - x_{p1})(x_{p3} - x_{p2})$$

$$\gamma_4 = (P_{p1} - P_{p4})^2$$

$$\gamma_5 = (T_{p1} - T_{p5})^2$$

onde  $x, P, T$  indicam qualidade, pressão e temperatura, respectivamente  
os índices  $p_i$  indicam a estimativa do filtro  $i$  para a variável indicada  
os índices  $P_i$  indicam o valor fornecido pelo sensor da variável indicada

Dessa forma temos 5 filtros, um dedicado a cada sensor do sistema.

O filtro 4, dedicado a pressão, foi desensibilizado com relação a esta variável introduzindo um valor incorreto e de alta magnitude no parâmetro  $\sigma_p$ , de forma a tornar a função  $\gamma_4$  fortemente sensível a magnitude da falha simulada através da medida  $P_{p_i}$ . O mesmo procedimento foi aplicado ao filtro 5, dedicado a temperatura, com relação a  $\sigma_T$ .

Durante o transiente foram simuladas dois tipos de falha: falhas tipo degrau e presença de ruído no sinal fornecido pelo sensor.

O período de duração dos testes foi da ordem de 120 segundos e os resultados obtidos indicam possível utilização prática.

No método GLR são realizados testes estatísticos sobre a sequência de inovação realizada pelo filtro. O método pode ser dividido em 4 etapas distintas:

- 1) Falhas específicas são assumidas e seu efeito sobre a dinâmica do sistema é modelado através de matrizes de assinatura para cada uma destas falhas.

- 2) Assume-se que um dado tipo de falhas ocorre num dado instante de tempo e sua magnitude é então estimada.

- 3) Para cada uma das falhas assumidas na etapa 1 é computada e maximizada sua função probabilidade.

- 4) As funções probabilidade obtidas na etapa anterior são comparadas com um limite pré-determinado afim de verificar a ocorrência de uma dada falha.

A principal dificuldade encontrada no teste GLR é que cada uma das falhas que podem ocorrer na planta devem ser modeladas matematicamente, o que nem sempre é possível, além do número de falhas que podem vir a ocorrer ser grande, o que causa problemas de desempenho e aumento da carga computacional.

Este método foi estudado por Tylee /5/ para o pressurizador do LOFT. O primeiro passo foi desenvolver um modelo simplificado do pressurizador e comparar o desempenho do modelo frente aos dados medidos em 2 transientes de curta duração realizados na planta.

A instrumentação do pressurizador do LOFT consiste em três medidores de nível, um sensor de pressão e um termopar localizado na região de líquido. Para cada um dos sensores foi construído um filtro Kalman, esquema usado na redundância funcional, e foram simuladas numericamente dois tipos de falhas: falhas tipo degrau e falhas tipo rampa. O período de realização dos testes são da ordem de 100 segundos e os resultados obtidos mostraram a possibilidade de utilização deste método como detetor e isolador de falhas.

O filtro de aproximação zero (ZOA Filter) utiliza-se de filtros não lineares e supõe que as falhas que venham a ocorrer no funcionamento do sistema de medida podem ser descritas como um repentino desvio dos parâmetros do modelo assumido governado por uma distribuição conhecida. Dessa forma podemos calcular a distribuição de probabilidade condicional para um dado desvio e desta forma determinar diretamente o regime de funcionamento do sistema em questão.

Este método foi estudado por Eckert e Loparo /9/ para o pressurizador do LOFT com utilização do modelo desenvolvido por Tylee /5/. Supondo a existência de uma falha onde, independente do valor da variável de estado, o respectivo sensor sempre indica o mesmo valor, foram construídos 4 filtros, um indicando a probabilidade de operação em modo normal, sem falhas, e cada um dos outros 3 indicando falha na temperatura, no nível e na pressão, respectivamente.

Os resultados apresentados foram excelentes, com a vantagem de que erros de modelagem da ordem de 10% não alteram a capacidade do teste reconhecer a falha existente, além do que erros da ordem de 20% no ruído assumido nas equações de estado não causaram variações no tempo de detecção da falha simulada. No entanto a sua

utilização prática apresenta dois problemas extraordinários: construção de filtros não lineares e o fato de que para cada uma das falhas postuladas devemos ter um filtro para cada uma das variáveis envolvidas.

A análise de inovação utiliza-se de um filtro de Kalman e baseia-se em testes estatísticos para verificar a existência de mudanças no comportamento da inovação realizada pelo filtro, o que indicaria a ocorrência de falhas no sistema de medida. Os testes comumente utilizados são: teste de chi-quadrado, teste de média zero, variância maior que a esperada e outros. Esta metodologia encontra-se descrita na referência /6/ como uma das possíveis aplicações do filtro Kalman, sendo por nós escolhida devido à ausência, na literatura, de estudos de sua viabilidade como detetor de falhas, controle e monitoração de pressurizador de reatores PWR.

Todos os métodos analíticos aqui apresentados se utilizam dos filtros Kalman, desta forma um dos problemas a ser resolvido para implementação prática, operação em longos intervalos de tempo, é quanto a divergência do filtro utilizado. Apenas foi verificada a viabilidade de sua utilização como detetor de falhas, em testes de curta duração, a fim de determinar as suas melhores características e também as suas desvantagens.

Outro fato a se destacar e que todas as metodologias analíticas aqui apresentadas foram aplicadas ao pressurizador de um reator tipo PWR, através de um modelo simplificado desenvolvido por Tylee /5/.

No estágio atual, os estudos de validação de sinais caminham na direção de combinar várias técnicas a fim de obter sistemas de detecção de falhas com alta confiabilidade, baixa carga computacional e executável em tempo real.

### 1.3 – Objetivos

Este trabalho terá por objetivo estudar a viabilidade de desenvolver um sistema de detecção e isolamento de falhas para aplicação na área de controle de plantas nucleares que seja confiável, eficiente e econômico.

Para este fim serão pesquisadas e analisadas as principais metodologias apresentadas na literatura e através da combinação, modificação e adaptação das mesmas obter o melhor sistema de detecção e isolamento de falhas.

As metodologias escolhidas foram a análise sequencial de razão de probabilidade, para o caso da existência de sensores redundantes, e a análise da inovação do filtro de estimação ótima, onde pode ou não existir a redundância de sensores, com a utilização do filtro Kalman estendido.

A análise sequencial será vista de uma forma geral pois não necessita de um modelo do sistema em estudo, e os resultados calculados serão comparados contra resultados experimentais em bancada de testes de túnel de vento.

Para a análise da inovação utilizaremos o pressurizador de um reator do tipo PWR , através de modelagem numérica simplificada /5/, e utilizaremos a metodologia de teste apresentada por Clark e Campbell /4/.

Devemos ressaltar que a análise da inovação será apenas um estudo de sua viabilidade como detetor de falhas, comparando seu desempenho contra outros estudos de viabilidade apresentados na literatura, permanecendo ainda , para todos os métodos, os problemas de sua implementação prática.

## CAPÍTULO 2 – INTRODUÇÃO TEÓRICA

### 2.1 – Aspectos Gerais

Neste capítulo procuramos apresentar as teorias fundamentais sobre as quais estão baseadas as metodologias de validação de sinais, assim como os instrumentos que serão utilizados no presente trabalho, seguindo os passos percorridos por Maybeck /6/. Por questões de limitação de espaço, alguns detalhes serão omitidos na presente descrição, podendo ser encontrados na referência citada.

Na seção 2.2 está apresentada a teoria de probabilidade, que será a base de todas as metodologias aqui estudadas, onde são definidos os conceitos de distribuição de probabilidade, função densidade de probabilidade, variáveis randômicas, função randômica e distribuição gaussiana, assim como os parâmetros estatísticos que as descrevem.

Na seção 2.3 utilizaremos os conceitos apresentados na seção anterior para definir modelos de estimação ótima. Nela será apresentada uma metodologia que consiste em supor que as medidas realizadas no sistema são combinações lineares das variáveis de interesse, assumidas como variáveis randômicas gaussianas, corrompidas por um ruído, também randômico gaussiano mas com média zero, e a partir disto obter a melhor estimativa das variáveis de interesse.

Na seção 2.4, visando a construção de modelos dinâmicos de sistema, serão definidos os chamados processos estocásticos. Dessa forma, nesta seção, definiremos os conceitos de processos estocásticos, processos Gauss–Markovianos, processos gaussianos brancos, movimento Browniano, diferenciais estocásticas e integrais estocásticas.

Na seção 2.5 apresentaremos a obtenção de um dispositivo que, a partir das medidas realizadas, nos fornece a melhor estimativa das variáveis de interesse, também chamadas de variáveis de estado. Este dispositivo é o chamado filtro Kalman e está baseado em um modelo onde o sistema em estudo é suposto linear, dirigido por um ruído

gaussiano branco, onde as medidas disponíveis também são lineares e corrompidas por um ruído gaussiano branco.

Na seção 2.6 obteremos o chamado filtro Kalman estendido que tem por função obter a melhor estimativa para o caso do sistema em estudo não ser linear, além de apresentar um estudo da estatística interna a este tipo de dispositivo.

Na seção 2.7 é apresentado o teste sequencial de razão de probabilidade que é utilizado quando podemos definir claramente 2 modos de operação do sistema em estudo, um chamado modo normal e outro chamado modo alternativo ou degradado; este método é puramente estatístico e está baseado na razão entre as funções distribuição de probabilidade para cada um dos modos.

## 2.2 – Teoria de Probabilidade

A teoria de probabilidade parte do princípio de que, para descrever precisamente um experimento, devemos definir um espaço  $\Omega$ , chamado espaço amostral, que contém todos os resultados possíveis do experimento em questão, ou seja, o espaço amostral é a coleção de todos resultados possíveis da experiência, onde cada um destes resultados é pensado como um ponto do espaço  $\Omega$ .

Neste contexto o evento  $A$  é um subconjunto específico deste espaço, ou seja,  $A$  é um subconjunto de  $\Omega$ :  $A \subset \Omega$ . O evento  $A$  é dito ocorrido se o resultado observado  $\omega$  é um elemento de  $A$ ,  $\omega \in A$ .

Dentro deste contexto podemos definir, fazendo uma nova restrição, um espaço, denominado  $F$ , que contém uma classe de eventos  $A_1, A_2, A_3, \text{etc.}$ . Neste caso  $\Omega$  é um conjunto de pontos do espaço  $n$ -dimensional e  $F$  é uma classe de conjuntos gerados por um conjunto da forma:

$$A = \left[ \omega: \omega \leq a, \omega \in \Omega \right]$$

e seus complementos, uniões e intersecções.

Desta forma podemos definir uma função probabilidade  $P(\cdot)$ , que é uma função escalar real, definida em  $F$ , que assume o valor  $P(A)$  para cada  $A$  que é membro de  $F$  tal que:

$$1) P(A) \geq 0 \quad \forall A \in F$$

$$2) P(\Omega) = 1$$

3) Se  $A_1, A_2, A_3, \dots$  são elementos de  $F$  e são mutualmente exclusivos, isto é, se

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para todo } i \neq j \text{ então } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Portanto temos definido o chamado espaço probabilístico, definido como a trinca  $(\Omega, F, P)$  do espaço amostral.

Neste contexto definiremos como variável randômica escalar a uma função real, denotada por  $x(\omega) = x$ , para qualquer conjunto da forma:

$$A = \left[ \omega: x(\omega) \leq \xi \right]$$

para qualquer  $\xi$  na reta real ( $\xi \in \mathbb{R}$ ).

Este conceito pode ser estendido para uma variável randômica vetorial ou vetor randômico,  $\mathbf{x}(\omega)$ , onde para qualquer conjunto  $A \subset \Omega$  temos:

$$A = \left[ \omega: \mathbf{x}(\omega) \leq \xi \right] \text{ para qualquer } \xi \in \mathbb{R}^n$$

Pela definição de variável randômica dada acima, todo conjunto da forma

$$A = \left[ \omega: \mathbf{x}(\omega) \leq \xi \right] = \left[ \omega: x_1(\omega) \leq \xi_1, x_2(\omega) \leq \xi_2, \dots, x_n(\omega) \leq \xi_n \right]$$

possui uma probabilidade, dessa forma podemos definir uma função distribuição de probabilidade  $F_{\mathbf{x}}(\xi)$  definida por:

$$F_{\mathbf{x}}(\xi) = P\left( \left[ \omega: \mathbf{x}(\omega) \leq \xi \right] \right) = P(x_1 \leq \xi_1, x_2 \leq \xi_2, \dots, x_n \leq \xi_n)$$

Esta função possui as seguintes propriedades:

$$1) F_{\mathbf{x}}(\xi) = F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = P(\omega: x_1(\omega) \leq \xi_1, \dots, x_n(\omega) \leq \xi_n)$$

$$2) F_{\mathbf{x}}(\infty, \infty, \dots, \infty) = P(\omega: x_1(\omega) \leq \infty, \dots, x_n(\omega) \leq \infty) = 1$$

$$3) F_{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2, \dots, -\infty, \dots, \xi_n) = P(\omega: \dots, x_i(\omega) \leq -\infty, \dots) = 0$$

Pelas propriedades definidas acima podemos usar a função distribuição para gerar a probabilidade de qualquer conjunto de eventos que nos interesse. Para este fim definiremos uma função densidade de probabilidade que, se existir, nos facilitará os cálculos das probabilidades desejadas.

Se existe uma função  $f(\cdot)$  tal que:

$$F_x(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_s(\rho) d\rho$$

então a função  $f_s(\rho)$  é chamada função densidade de probabilidade, e possui as seguintes propriedades:

- 1)  $f_x(\xi) \geq 0$  para todo  $\xi$
- 2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_s(\xi) d\xi = 1$
- 3)  $P(\omega: x(\omega) \in [\xi_1, \xi_2]) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_s(\rho) d\rho$

Uma definição de interesse é a de probabilidade condicionada, ou seja, a probabilidade de  $x(\omega) = x_i$  condicionada ao fato de  $y(\omega) = y_i$ . Este fato pode ser expresso por:

$$P(x(\omega) = x_i | y(\omega) = y_i) = \frac{P(x(\omega) = x_i \text{ e } y(\omega) = y_i)}{P(y(\omega) = y_i)}$$

A definição acima só é válida se  $P(y(\omega) = y_i) > 0$  e como vamos trabalhar com variáveis randômicas contínuas pode ocorrer o fato de  $P(y(\omega) = y_i) = 0$ .

Para contornar este fato supomos 2 conjuntos A e B tal que  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$ , dessa forma a probabilidade de  $x(\omega)$  estar contido em A, condicionada ao fato de  $y(\omega) \in B$ , é expressa por:

$$P(x(\omega) \in A | y(\omega) \in B) = \frac{P(x(\omega) \in A \text{ e } y(\omega) \in B)}{P(y(\omega) \in B)}$$

Supondo a existência da função densidade de probabilidade combinada, expressa por  $f_{x,y}(\cdot, \cdot)$ , podemos escrever a expressão acima da forma:

$$P(x(\omega) \in A | y(\omega) \in B) = \frac{\int_A \left[ \int_B f_{x,y}(\xi, \gamma) d\gamma \right] d\xi}{\int_B f_y(\rho) d\rho}$$

e podemos expressar a densidade condicional de  $x$  como:

$$f_x(\xi | y(\omega) \in B) = \frac{\int_B f_{x,y}(\xi, \gamma) d\gamma}{\int_B f_y(\rho) d\rho}$$

Fazendo certas considerações sobre os espaços  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  e sobre os conjuntos  $A$  e  $B$  obtemos a chamada regra de Bayes que pode ser expressa da seguinte forma:

$$f_{x|y}(\xi | \rho) = \frac{f_{x,y}(\xi, \rho)}{f_y(\rho)} \quad (2.2.1)$$

Um caso importante ocorre quando as variáveis  $x$  e  $y$  são independentes, isto é, não existe nenhuma relação entre elas. Este fato, pela definição de  $P(\cdot)$  é expressa por:

$$P(\omega: x(\omega) \in A \text{ e } y(\omega) \in B) = P(\omega: x(\omega) \in A)P(\omega: y(\omega) \in B)$$

Neste caso, pela definição de função distribuição, temos:

$$P(\omega: x(\omega) \in A) = F_x(\xi)$$

$$P(\omega: y(\omega) \in B) = F_y(\rho)$$

portanto

$$F_{x,y}(\xi, \rho) = F_x(\xi)F_y(\rho) \quad \text{para todo } \xi \text{ e } \rho$$

e se existir a função densidade teremos:

$$f_{x,y}(\xi, \rho) = f_x(\xi)f_y(\rho)$$

Aplicando a regra de Bayes, equação 2.2.1, concluímos que:

$$f_{x|y}(\xi | \rho) = f_x(\xi)$$

Cabe aqui fazer uma distinção entre eventos independentes e eventos mutuamente exclusivos. Evento mutuamente exclusivo é aquele em que a ocorrência do evento  $A$  implica na não ocorrência do evento  $B$  e vice-versa, isto é,  $A \cap B = \phi$ , e eventos independentes vale a propriedade definida acima.

Com o que foi apresentado acima podemos definir funções de variáveis randômicas e como estas podem ser tratadas.

Vamos supor que  $x$  é uma variável randômica que mapeia o espaço amostral  $\Omega$  no espaço  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ . Considerando um mapeamento contínuo  $\theta(\cdot)$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$

podemos gerar um vetor  $y \in \mathbb{R}^m$  a partir de um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ . Este vetor  $y$  também será uma variável randômica expressa por:

$$Y(\cdot) = \theta[x(\cdot)]$$

Esta nova variável gera uma função distribuição induzida pela distribuição de  $x$  dada por:

$$F_y(\rho) = P(\omega: y(\omega) \leq \rho) = P(\omega: \theta[x(\omega)] \leq \rho) = P_x(x: \theta(x) \leq \rho)$$

que nos dará uma função densidade induzida expressa por:

$$f_y(\rho) = \frac{\partial^m}{\partial \rho_1 \partial \rho_2 \dots \partial \rho_m} F_y(\rho)$$

As funções distribuição e densidade de uma variável randômica são entes fundamentais para se fazer uma estimativa da forma proposta por este trabalho pelo fato de que elas contém todas informações acerca da variável estudada. Estas funções podem ser usadas para computar o valor esperado da variável em questão, isto é, o valor médio da variável que podemos obter frente à um conjunto de resultados de um experimento em que esta variável esteja envolvida. Este valor esperado irá gerar os chamados momentos de uma variável randômica, que nada mais são do que parâmetros estatísticos que caracterizam as funções distribuição e densidade.

Seja  $x$  um vetor randômico  $n$ -dimensional com uma função densidade  $f_x(\xi)$ , e  $y$  uma função  $m$ -dimensional de  $x$  dada por:

$$y(\cdot) = \theta[x(\cdot)]$$

Dessa forma definimos valor esperado de  $y$  como:

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) f_x(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \rho f_y(\rho) d\rho \quad (2.2.2)$$

onde  $f_y(\rho)$  é a função induzida de  $y$ .

O valor esperado é uma transformação linear e, portanto, possui as seguintes propriedades:

- 1)  $E[cy] = c \cdot E[y]$
- 2)  $E[y_1 + y_2] = E[y_1] + E[y_2]$

Das propriedades acima, para uma matriz  $A$  conhecida temos:

$$E[Ay] = A \cdot E[y]$$

Fazendo  $\theta(x) = x$  podemos gerar o primeiro momento de  $x$ , chamado média de  $x$ , dado por:

$$m = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f_x(\xi) d\xi \quad (2.2.3)$$

Considere agora a função  $\theta(x) = x \cdot x^T$ . Definimos como segundo (não central) momento a matriz  $\psi$ , chamada matriz correlação de  $x$ , dada por:

$$\psi = E[x \cdot x^T] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot \xi^T f_x(\xi) d\xi$$

Vamos considerar  $\theta(x) = (x - m)(x - m)^T$  e definir uma matriz  $P$ , chamada matriz covariância de  $x_i$  e  $x_j$ , que pode ser expressa por:

$$P = E[(x - m)(x - m)^T] = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m)(\xi - m)^T f_x(\xi) d\xi \quad (2.2.4)$$

Assim sendo  $P$  é chamada segundo momento central e a variância de cada elemento de  $x$  é dada pelo valor da diagonal de  $P$ , ou seja:

$$P_{ii} = E[(x_i - m_i)^2]$$

A raiz quadrada de  $P_{ii}$  é chamado de desvio padrão de  $x_i$  e denotado por  $\sigma_i$  portanto:

$$P_{ii} = \sigma_i^2 \quad (2.2.5)$$

O coeficiente de correlação de  $x_i$  e  $x_j$  é dado pela seguinte expressão:

$$r_{ij} = \frac{P_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

Se  $r_{ij}$  é igual a zero significa que  $x_i$  e  $x_j$  são não correlacionadas. Consequentemente  $P$  será uma matriz diagonal se  $r_{ij} = 0$  para todo  $i$  e  $j$  com  $i \neq j$  e  $x$  será um vetor composto de elementos não correlacionados.

As informações fornecidas por estes momentos estão relacionadas com a função densidade (ou distribuição) da seguinte forma: A média estabelece onde a densidade está

centrada e a variância nos dá uma indicação da dispersão da densidade ao redor da média.

Por fim podemos definir uma matriz de correlação cruzada entre  $x$  e  $y$ , e uma matriz de covariância cruzada entre  $x$  e  $y$ , dadas respectivamente por:

$$\psi_{xy} = E[x \cdot y^T] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot \rho^T f_{x,y}(\xi, \rho) d\xi d\rho \quad (2.2.6)$$

$$P_{xy} = E[(x - m_x)(y - m_y)^T] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_x)(\rho - m_y)^T f_{x,y}(\xi, \rho) d\xi d\rho \quad (2.2.7)$$

É importante observar que se  $x$  e  $y$  são não correlacionados teremos:

$$E[x \cdot y^T] = E[x]E[y^T] = m_x \cdot m_y \quad (2.2.8)$$

que é equivalente a condição de que  $E[(x_i - m_{x_i})(y_j - m_{y_j})]$  para todo  $i$  e  $j$ .

Outra propriedade importante é a ortogonalidade entre dois vetores randômicos, definida pelo fato de sua matriz de correlação, dada pela eq. 2.2.8, ser igual a zero, ou seja:

$$E[x \cdot y^T] = 0$$

Esta propriedade fornece um meio de definir estimativa ótima: Se fizermos uma estimativa  $x^+$  do vetor  $x$  baseado nos dados medidos  $z$ , esta estimativa é dita ótima se o vetor  $(x - x^+)$  for ortogonal ao vetor  $z$ . Este conceito geométrico, chamado de projeções ortogonais, é um instrumento de obtenção de estimadores ótimos, e foi o meio originalmente usado para a obtenção do filtro Kalman.

Vamos supor que possuímos duas variáveis randômicas,  $x$  e  $y$ , que mapeiam  $\Omega$  nos espaços  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  respectivamente, e uma função contínua  $z$  dada por:

$$z(\cdot) = \theta[x(\cdot)]$$

Dessa forma  $z$  também é uma variável randômica que mapeia  $\Omega$  no espaço  $\mathbb{R}^r$ , e sua expectativa condicional, ou média condicional de  $z$ , é dada por:

$$E_x[z|y = y_a] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \cdot f_{x|y}(\xi|y_a) d\xi$$

O fato acima implica que:

$$E_y[E_x[z|y = y(\cdot)]] = E_x[z]$$

A expectativa condicional também pode ser vista como uma função  $E_x[\cdot | y = y_a]$  que mapeia a variável  $z$  num vetor  $E_x[z | y = y_a] \in \mathbb{R}^T$ .

Vamos agora definir uma função que terá grande utilidade para o fim a que nos propomos. Esta função é chamada de função característica e é expressa por:

$$\phi_x(\mu) = E_x[\exp(j\mu^T x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\mu^T x) \cdot f_x(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (2.2.9)$$

onde  $j = (-1)^{1/2}$ .

Observando a equação 2.2.9, vemos que a função característica nada mais é do que a transformada de Fourier da função densidade da variável  $x$ .

A razão para a definição da função característica é que através dela podemos facilmente obter os momentos da variável  $x$ .

Calculando a derivada de  $\phi_x(\mu)$  com respeito a componente  $k$  do vetor  $\mu$  teremos:

$$\frac{\partial \phi(\mu)}{\partial \mu_k} = j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \xi_k \cdot \exp(j\mu^T x) \cdot f_x(\xi) d\xi$$

Dividindo o resultado acima por  $j$  e avaliando o resultado em  $\mu = 0$  obtemos:

$$\frac{1}{j} \left[ \frac{\partial \phi(\mu)}{\partial \mu_k} \right]_{\mu=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_k \cdot f_x(\xi) d\xi = E[x_k]$$

Observando o procedimento acima podemos provar, por indução, que o  $n$ -ésimo momento não central de  $x$  é dado pela equação abaixo.

$$E[x_k x_1 \dots x_N] = \frac{1}{j^N} \cdot \left[ \frac{\partial^N \phi(\mu)}{\partial \mu_k \partial \mu_1 \dots \partial \mu_N} \right]_{\mu=0} \quad (2.2.10)$$

Outra propriedade da função característica que é muito importante, ocorre quando temos uma variável  $z$  que é a soma de duas variáveis,  $x$  e  $y$ , independentes, ou seja:

$$z = x + y$$

Neste caso pode-se mostrar que:

$$f_z(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(\rho - \xi) \cdot f_x(\xi) d\xi$$

que é uma integral de convolução e podemos mostrar que a transformada de Fourier de uma convolução é o produto de 2 funções, ou seja:

$$\phi_z(\mu) = \phi_x(\mu) \cdot \phi_y(\mu)$$

Passaremos agora a tratar um tipo de variável randômica de particular interesse, chamada gaussiana, pois ela nos fornece um modelo adequado do comportamento randômico de muitos fenômenos observados na natureza, além de produzir modelos matemáticos tratáveis em que estão baseados os estimadores de estado.

Um vetor randômico é dito gaussiano quando sua função densidade pode ser expressa da seguinte forma:

$$f_x(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot |P|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\xi - m)^T P^{-1} (\xi - m)\right]$$

onde  $| \cdot |$  expressa o determinante da matriz em questão.

A função característica da gaussiana vale:

$$\phi_x(\mu) = \exp\left[j\mu^T m - \frac{1}{2} \cdot \mu^T \cdot P \cdot \mu\right]$$

Usando a função característica e a equação 2.2.10 é fácil provar que:

$$E[x] = m \quad (2.2.11)$$

$$E[x \cdot x^T] = P + m \cdot m^T \quad (2.2.12)$$

$$E[(x - m)(x - m)^T] = P \quad (2.2.13)$$

Um resultado importante a ser discutido é a densidade condicional gaussiana. Se  $x$  e  $y$  é um vetor gaussiano conjunto,  $f_{x,y}(\xi, \rho)$  pode ser escrita, aplicando a regra de Bayes, eq. 2.2.1, e algumas reduções algébricas, da seguinte forma:

$$f_{x|y}(\xi|\rho) = \left[(2\pi)^{n/2} \cdot |P_{x|y}|^{1/2}\right]^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\xi - m_{x|y})^T \cdot P_{x|y}^{-1} \cdot (\xi - m_{x|y})\right]$$

onde

$$m_{x|y} = m_x + P_{xy} \cdot P_{yy}^{-1} (\rho - m_y)$$

$$P_{x|y} = P_{xx} - P_{xy} \cdot P_{yy}^{-1} \cdot P_{yx}$$

Dessa forma se  $x$  representa nossas variáveis de interesse e  $y$  modela as medidas disponíveis, então  $f_{x|y}(\xi|\rho)$  representa a densidade condicional das variáveis de interesse, condicionada ao conhecimento de que  $y$  assume um resultado em particular. Como esta densidade também é gaussiana, a média condicional é, obviamente, uma escolha válida como estimador do vetor  $x$ . Dentro destas circunstâncias, o estimador  $E_x[x|y = y(\cdot)]$  é um vetor gaussiano randômico o qual é uma combinação linear dos componentes de  $y(\cdot)$ :

$$E_x[x|y = y(\cdot)] = m_x + P_{xy} P_{yy}^{-1} [y(\cdot) - m_y] \quad (2.2.14)$$

Além disso, o erro nesta estimativa,  $(x - E_x[x|y = y(\cdot)])$ , como pode ser mostrado, é um vetor gaussiano randômico independente de qualquer vetor randômico obtido através de transformações lineares sobre o vetor  $y$ , significando que não existe nenhuma informação contida em  $y$  que não foi utilizada para estimar o valor assumido por  $x$ , ou seja, obtemos a melhor estimativa de  $x$  com as informações contidas em  $y$ .

Como no desenvolvimento de modelos para fenômenos e processos randômicos iremos ter de fazer várias operações com variáveis randômicas, e como variáveis gaussianas representam vários fenômenos naturais, passaremos agora a estudar operações lineares com vetores gaussianos e observaremos que este tipo de operação preserva o caráter gaussiano das variáveis em questão.

Se  $x$  é uma variável gaussiana  $n$ -dimensional com média  $m_x$  e covariância  $P_{xx}$ , e  $A$  é uma matriz ( $n \times n$ ) conhecida e não randômica então  $y = Ax$  será dado por:

$$\phi_y(\mu) = E_x[\exp(j\mu^T y)] = E_x[\exp(j\mu^T Ax)] = E_x[\exp(j[A^T \mu]^T x)] = \phi_x(A^T \mu)$$

mas  $x$  é gaussiana portanto:

$$\begin{aligned} \phi_x(A^T \mu) &= \exp\left[j(A^T \mu)^T m_x - \frac{1}{2} \cdot (A^T \mu)^T \cdot P_{xx} \cdot (A^T \mu)\right] = \\ &= \exp\left[j\mu^T A m_x - \frac{1}{2} \cdot \mu^T \cdot (A P_{xx} A^T) \cdot \mu\right] \end{aligned}$$

portanto  $y$  será uma gaussiana com:

$$m_y = A m_x \quad \text{e} \quad P_y = A P_{xx} A^T \quad (2.2.15)$$

Se  $x$  e  $y$  são gaussianas conjuntas e  $A$  e  $B$  são duas matrizes conhecidas podemos mostrar que  $z = Ax + By$  é gaussiana com:

$$m_z = Am_x + Bm_y \quad e \quad P_{zz} = AP_{xx}A^T + AP_{xy}B^T + BP_{yx}A^T + BP_{yy}B^T$$

### 2.3 – Estimação em Modelos Lineares Gaussianos

Considerando um sistema linear gaussiano, as variáveis de estado podem ser relacionadas às medidas obtidas do sistema, se for conhecida a resposta do sistema de medida com as variações das variáveis de estado.

Para a estimação seguiremos os seguintes passos:

- 1) As variáveis à serem estimadas serão colocadas como componentes de um vetor  $n$ -dimensional  $x$ .
- 2) As  $m$  medidas disponíveis serão componentes de um vetor  $m$ -dimensional  $z$ .
- 3) O conjunto de vetores  $z$  serão tomados como uma combinação linear das variáveis de interesse, corrompidas por um ruído  $v$  de  $m$  dimensões:

$$z = Hx + v \quad \text{onde } H \text{ é uma matriz } (m \times n) \text{ conhecida (2.3.1)}$$

- 4) O modelo probabilístico proposto é da forma de variáveis randômicas, onde os valores possíveis do vetor  $x$  é tomado como sendo uma gaussiana com média  $\bar{x}$  e covariância  $P^-$  (onde o sinal  $-$  indica o valor da variável antes da incorporação da medida e o sinal  $+$  o valor depois desta incorporação). Da mesma forma  $v$  será uma gaussiana com média zero e covariância  $R$ , assumindo também que  $x$  e  $v$  são independentes.

- 5) O critério que vamos adotar para avaliação do desempenho do algoritmo utilizado para a estimativa será o critério Bayesiano, em que estaremos interessados em gerar uma descrição completa da distribuição de probabilidade da variável de interesse. Como estaremos interessados em estimar o valor da variável  $x$ , sabendo o valor da medida  $z(\omega) = z$ , estaremos na verdade interessados em gerar a função densidade condicional  $f_{x|z}(\xi|z)$ .

Como já foi mostrado,  $f_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}(\xi|\mathbf{z})$  é gaussiana, e como  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{v}$  são independentes e não correlacionados, temos que:

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{v}}(\xi,\eta) = f_{\mathbf{x}}(\xi) \cdot f_{\mathbf{v}}(\eta)$$

Se definirmos  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$  como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

podemos escrever  $f_{\mathbf{x},\mathbf{v}}(\xi,\eta)$  como  $f_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\gamma})$  que é uma gaussiana com

$$\mathbf{m}_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^- \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{uu}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

Mas uma transformação linear de uma gaussiana, como já foi mostrado em 2.2.15, continua sendo uma gaussiana; dessa forma podemos definir uma nova variável  $\mathbf{w}$  dada por:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

isto nada mais é do que definir  $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$  e provamos que teremos uma gaussiana com:

$$\mathbf{m}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}^- \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^- \\ \mathbf{H}\mathbf{x}^- \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{ww}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^- & \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}\mathbf{P}^- & \mathbf{H}\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

Como já foi mostrado vemos que, neste caso,  $f_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}(\xi|\mathbf{z})$  é uma gaussiana com:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- + [\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T][\mathbf{H}\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}^-]$$

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^- + [\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T][\mathbf{H}\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1}[\mathbf{H}\mathbf{P}^-]$$

Se definirmos uma matriz  $\mathbf{K}$ , chamada de matriz de ganho, como sendo

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^- \mathbf{H} \cdot [\mathbf{H}\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (2.3.2)$$

teremos portanto:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- + \mathbf{K} \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}^-] \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^- + \mathbf{K} \cdot [\mathbf{H}\mathbf{P}^-] \quad (2.3.4)$$

Como  $\mathbf{x}^+$  é a média da densidade condicional gaussiana simétrica  $f_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}(\xi|\mathbf{z})$ ,

podemos escolhê-la como a estimativa ótima da variável de interesse.

Se escolhermos  $\mathbf{x}^+$  como sendo a estimativa de  $\mathbf{x}$ , o vetor  $[\mathbf{x} - \mathbf{x}^+]$  é a gaussiana que descreve o erro cometido nesta estimativa. Dessa forma temos:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^+$$

Pode-se mostrar que a média condicional de  $\mathbf{e}$  é zero e a variância condicional vale

$$E_{\mathbf{x}}[\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T | \mathbf{z} = \mathbf{z}] = E_{\mathbf{x}}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}^+)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^+)^T | \mathbf{z} = \mathbf{z}] = \mathbf{P}^+$$

Assim, se escolhermos  $\mathbf{x}^+$  como uma estimativa de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{P}^+$  calculado acima é a covariância que descreve o erro cometido nesta estimativa.

#### 2.4 - Processos Estocásticos

Com o algoritmo para a estimação da variável de interesse definido, dado pelas equações 2.3.2 a 2.3.4, passaremos agora a estudar uma forma de introduzir a dinâmica do sistema em estudo. Com esta finalidade passaremos a estudar os chamados processos estocásticos.

Um processo estocástico pode ser definido como sendo uma família de variáveis randômicas  $\mathbf{x}(t, \xi)$  onde  $t \in T$  é usualmente a variável tempo e  $\xi$  pertence ao espaço amostral  $\Omega$ . A idéia de processo estocástico é uma generalização da idéia de variável randômica, no sentido de que cada experimento é associado uma função do tempo ao invés de um número ou vetor real. Dependendo da natureza do conjunto dos índices  $T$ , os processos estocásticos são classificados como contínuos ou discretos no tempo, conforme  $T$  seja respectivamente o intervalo  $(-\infty, \infty)$  ou o conjunto dos inteiros.

Como pode ser visto pela definição de processo estocástico, os conceitos e ferramentas da teoria da probabilidade apresentados até agora podem ser rapidamente aplicados no estudo dos processos estocásticos.

A função valor médio, ou média  $m_{\mathbf{x}}(\cdot)$  do processo  $\mathbf{x}(\cdot)$  é definida para todo  $t \in T$  por:

$$m_{\mathbf{x}}(t) = E[\mathbf{x}(t)]$$

isto é, o valor médio de  $x(\cdot)$  no instante  $t$ , onde a média é tomada sobre todo o conjunto de amostras do processo até aquele instante. Uma indicação da dispersão dos valores em torno da média no tempo  $t$ ,  $m_x(t)$ , é dada pela matriz covariância  $P_{xx}(\cdot)$ , definida pela equação 2.2.7.

Uma generalização do conceito dado acima, que contém a informação da rapidez da mudança do valor  $x(t)$  ao longo do tempo, é dada pelo Kernel da covariância  $P_{xx}(\cdot, \cdot)$ , definida para todo  $t_1, t_2 \in T$  por:

$$P_{xx}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))^T]$$

O conceito de segundo momento não central pode ser generalizado pelo Kernel da correlação  $\psi_{xx}(\cdot, \cdot)$  definido para todo  $t_1, t_2 \in T$  por:

$$\psi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)^T]$$

Das definições dadas acima podemos ver que:

$$\psi_{xx}(t_1, t_2) = P_{xx}(t_1, t_2) + m_x(t_1) \cdot m_x(t_2)^T$$

portanto se  $x(\cdot)$  é um processo com médio zero,  $\psi_{xx}(t_1, t_2) = P_{xx}(t_1, t_2)$ .

Para caracterizar a interrelação entre dois processos  $x(\cdot)$  e  $y(\cdot)$ , utilizaremos o Kernel da correlação cruzada,  $P_{xy}(\cdot, \cdot)$ , definida para todo  $t_1, t_2 \in T$  como:

$$P_{xy}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - m_x(t_1)) \cdot (y(t_2) - m_y(t_2))^T]$$

Outros conceitos da teoria da probabilidade que devemos definir são os conceitos de independência e não correlação. Um processo  $x(\cdot)$  é dito independente (no tempo) ou branco se, para qualquer escolha de  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ,  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$  formam um conjunto de vetores randômicos independentes.

De maneira similar, um processo  $x(\cdot, \cdot)$  é dito não correlacionado (no tempo) se, para todo  $t_1, t_2 \in T$  exceto para  $t_1 = t_2$ ,

$$\psi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)^T] = E[x(t_1)]E[x(t_2)^T]$$

ou

$$P_{xx}(t_1, t_2) = 0$$

Por comparação, dois processos  $x(\cdot)$  e  $y(\cdot)$  são não correlacionados entre si se,

para todo  $t_1, t_2 \in T$  (inclusive para  $t_1 = t_2$ ),

$$\psi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)^T] = E[x(t_1)]E[y(t_2)^T]$$

ou

$$P_{xy}(t_1, t_2) = 0$$

Uma caracterização particular de um processo estocástico é saber quando este é ou não estacionário. Um processo  $x(\cdot)$  é dito estacionário em sentido amplo se, para todo  $t, \tau \in T$ , os seguintes critérios são encontrados:

- 1)  $E[x(t)x(t)^T]$  é finito.
- 2)  $E[x(t)]$  é constante.
- 3)  $E[(x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x)^T]$  depende apenas da diferença de tempo  $\tau$ .

Pela definição acima, os Kernel da correlação e da covariância  $\psi_{xx}(t, t + \tau)$  e  $P_{xx}(t, t + \tau)$  para um processo  $x(\cdot)$  estacionário em sentido amplo são função apenas da diferença de tempo  $\tau$ .

Neste ponto devemos lembrar que nosso objetivo é criar modelos matemáticos que tratáveis e adequados que nos permitam estudar o comportamento do sistema em que estamos interessados. Este fato só ocorrerá com os chamados processos Gauss-Markovianos.

Um processo é dito gaussiano quando as densidades de probabilidades conjuntas  $P\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$  para qualquer conjunto  $t_1, t_2, \dots, t_n$  for gaussiana.

Um processo é dito markoviano quando a previsão do futuro se baseia apenas no conhecimento do presente, sem requerer, necessariamente, o conhecimento do passado, ou seja, se  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$P\{x(t_n) | x(t_{n-1}), \dots, x(t_1)\} = P\{x(t_n) | x(t_{n-1})\}$$

Como todo sistema possui um ruído associado aos dados de entrada e saída este também deve ser definido de tal forma que possa ser tratado matematicamente. Para este fim definimos o chamado processo gaussiano branco.

Um processo é gaussiano branco se, para qualquer escolha de  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ , os  $N$  vetores randômicos  $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_n)$  forem vetores randômicos gaussianos independentes. Dessa forma se  $T$  for um conjunto de instantes discretos de tempo teremos que:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}(t_i, t_j) = \mathbf{0} \quad \text{se } t_i \neq t_j$$

Se tomarmos  $T$  como um conjunto de intervalos de tempo, um processo gaussiano branco implica na não correlação entre  $\mathbf{x}(t_i)$  e  $\mathbf{x}(t_j)$ , a não ser para  $t_i$  e  $t_j$  separados por uma quantidade infinitesimal:

$$E[\mathbf{x}(t_i)\mathbf{x}^T(t_j)] = \psi_{\mathbf{xx}}(t_i)\delta(t_i - t_j)$$

Se considerarmos um processo gaussiano branco estacionário, não no sentido amplo visto que  $E[\mathbf{x}(t_i)\mathbf{x}^T(t_j)]$  não é finito, teremos que a densidade espectral de potência deste processo será constante sobre todas as frequências, e este será um processo com potência infinita, o que não existe. Portanto, se estamos interessados em desenvolver um modelo de sistema contínuo na forma de equações diferenciais lineares dirigidas por este processo, temos que a solução para as equações diferenciais não podem ser obtidas rigorosamente por este processo.

Para este fim lançaremos mão do chamado movimento Browniano, através dele poderemos modelar o sistema por meio de equações diferenciais estocásticas cujas soluções podem ser obtidas.

O processo  $\beta(\dots)$  é definido como um processo de difusão através de movimento Browniano se:

- 1) É um processo com incrementos independentes
- 2) O incremento for uma variável randômica gaussiana de tal forma que, para qualquer  $t_1$  e  $t_2$  dentro do intervalo  $T$ ,

$$E\{[\beta(t_2) - \beta(t_1)]\} = 0$$

$$E\{[\beta(t_2) - \beta(t_1)]^2\} = q|t_2 - t_1|$$

- 3)  $\beta(t_0, \omega_1) = 0$  para todo  $\omega_1 \in \Omega$

Como  $\beta(t_1, \cdot)$  é uma variável randômica composta da soma de incrementos independentes gaussianos, esta também é gaussiana com estatística dada por:

$$m_\beta = E[\beta(t_1)] = 0$$

$$P_{\beta\beta} = E[\beta(t_1)^2] = q[t_1 - t_0]$$

dessa forma o valor  $q$  nos indica quão rapidamente o valor quadrático médio de  $\beta(\cdot)$  diverge do seu valor zero no instante  $t_0$ .

Podemos agora fazer uma extensão e definir um vetor movimento browniano como um processo estocástico vetorial  $\beta(\cdot)$ , que possui incrementos independentes gaussianos com:

$$E[\beta(t)] = 0$$

$$E\{[\beta(t_2) - \beta(t_1)][\beta(t_2) - \beta(t_1)]^T\} = \int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt$$

para  $t_2 \geq t_1$ , e  $Q(t)$  é simétrica e positiva semidefinida para todo  $t \in T$  e  $Q(t)$  é pelo menos contínua por partes. O vetor gaussiano branco correspondente pode ser definido como a hipotética derivada temporal do vetor movimento Browniano: um processo gaussiano  $w(\cdot)$  com

$$E[w(t)] = 0$$

$$E[w(t)w^T(t')] = Q(t)\delta(t - t')$$

para todo  $t, t' \in T$ , com a mesma definição para  $Q(t)$ .

Passaremos agora a considerar as chamadas integrais estocásticas, para isto devemos lembrar da definição básica da integral como o limite de uma soma, e analisar quais as condições em que este limite existe. Para a definição rigorosa destas integrais necessitamos de conceitos definidos em análise funcional, que serão introduzidos aqui heurísticamente.

Se  $a(\cdot)$  é uma função escalar conhecida contínua por partes e  $\beta(\cdot)$  é um movimento Browniano escalar com difusão  $q(t)$  para todo  $t \in T = [0, \infty)$ , queremos dar

sentido a expressão

$$I(t, \cdot) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\beta(\tau, \cdot)$$

chamada de integral estocástica escalar. Para que esta expressão tenha sentido a integral de Riemann  $\int_{t_0}^t a(\tau)^2 Q(\tau) d\tau$  deve ter um valor finito. Desta forma podemos definir construtivamente a integral como a soma de  $N$  incrementos randômicos variáveis, ou seja:

$$I_N(t, \cdot) = \sum_{i=0}^{N-1} a_N(t_i) [\beta(t_{i+1}, \cdot) - \beta(t_i, \cdot)] = \int_{t_0}^t a_N(\tau) d\beta(\tau, \cdot)$$

a prova desta igualdade encontra-se em /6/ e não será feita aqui.

Extendendo este conceito para o caso vetorial teremos que o vetor movimento Browniano  $s$ -dimensional  $\beta(\cdot, \cdot)$  é um processo gaussiano composto de incrementos independentes com estatística

$$E[\beta(t)] = 0$$

$$E\{[\beta(t_2) - \beta(t_1)][\beta(t_2) - \beta(t_1)]^T\} = \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau$$

com a matriz difusão  $s \times s$   $Q(t)$  simétrica positiva definida e  $Q(\cdot)$  uma matriz composta de funções contínuas por partes. Se  $A(\cdot)$  é uma matriz  $n \times s$  de funções temporais contínuas por partes, podemos definir uma integral estocástica vetorial  $n$ -dimensional dada por:

$$I(t, \cdot) = \int_{t_0}^t A(\tau) d\beta(\tau)$$

significando que  $I(t, \cdot)$  é o valor do limite de convergência pela média quadrática da integral  $I_N(t, \cdot)$ .

O vetor  $I(t, \cdot)$  é gaussiano com estatística

$$E[I(t)] = 0$$

$$E[I(t)I^T(t)] = \int_{t_0}^t A(\tau)Q(\tau)A^T(\tau)d\tau$$

Vendo este resultado em função de  $t \in T$  e  $\omega \in \Omega$ , o processo estocástico  $I(\cdot, \cdot)$  é ele mesmo um movimento Browniano com difusão redefinida por:

$$E\{[I(t_2) - I(t_1)][I(t_2) - I(t_1)]^T\} = \int_{t_1}^{t_2} A(\tau)Q(\tau)A^T(\tau)d\tau$$

Dada uma integral estocástica na forma

$$I(t) = I(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau)d\beta(\tau)$$

a diferencial estocástica de  $I(t)$  pode ser definida como

$$dI(t) = A(\tau)d\beta(\tau) \quad (2.4.1)$$

Esta diferencial está definida na forma de integral estocástica e, como o movimento Browniano não é diferenciável, esta expressão só tem sentido se  $dI(t)$  integrada no intervalo de  $t_0$  até um instante  $t$  fixo nos fornecer uma variável randômica, ou seja:

$$\int_{t_0}^t dI(t) = I(t) - I(t_0)$$

Vamos supor que temos uma integral estocástica, denotada por  $s(\cdot, \cdot)$ , definida por:

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau)d\beta(\tau)$$

Assumiremos que existe uma matriz de funções diferenciáveis,  $D(\cdot)$ , e um processo randômico  $y(\cdot)$  definido por:

$$y(t) = D(t)s(t)$$

Particionando o intervalo  $[t_0, t)$  em  $N$  intervalos e utilizando o teorema do valor médio podemos escrever:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} D(\tau_i)[t_{i+1} - t_i] + \sum_{i=0}^{N-1} D(t_i)[s(t_{i+1}) - s(t_i)] + D(t_0)s(t_0)$$

Tomando o limite da média quadrática, com  $N \rightarrow \infty$ , teremos:

$$y(t) = \int_{t_0}^t D(\tau)s(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t D(\tau)ds(\tau) + D(t_0)s(t_0) \quad (2.4.2)$$

O primeiro termo da expressão acima pode ser interpretado como uma integral de Riemann comum para cada uma das funções amostradas  $s(.,w_i)$  de  $s(.,.)$ , em compensação o segundo termo é uma integral estocástica e só pode ser definida no sentido de média quadrática.

Tomando a equação 2.4.2 e a equação 2.4.1 podemos escrever:

$$dy(t) = D(t)s(t) + D(t)ds(t)$$

Voltando ao nosso problema, queremos um modelo de sistema da forma  $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t)$ , que pode ser escrita, na forma diferencial, como:

$$dx(t) = F(t)x(t)dt + G(t)d\beta(t)$$

Retomando a interpretação de diferenciais estocásticas, queremos encontrar um processo  $x(.,.)$  que satisfaz a seguinte equação:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau)x(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t G(\tau)d\beta(\tau)$$

Podemos mostrar que a solução da equação acima /6/ é da forma:

$$x(t) = \phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t,\tau)G(\tau)d\beta(\tau) \quad (2.4.3)$$

onde  $\phi(t,t_0)$  é chamada de matriz transição e satisfaz as seguintes propriedades:

$$1) \phi(t,t) = I$$

$$2) \phi(t_0,t_0) = I$$

Passaremos agora a caracterizar as propriedades estatísticas da solução acima.

A média  $m_x(.,.)$  para todo  $t \in T$  vale:

$$m_x(.,.) = E[x(t)] = \phi(t,t_0)E[x(t_0)] + E\left[\int_{t_0}^t \phi(t,\tau)G(\tau)d\beta(\tau)\right]$$

$$m_x(t) = \phi(t,t_0)m_x(t_0)$$

isto porque a integral estocástica tem média zero por definição.

O valor médio quadrático de  $\mathbf{x}(t)$  é obtido a partir de  $E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)]$ , que possui 4 termos. Como o movimento Browniano é implicitamente independente de  $\mathbf{x}(t_0)$  os termos cruzados são iguais a zero, e podemos escrever o valor médio quadrático, ou matriz correlação, como:

$$E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] = \phi(t, t_0)E[\mathbf{x}(t_0)\mathbf{x}^T(t_0)]\phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\phi^T(t, \tau)d\tau$$

onde  $Q(t)$  é o valor de difusão do movimento Browniano  $\beta(\cdot)$  no instante  $t$ .

A covariância pode ser deduzida a partir do valor quadrático médio fazendo as substituições definidas pela equação 2.2.12 para  $t$  e  $t_0$  e teremos:

$$P_{\mathbf{xx}}(t) = \phi(t, t_0)P_{\mathbf{xx}}(t_0)\phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\phi^T(t, \tau)d\tau$$

Para especificarmos completamente a densidade de probabilidade do processo  $\mathbf{x}(\cdot)$ , devemos obter o kernel da covariância  $P_{\mathbf{xx}}(t_1, t_j)$ .

Supondo  $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_2) &= \phi(t_2, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} \phi(t_2, \tau)G(\tau)d\beta(\tau) \\ &= \phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \phi(t_2, t_1)\int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau)G(\tau)d\beta(\tau) \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \phi(t_2, \tau)G(\tau)d\beta(\tau) \\ &= \phi(t_2, t_1)\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \phi(t_2, \tau)G(\tau)d\beta(\tau) \end{aligned}$$

como o incremento em  $\beta(\cdot)$  dentro do intervalo  $[t_1, t_2]$  é independente do incremento no intervalo  $[t_0, t_1]$  e também de  $\mathbf{x}(t_0)$ , a autocorrelação  $E[\mathbf{x}(t_2)\mathbf{x}^T(t_1)]$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$E[\mathbf{x}(t_2)\mathbf{x}^T(t_1)] = \phi(t_2, t_1)E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}^T(t_1)]$$

portanto o kernel da covariança para  $t_2 \geq t_1$  vale:

$$P_{xx}(t_2, t_1) = \Phi(t_2, t_1)P_{xx}(t_1, t_1) = \Phi(t_2, t_1)P_{xx}(t_1)$$

Uma observação mais cuidadosa da solução deduzida acima nos mostra que o processo  $x(\cdot, \cdot)$  não só é gaussiano, mas sim um processo Gauss-Markoviano.

Entretanto, é mais conveniente utilizar um conjunto de equações diferenciais para  $m_x(t)$  e  $P_{xx}(t)$  de forma a descrever a evolução destas variáveis no tempo.

A propagação de  $m_x(t)$  é expressa por:

$$\begin{aligned} \dot{m}_x(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0)m_x(t_0) = F(t)\Phi(t, t_0)m_x(t_0) \\ m_x(t) &= F(t)m_x(t_0) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Diferenciando a equação de  $P_{xx}(t)$  e aplicando a regra de Leibnitz podemos escrever a equação de propagação para a covariança, que será expressa por:

$$\dot{P}_{xx}(t) = F(t)P_{xx}(t) + P_{xx}(t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \quad (2.4.5)$$

As equações 2.4.4 e 2.4.5 são as equações que regem o modelo dinâmico aqui adotado. Os controles determinísticos podem ser acrescentados sem aumento de complexidade para a dedução feita até aqui, fornecendo o seguinte resultado:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)d\beta(\tau)$$

Como  $\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$  é um vetor  $n$ -dimensional conhecido, este não introduz nenhuma incerteza adicional ao modelo, afetando apenas a média, que passa a ser expressa por:

$$m_x(t) = \Phi(t, t_0)m_x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Para completar nosso modelo devemos introduzir as medidas das variáveis do sistema que nos são disponíveis. Estas medidas são descritas por:

$$z(t_i) = H(t_i)x(t_i) + v(t_i)$$

onde o número de medidas  $m$  é tipicamente menor do que a dimensão do vetor estado do

sistema,  $\mathbf{H}(t_i)$  é chamada matriz medida e relaciona as medidas realizadas com as variáveis de estado e  $\mathbf{v}(t_i)$  é um vetor  $m$ -dimensional que representa o ruído na medida realizada.

Os dados reais dos sensores serão realizações da equação acima, ou seja:

$$\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{z}(t_i, \mathbf{w}_k) = \mathbf{H}(t_i)\mathbf{x}(t_i, \mathbf{w}_k) + \mathbf{v}(t_i, \mathbf{w}_k)$$

O vetor ruído  $\mathbf{v}(\cdot, \cdot)$  é assumido como um processo estocástico gaussiano branco com:

$$E[\mathbf{v}(t_i)] = 0$$

$$E[\mathbf{v}(t_i)\mathbf{v}^T(t_j)] = \begin{cases} \mathbf{R}(t_i) & t_i = t_j \\ 0 & t_i \neq t_j \end{cases}$$

Nossa atenção está voltada para um modelo de dinâmica contínua no tempo com medidas discretas no tempo por ser este mais próximo da situação real.

Este modelo nos fornece o seguinte resultado para a média das medidas:

$$\mathbf{m}_z(t_i) = \mathbf{H}(t_i)E[\mathbf{x}(t_i)] + E[\mathbf{v}(t_i)]$$

$$\mathbf{m}_z(t_i) = \mathbf{H}(t_i)\mathbf{m}_x(t_i)$$

O kernel da covariância, como pode ser demonstrado /6/, é dado por:

$$\mathbf{P}_{zz}(t_j, t_i) = \begin{cases} \mathbf{H}(t_j)\mathbf{P}_{xx}(t_j, t_i)\mathbf{H}^T(t_j) & t_j \neq t_i \\ \mathbf{H}(t_i)\mathbf{P}_{xx}(t_i, t_i)\mathbf{H}^T(t_i) + \mathbf{R}(t_i) & t_j = t_i \end{cases}$$

Temos agora um modelo completo para o nosso sistema, levando em conta sua dinâmica e o ruído associado a ele.

## 2.5 – Filtro Kalman Linear

Partindo do princípio de que o sistema que nos interessa pode ser representado pela equação

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t)$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  é o estado do sistema no instante  $t$ ,  $\mathbf{F}(t)$  é uma matriz  $n \times n$  que nos informa qual a dinâmica do sistema,  $\mathbf{B}(t)$  é uma matriz  $n \times r$  e  $\mathbf{u}(t)$  é um vetor  $r$ -dimensional que estão relacionados com os dados de controle do sistema e  $\mathbf{G}(t)$  é uma matriz  $n \times n$

que está relacionada com o ruído dos dados de entrada. Como a equação acima está simplificada  $w(t)$  é um vetor  $s$ -dimensional que representa um ruído gaussiano branco com:

$$E[w(t)] = 0$$

$$E[w(t)w^T(t')] = Q(t)\delta(t - t')$$

A equação diferencial de estado é propagada a partir de uma condição inicial  $x(t_0)$  onde

$$E[x(t_0)] = x_0$$

$$E[(x - x_0)(x - x_0)^T] = P_0$$

As medidas são feitas em pontos discretos  $t_1, t_2, \dots, t_i$ , e são modeladas pela seguinte relação:

$$z(t_i) = H(t_i)x(t_i) + v(t_i)$$

onde  $z(\cdot)$  é um vetor  $m$ -dimensional que contém a medida efetuada,  $H(\cdot)$  é uma matriz  $m \times m$  que relaciona a medida com as variáveis de estado, e  $v(\cdot)$  é um vetor  $m$ -dimensional gaussiano branco com:

$$E[v(t_i)] = 0$$

$$E[v(t_i)v^T(t_j)] = \begin{cases} R & t_i = t_j \\ 0 & t_i \neq t_j \end{cases}$$

onde  $R(t_i)$  é uma matriz  $m \times m$  simétrica e positiva definida, implicando que todas componentes do vetor são corrompidas por ruídos, e que não existe uma combinação linear destas componentes que esteja livre de ruído.

Para a dedução das equações que regem o filtro Kalman iremos partir do seguinte raciocínio: primeiro fazemos uma medida em  $t_{i-1}$  e fazemos uma estimativa de  $x_{t_{i-1}}^+$  e  $P_{t_{i-1}}^+$ , usando a equação de estado do sistema propagamos a estimativa até o tempo  $t_i$  onde uma nova medida e uma nova estimativa  $x_{t_i}^+$  e  $P_{t_i}^+$  é efetuada.

Para se fazer a estimativa utilizaremos as equações 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4 que são:

$$\mathbf{x}_{t_{i-1}}^+ = \mathbf{x}_{t_{i-1}}^- + \mathbf{K}[\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{t_{i-1}}^-] \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_{t_{i-1}}^+ = \mathbf{P}_{t_{i-1}}^- - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_{t_{i-1}}^-$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{t_{i-1}}^- \mathbf{H}^T [\mathbf{H}\mathbf{P}_{t_{i-1}}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1}$$

Falta, portanto, resolver a equação de estado do sistema e construir um algoritmo para propagar esta estimativa do instante  $t_{i-1}^+$  até o instante  $t_i^-$ . Do ponto de vista Bayesiano, estamos realmente interessados na densidade de probabilidade para  $\mathbf{x}(t_{i-1})$  condicionada as mediadas feitas até aquele instante,  $f_{\mathbf{x}(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi|\mathbf{z}_{t_{i-1}})$ , e como esta densidade pode ser propagada até o instante de uma nova medida para gerar  $f_{\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_i)}(\xi|\mathbf{z}_{t_i})$ .

Para iniciar a dedução assumiremos que  $f_{\mathbf{x}(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi|\mathbf{z}_{t_{i-1}})$  é uma densidade condicional gaussiana onde podemos definir  $\mathbf{x}(t_{i-1}^+)$  e  $\mathbf{P}(t_{i-1}^+)$  como a média condicional e a covariança condicional, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{i-1}^+) &= E[\mathbf{x}(t_{i-1}^+) | \mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}] \\ \mathbf{P}(t_{i-1}^+) &= E\{[\mathbf{x}(t_{i-1}) - \mathbf{x}(t_{i-1}^+)][\mathbf{x}(t_{i-1}) - \mathbf{x}(t_{i-1}^+)]^T | \mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}\} \end{aligned}$$

Durante a dedução das equações de propagação do filtro iremos verificar que a covariança condicional é igual a covariança não condicional. Em outras palavras, a covariança não depende dos valores atuais das medidas realizadas e, portanto, pode ser computada sem o conhecimento destas. Por esta razão, estamos aptos a pre-computar a história temporal da covariança dos erros cometidos ao usar  $\mathbf{x}(t_{i-1}^+)$  como a estimativa ótima do estado do sistema no instante  $t_i$ .

Para tornar a dedução algebricamente simples iremos desprezar as entradas de controle, que serão introduzidas através da modificação da equação de propagação da média, visto que estas entradas não tem influência na dispersão da função densidade e sim em sua localização.

Pelo nosso modelo,  $\mathbf{x}(t_i)$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1})\mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{w}_d(t_{i-1})$$

Como  $\mathbf{x}(t_i)$  é expresso como uma combinação linear de  $\mathbf{x}(t_{i-1})$  e  $\mathbf{w}_d(t_{i-1})$ ,  $f_{\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi|\mathfrak{F}_{i-1})$  será gaussiana se mostrarmos que  $f_{\mathbf{x}(t_i), \mathbf{w}_d(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi, \rho|\mathfrak{F}_{i-1})$  é gaussiana. Utilizando o fato de  $\mathbf{w}_d(t_{i-1})$  ser independente de  $\mathbf{x}(t_{i-1})$  e  $\mathbf{z}(t_{i-1})$  podemos escrever a regra de Bayes, dada pela equação 2.2.1, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}(t_i), \mathbf{w}_d(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi, \rho|\mathfrak{F}_{i-1}) &= \frac{f_{\mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi, \mathfrak{F}_{i-1}) \cdot f_{\mathbf{w}_d(t_{i-1})}(\rho)}{f_{\mathbf{z}(t_{i-1})}(\mathfrak{F}_{i-1})} \\ &= f_{\mathbf{x}(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi|\mathfrak{F}_{i-1}) \cdot f_{\mathbf{w}_d(t_{i-1})}(\rho) \end{aligned}$$

A densidade  $f_{\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi|\mathfrak{F}_{i-1})$  foi assumida como gaussiana no início da dedução, e  $f_{\mathbf{w}_d(t_{i-1})}(\rho)$  é gaussiana de acordo com o modelo dinâmico utilizado. Dessa forma temos que  $f_{\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi|\mathfrak{F}_{i-1})$  é, de fato, uma densidade condicional gaussiana.

Para especificar completamente esta densidade, devemos computar sua média e sua covariância. A média condicional é encontrada invocando a linearidade do operador da expectativa condicional e a não randomicidade de  $\Phi(t_i, t_{i-1})$  para escrever

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}\} &= E\{\Phi(t_i, t_{i-1})\mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{w}_d(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}\} \\ &= \Phi(t_i, t_{i-1})E\{\mathbf{x}(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}\} \\ &\quad + E\{\mathbf{w}_d(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}\} \end{aligned}$$

mas  $\mathbf{w}_d(t_{i-1})$  é independente de  $\mathbf{z}(t_{i-1})$ , portanto sua densidade condicional é igual a densidade não condicional, que foi assumida como sendo zero, portanto

$$E\{\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}\} = \Phi(t_i, t_{i-1})E\{\mathbf{x}(t_{i-1})|\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}\}$$

Agora supomos que  $\mathbf{x}(t_i)$  é a média condicional de  $\mathbf{x}(t_i)$  antes da medida  $\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{z}_i$  ser realizada e processada, isto é,

$$\mathbf{x}(t_i) = E[\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}]$$

portanto podemos escrever a relação de propagação da média condicional como

$$\mathbf{x}(t_i^-) = \Phi(t_i, t_{i-1})\mathbf{x}(t_{i-1}^+) \quad (2.5.1)$$

Similarmente, se definirmos  $P(t_i^-)$  como a covariância condicional de  $\mathbf{x}(t_i^-)$  antes da medida  $\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{z}_i$  ser realizada e processada, teremos

$$P(t_i^-) = E\{[\mathbf{x}(t_i^-) - \mathbf{x}(t_i^-)] [\mathbf{x}(t_i^-) - \mathbf{x}(t_i^-)]^T | \mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}\}$$

e podemos escrever a relação de propagação da covariância condicional como

$$P(t_i^-) = \Phi(t_i, t_{i-1})P(t_{i-1}^+)\Phi^T(t_i, t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\Phi^T(t_i, \tau)d\tau \quad (2.5.2)$$

Se  $\mathbf{x}(t_i^-)$  for usada como a estimativa de  $\mathbf{x}(t_i)$  antes da medida  $\mathbf{z}_i$  ser processada, então  $[\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_i^-)]$  será o erro cometido pelo estimador  $\mathbf{x}(t_i^-)$  para uma dada história das medidas  $\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}$ . Consequentemente  $P(t_i^-)$  será a covariância condicional não só do estado, mas também do erro cometido pelo uso da média condicional como estimador de estado.

Neste ponto temos que introduzir a nova medida  $\mathbf{z}(t_i, \omega_i) = \mathbf{z}_i$ , ou seja, devemos calcular a densidade  $f_{\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{z}(t_i)}(\xi | \mathbf{z}_i)$ . A aplicação repetida da regra de Bayes nos permite escrever esta densidade em função de outras três densidades da seguinte forma:

$$f_{\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{z}(t_i)} = \frac{f_{\mathbf{z}(t_i) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{z}(t_{i-1})} f_{\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{z}(t_{i-1})}}{f_{\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{z}(t_{i-1})}} \quad (2.5.3)$$

Observando a expressão acima vemos que o segundo termo do numerador já foi calculado, dessa forma devemos nos preocupar com o primeiro termo do numerador.

De acordo com o modelo utilizado, a medida  $\mathbf{z}(t_i)$  é dada por:

$$\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{H}(t_i)\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{v}(t_i)$$

Nós desejamos obter a função densidade da variável randômica  $\mathbf{z}(t_i)$  condicionada não só ao conhecimento prévio das medidas anteriores mas também sobre ao fato de que sabemos que  $\mathbf{x}(t_i)$  assume o valor  $\xi$ . Este fato fixa a variável randômica  $\mathbf{H}(t_i)\mathbf{x}(t_i)$  ao

valor conhecido de  $\mathbf{H}(t_i)\xi$ , sem nenhuma incerteza. Além disso,  $\mathbf{v}(t_i)$  é independente de  $\mathbf{x}(t_i)$  e  $\mathbf{z}(t_{i-1})$ , e foi assumida como uma gaussiana com média zero e covariância dada pela matriz  $\mathbf{R}(t_i)$ . Condicionada a  $\mathbf{x}(t_i) = \xi$  e  $\mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathfrak{F}_{i-1}$ ,  $\mathbf{z}(t_i)$  é uma combinação linear de vetores gaussianos randômicos conhecidos, portanto  $f_{\mathbf{z}(t_i)|\mathbf{x}(t_i),\mathbf{z}(t_{i-1})}(\zeta_i|\xi,\mathfrak{F}_{i-1})$  é uma densidade gaussiana, completamente especificada por uma média e uma covariância. A média é dada por:

$$E\{\mathbf{z}(t_i)|\mathbf{x}(t_i) = \xi, \mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathfrak{F}_{i-1}\} = \mathbf{H}(t_i)\xi$$

A matriz covariância é dada por:

$$E\{[\mathbf{z}(t_i) - \mathbf{H}(t_i)\xi][\mathbf{z}(t_i) - \mathbf{H}(t_i)\xi]^T | \mathbf{x}(t_i) = \xi, \mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathfrak{F}_{i-1}\} = \mathbf{R}(t_i)$$

Tendo avaliado o termo do numerador da equação 2.5.3, passaremos a considerar o denominador  $f_{\mathbf{z}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\zeta_i|\mathfrak{F}_{i-1})$ . A medida  $\mathbf{z}(t_i)$  é novamente descrita como:

$$\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{H}(t_i)\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{v}(t_i)$$

mas desta vez estamos condicionados apenas pela história temporal das medidas. Primeiro queremos mostrar que  $f_{\mathbf{z}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\zeta_i|\mathfrak{F}_{i-1})$  é gaussiana. Como  $\mathbf{z}(t_i)$  é uma combinação linear de  $\mathbf{x}(t_i)$  e  $\mathbf{v}(t_i)$ , e estaremos aptos a este objetivo se pudermos mostrar que, condicionado a  $\mathbf{z}(t_{i-1})$ ,  $\mathbf{x}(t_i)$  e  $\mathbf{v}(t_i)$  são gaussianas conjuntas. A regra de Bayes pode ser escrita como:

$$f_{\mathbf{x}(t_i),\mathbf{v}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi,\eta|\mathfrak{F}_{i-1}) = f_{\mathbf{v}(t_i)|\mathbf{x}(t_i),\mathbf{z}(t_{i-1})}(\eta|\xi,\mathfrak{F}_{i-1}) \cdot f_{\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi|\mathfrak{F}_{i-1})$$

mas  $\mathbf{v}(t_i)$  é independente de  $\mathbf{x}(t_i)$  e  $\mathbf{z}(t_{i-1})$ , portanto:

$$f_{\mathbf{x}(t_i),\mathbf{v}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi,\eta|\mathfrak{F}_{i-1}) = f_{\mathbf{v}(t_i)}(\eta) \cdot f_{\mathbf{x}(t_i)|\mathbf{z}(t_{i-1})}(\xi|\mathfrak{F}_{i-1})$$

As duas densidades a direita da expressão são, separadamente, gaussianas

portanto seu produto também será uma gaussiana com média dada por:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{z}(t_i) | \mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathfrak{F}_{i-1}] &= \mathbf{H}(t_i) E[\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathfrak{F}_{i-1}] + \\ &E[\mathbf{v}(t_i) | \mathbf{z}(t_{i-1}) = \mathfrak{F}_{i-1}] \\ &= \mathbf{H}(t_i) \mathbf{x}(t_i^-) \end{aligned}$$

e covariância dada por:

$$\begin{aligned} E\{[\mathbf{z}(t_i) - \mathbf{H}(t_i) \mathbf{x}(t_i^-)][\mathbf{z}(t_i) - \mathbf{H}(t_i) \mathbf{x}(t_i^-)]^T | \mathbf{z}(t_i) = \mathfrak{F}_{i-1}\} &= \\ &= \mathbf{H}(t_i) \mathbf{P}(t_i^-) \mathbf{H}^T(t_i) + \mathbf{R}(t_i) \end{aligned}$$

Dessa forma obtivemos cada uma das densidades gaussianas necessárias para o cálculo de  $f_{\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{z}(t_i)}(\xi | \mathfrak{F}_i)$ .

Para sermos consistentes com nossa definição de  $\mathbf{x}(t_{i-1}^+)$ , a média desta densidade condicional é expressa por  $\mathbf{x}(t_i^+)$  e é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_i^+) &= E[\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{z}(t_i) = \mathbf{z}_i] = [\mathbf{P}(t_i^-)^{-1} + \mathbf{H}^T(t_i) \mathbf{R}^{-1}(t_i) \mathbf{H}(t_i)]^{-1} \cdot \\ &[\mathbf{P}(t_i^-)^{-1} \mathbf{x}(t_i^-) + \mathbf{H}^T(t_i) \mathbf{R}^{-1}(t_i) \mathbf{z}_i] \end{aligned}$$

Similarmente, a covariância é expressa por  $\mathbf{P}(t_i^+)$  e é dada por:

$$\mathbf{P}(t_i^+) = E\{[\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_i^+)][\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_i^+)]^T\} = [\mathbf{P}(t_i^-)^{-1} + \mathbf{H}^T(t_i) \mathbf{R}^{-1}(t_i) \mathbf{H}(t_i)]^{-1}$$

Como é indicado pela notação, a média condicional  $\mathbf{x}(t_i^+)$  é escolhida como a estimativa ótima. Esta não é só a média condicional mas também o modo condicional: ela maximiza a densidade condicional de  $\mathbf{x}(t_i)$  condicionada a completa história das medidas, isto é, é mais provável que  $\mathbf{x}(t_i)$  se encontre no intervalo entre  $[\mathbf{x}(t_i^+) + \epsilon]$  e  $[\mathbf{x}(t_i^+) - \epsilon]$  do que em qualquer região equivalente de  $\xi$ . Como já foi mencionado acima, se tomamos  $\mathbf{x}(t_i^+)$  como a estimativa ótima,  $\mathbf{P}(t_i^+)$  não só é a covariância do estado, como também a covariância do erro cometido neste estimativa do valor do estado.

Apesar das expressões acima serem válidas, elas envolvem inversões de matrizes  $n \times n$ , onde  $n$  é a dimensão do vetor estado. Pode-se mostrar /6/ que  $\mathbf{x}(t_i^+)$  e  $\mathbf{P}(t_i^+)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_i^+) &= \mathbf{x}(t_i^-) + \mathbf{P}(t_i^-) \mathbf{H}^T(t_i) [\mathbf{H}(t_i) \mathbf{P}(t_i^-) \mathbf{H}^T(t_i) + \mathbf{R}(t_i)]^{-1} [\mathbf{z}(t_i) - \mathbf{H}(t_i) \mathbf{x}(t_i^-)] \\ \mathbf{P}(t_i^+) &= \mathbf{P}(t_i^-) - \mathbf{P}(t_i^-) \mathbf{H}^T(t_i) [\mathbf{H}(t_i) \mathbf{P}(t_i^-) \mathbf{H}^T(t_i) + \mathbf{R}(t_i)]^{-1} \mathbf{H}(t_i) \mathbf{P}(t_i^-) \end{aligned}$$

Devemos nos lembrar que esta dedução foi feita assumindo que  $P(t_1^-)$  era positiva definida, portanto devemos analisar agora sob quais condições isto é válido. Primeiro vamos verificar se  $P(t_{i-1}^+)$  sendo positiva definida é condição suficiente para  $P(t_1^+)$  também o ser-lo. Se  $P(t_{i-1}^+)$  é assumida como positiva definida, então  $P(t_1^+)$  também será, visto que  $\Phi(t_i, t_{i-1})P(t_{i-1}^+)\Phi^T(t_i, t_{i-1})$  é positiva definida pelas propriedades da matriz de transição definidas na seção 2.4; o termo integral utilizado no cálculo de  $P(t_1^+)$  é, na pior das hipóteses, positivo semi-definido, portanto  $P(t_1^-)$  é positivo definido se  $P(t_{i-1}^+)$  o for. Como  $P(t_1^-)$  é assumida positiva definida,  $P(t_1^-)^{-1}$  também o é. Somado a ele existe o termo  $H^T(t_1)R^{-1}(t_1)H(t_1)$ , o qual é positivo semi-definido, visto que  $R(t_1)$  é assumida positiva definida e portanto  $R^{-1}(t_1)$  também é positiva definida levando  $H^T(t_1)R^{-1}(t_1)H(t_1)$  a ser uma matriz  $n \times n$  de rank no mínimo  $m$ . Dessa forma temos que o resultado desta soma também será positiva definida.

Podemos concluir que desde que  $P(t_1^-)$  ou  $P(t_1^+)$  se torne positiva definida, a covariância permanecerá positiva definida ao longo do tempo. Por esta razão podemos deduzir duas condições suficientes, mas não necessárias, para  $P(t_1^-)$  inicial ser positiva definida: ou  $P_0$  é positiva definida, ou o termo integral é separadamente positivo definido (isto é,  $Q(t)$  é positiva definida para todo  $t \in [t_0, t_1)$  e a descrição do sistema é totalmente controlável do ponto de vista do ruído que dirige sua dinâmica). Nenhuma destas condições são restritivas com relação ao modelo adotado.

Para completar a demonstração das equações do filtro Kalman, devemos introduzir as entradas dos controles determinísticos. Como foi previamente descrito, a única mudança no algoritmo do estimador será que o estado estimado (média condicional) será dado por:

$$x(t_1^-) = \Phi(t_1, t_{i-1}^+)x(t_{i-1}^+) + \int_{t_{i-1}^+}^{t_1^-} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.5.5)$$

Desta forma, o modelo matemático contido na estrutura do filtro nos gera  $x(t_1^-)$ , a

melhor estimativa do estado no tempo  $t_1$  antes do processamento da medida realizada neste instante,  $z(t_1, \omega_1)$ . Além disto, o modelo utilizado também é capaz de gerar  $[H(t_1)x(t_1^-)]$ , que é a melhor estimativa do que será a medida no instante  $t_1$  antes desta ser feita. A entrada do algoritmo é  $z_1$ , o valor da medida  $z(t_1)$ . O resíduo da medida  $r(t_1)$  será gerado pela diferença entre o valor real da medida  $z_1$  e a melhor estimativa antes desta ser realizada, ou seja:

$$r(t_1) = z_1 - H(t_1)x(t_1^-)$$

Este resíduo é, então, processado através da matriz de ganho  $K(t_1)$  para gerar um termo de correção que será somado a  $x(t_1^-)$  para a obtenção de  $x(t_1^+)$ , ou seja, o filtro tem um algoritmo com estrutura de estimador corretor.

Para especificar completamente o algoritmo do filtro Kalman, devemos definir não só o modelo do sistema, mas também a descrição estatística das incertezas envolvidas no modelo adotado. O modelo é especificado por  $F(t_1)$  ou  $\phi(t_1, \tau)$ ,  $B(t_1)$ ,  $G(t_1)$  e  $H(t_1)$  para todos os instantes de interesse, e as incertezas são definidas por  $x_0$ ,  $P_0$ , e pelas histórias temporais de  $Q(t_1)$  e  $R(t_1)$ .

As equações de propagação do filtro, equações 2.5.5 e 2.5.2, são convenientes se o problema considerado for modelado por uma dinâmica estacionária e for dirigido por um ruído com estatística estacionária dentro de um período fixo de amostragem. Neste caso,  $\phi(t_1, t_{i-1})$  e  $\int_{t_{i-1}}^{t_1} \phi(t_1, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\phi^T(t_1, \tau)d\tau$  são os mesmos durante qualquer período de amostragem e devem ser computados apenas uma vez. Além disso, se as entradas determinísticas são constantes durante cada um dos períodos de amostragem, o que normalmente ocorre nos controladores digitais operando sempre na mesma taxa de reiteração, então  $u(\tau) = u(t_{i-1})$  para todo  $\tau \in [t_{i-1}, t_1)$ , portanto:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_1} \phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_1} \phi(t_1, \tau)B(\tau)d\tau \right] u(t_{i-1})$$

e o termo entre colchetes permanece constante em cada amostra.

## 2.6 - Filtro Kalman Extendido

Se o sistema de interesse não é estacionário, devemos utilizar o chamado filtro Kalman extendido /7/, que nada mais é do que uma modificação nas equações de propagação dentro da estrutura do filtro.

Como o sistema é não linear, suas equações podem ser expressas por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Para utilizarmos o filtro Kalman devemos linearizar as equações de estado, para este fim devemos expandi-las em série de Taylor em torno de um ponto de referência, denotado por  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ , e reter apenas os termos de primeira ordem. Dessa forma obteremos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{z} &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Podemos escrever as expressões acima de forma abreviada como

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$$

$$\Delta \mathbf{z} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{A}_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}} ; \mathbf{B}_{j,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}} ; \mathbf{C}_{i,j} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}}$$

Para avaliarmos cada uma das derivadas parciais vamos utilizar o método de Euler de primeira ordem, ou seja,

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}} = \frac{[f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0); x_j = x_{0j} + \delta x_j] - [f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0); x_j = x_{0j} - \delta x_j]}{2\delta x_j}$$

Retomando as equações do filtro teremos:

$$\Delta \mathbf{x}(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1}) \Delta \mathbf{x}(t_{i-1}^+) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\Delta \mathbf{z}(t_i) = \mathbf{H}(t_i) \Delta \mathbf{x}(t_i)$$

e utilizando a forma padrão de discretização podemos escrever:

$$\Delta x[(k + i)T] = \Phi(T)\Delta x(kT) + \Lambda(T)\Delta u(kT)$$

e

$$\Delta z(kT) = C\Delta x(kT)$$

Para obtermos as matrizes  $\Phi(T)$  e  $\Lambda(T)$  devemos utilizar a solução da equação linearizada, que é dada por

$$x(t) = \exp[A(t, t_0)(t - t_0)]x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[A(t, \tau)\tau \cdot B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Comparando as duas expressões temos:

$$\Phi(T) = \exp[A(t, t_0)(t - t_0)]$$

$$\Lambda(T) = \int_{t_0}^t \exp[A(t, \tau)\tau \cdot B(\tau)u(\tau)d\tau$$

mas, pelo processo de discretização, durante o período de amostragem as matrizes  $A$ ,  $B$  e o vetor  $u(t)$  são constantes, implicando em

$$\Phi(T) = \exp[AT] = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots$$

$$\Lambda(T) = \Phi(T)B \cdot \Delta t$$

Dessa forma obtemos as seguintes equações para o filtro:

$$x(kT) = x[(k - 1)T] + K(kT)[z(kT) - H(kT)x[(k - 1)T]]$$

$$K(kT) = P[(k - 1)T]H^T(kT)[H(kT)P[(k - 1)T]H^T(kT) + R]^{-1}$$

$$P(kT) = [I - K(kT)H(kT)]P[(k - 1)T]$$

e as seguintes equações de propagação:

$$x[(k + 1)T] = \Phi(kT)x(kT) + \Lambda(kT)u(kT)$$

$$P[(k + 1)T] = \Phi(kT)P(kT)\Phi^T(kT) + Q$$

Devemos ressaltar que a linearização realizada acima só é válida quando o estado do sistema está próximo do ponto tomado como referência pois, conforme o estado do sistema se afasta do ponto de referência, aumenta o erro na estimativa realizada pelo filtro.

Para evitar a situação descrita acima utilizamos o filtro Kalman estendido, que consiste no seguinte algoritmo: Em  $t_0$ , linearizamos as equações de estado em torno de  $\mathbf{x}(t_0)$ ; a partir do momento que  $\mathbf{z}(t_1)$  é processada, relinearizamos as equações de estado em torno de  $\mathbf{x}(t_1)$  e assim sucessivamente. A vantagem neste procedimento é sempre utilizarmos o melhor ponto de referência, impedindo que grandes erros na estimativa inicial sejam propagados ao longo do tempo e, conseqüentemente, a linearidade das equações de estado dificilmente será violada.

Se inicialmente linearizarmos as equações de estado em torno de  $\mathbf{x}(t_0)$ , teremos:

$$\delta\mathbf{x}(t_0) = 0$$

Aplicando a equação de propagação teremos

$$\delta\mathbf{x}(t_1^-) = 0$$

e após a relinearização em torno de  $\mathbf{x}(t_1)$  teremos

$$\delta\mathbf{x}(t_1^-) = 0$$

e novamente

$$\delta\mathbf{x}(t_2^-) = 0$$

Em geral teremos

$$\delta\mathbf{x}(t_i^-) = 0 \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

isto é, no intervalo entre as medidas a melhor estimativa do estado do sistema é o ponto de referência da linearização.

Dessa forma teremos que a nova estimativa será dada por:

$$\delta\mathbf{x}(t_i^+) = \delta\mathbf{x}(t_i^-) + \mathbf{K}(t_i)[\delta\mathbf{z}(t_i) - \mathbf{H}(t_i)\delta\mathbf{x}(t_i^-)] \quad (2.6.1)$$

como

$$\delta\mathbf{x}(t_i^+) = \mathbf{x}(t_i^+) - \mathbf{x}(t_i) = 0$$

teremos

$$\mathbf{x}(t_i^+) = \mathbf{x}(t_i^-) + \mathbf{K}(t_i)[\mathbf{z}(t_i) - (\mathbf{x}(t_i^-) + \mathbf{C}\delta\mathbf{x}(t_i^-))]$$

e as outras equações do filtro permanecem as mesmas.

Até agora deduzimos as equações do filtro Kalman, através das quais a densidade condicional de probabilidade  $f_{\mathbf{x}(t_1)|\mathbf{z}(t_1)}(\xi|\mathbf{z}_1)$  pode ser gerada para qualquer instante. Esta densidade, ou a média e a covariância que a definem, nos fornece toda informação possível de se obter sobre o estado do sistema. Agora passaremos a investigar a estatística contida na estrutura interna do filtro.

O erro cometido ao escolher  $\mathbf{x}(t_1^+)$  como a estimativa de  $\mathbf{x}(t_1)$  pode ser definido por:

$$\mathbf{e}(t_1^+) = \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_1^+)$$

onde  $\mathbf{x}(t_1^+)$  é a variável randômica  $E[\mathbf{x}(t_1)|\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1]$ . Como  $\mathbf{x}(t_1)$  e  $\mathbf{x}(t_1^+)$  são gaussianas conjuntas, como foi deduzido na seção 2.5,  $\mathbf{e}(t_1^+)$  também será uma variável randômica gaussiana definida por uma média e uma covariância. A média é dada por

$$\begin{aligned} E[\mathbf{e}(t_1^+) | \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1] &= E[\mathbf{x}(t_1) | \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1] - E[\mathbf{x}(t_1^+) | \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1] \\ &= \mathbf{x}(t_1^+) - \mathbf{x}(t_1^+) = 0 \end{aligned}$$

isto é, o estimador é imparcial visto que o erro tem média zero. A covariância vale:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{e}(t_1^+) \mathbf{e}^T(t_1^+) | \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1] &= E\{[\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_1^+)][\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_1^+)]^T | \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1\} \\ &= [P(t_1^+) + \mathbf{x}(t_1^+) \mathbf{x}^T(t_1^+)] - \mathbf{x}(t_1^+) \mathbf{x}^T(t_1^+) - \mathbf{x}(t_1^+) \mathbf{x}^T(t_1^+) + \mathbf{x}(t_1^+) \mathbf{x}^T(t_1^+) \\ &= P(t_1^+) \end{aligned}$$

Isto mostra o que já foi dito, que a covariância condicional do erro cometido pelo uso de  $\mathbf{x}(t_1^+)$  como estimador é a mesma da covariância condicional de  $\mathbf{x}(t_1)$ . Conseqüentemente, se usarmos  $\mathbf{x}(t_1^+)$  como estimador de estado, o erro cometido,  $\mathbf{e}(t_1^+)$ , é independente de  $\mathbf{z}(t_1)$ .

Esta independência nos indica que o estimador retira tanta informação das medidas quanto possível, e que nenhuma informação acerca do erro foi deixada de lado. Geometricamente, o erro é ortogonal a projeção real de  $\mathbf{x}(t_1)$  no subespaço das medidas.

Outra variável do filtro, de importância crucial na utilização deste como detetor e

isolador de falhas, é o chamado resíduo, denotado por  $r(\cdot)$ , definido para todo  $t \in T$  como

$$r(t_i) = z(t_i) - H(t_i)x(t_i^-)$$

O resíduo nos dá a diferença entre o valor da medida corrente e o valor da melhor estimativa antes desta medida ser incorporada à história do vetor de estado. Podemos reescrever  $r(t_i)$  como

$$\begin{aligned} r(t_i) &= H(t_i)x(t_i) + v(t_i) - H(t_i)x(t_i^-) \\ &= H(t_i) \left[ \Phi(t_i, t_{i-1})x(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)G(\tau)d\beta(\tau) \right] + v(t_i) \\ &\quad - H(t_i) \left[ \Phi(t_i, t_{i-1})x(t_{i-1}^-) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right] \\ &= H(t_i)\Phi(t_i, t_{i-1})e(t_{i-1}^-) + H(t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)G(\tau)d\beta(\tau) + v(t_i) \end{aligned}$$

como  $e(t_{i-1}^-)$ ,  $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)G(\tau)d\beta(\tau)$  e  $v(t_i)$  são todas variáveis randômicas

independentes de  $z(t_{i-1})$ , então  $r(t_i)$  é independente de  $z(t_{i-1})$ . Mas, por definição,  $r(t_1)$ ,  $r(t_2), \dots, r(t_{i-1})$  são funções lineares de  $z(t_{i-1})$ , portanto  $r(t_i)$  é independente de qualquer  $r(t_j)$  prévio. Em outras palavras,  $r(t_i)$  é uma sequência gaussiana branca, visto que todas funções envolvidas no seu cálculo são assumidas gaussianas.

Para definirmos completamente a sequência de resíduos devemos calcular sua média e sua covariância. A média será

$$E[r(t_i)] = E[r(t_i) | z(t_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1}] = 0 \quad (2.6.2)$$

A covariância será definida por

$$\begin{aligned} E[r(t_i)r^T(t_i)] &= E\{(H(t_i)[x(t_i) - \bar{x}(t_i)] + v(t_i)) \\ &\quad \cdot (H(t_i)[x(t_i) - \bar{x}(t_i)] + v(t_i))^T | z(t_{i-1}) = s_{i-1}\} \\ &= H(t_i)P(t_i)H^T + R(t_i) \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

### 2.2.7 – Análise sequencial

A análise sequencial, desenvolvida por Wald, consiste em testar uma hipótese  $H$  qualquer através de uma amostra de tamanho  $n$  baseando-se num princípio formulado por Newman e Pearson que consiste no seguinte:

Imaginemos que possuímos uma função distribuição de uma certa variável  $x$  dada por  $f(x)$  e que esta função tem apenas um parâmetro  $\theta$  que é desconhecido. Este parâmetro pode ter apenas 2 valores,  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , e desejamos testar a hipótese de que  $\theta = \theta_0$ .

Chamemos a hipótese de  $\theta = \theta_0$  de  $H_0$ , hipótese normal, e a hipótese de  $\theta = \theta_1$  de  $H_1$ , hipótese alternativa. Nosso problema é testar  $H_0$  frente a hipótese  $H_1$ .

Para este fim definimos a chamada região crítica, ou seja, dividimos todas amostras de tamanho  $N$  em duas regiões mutuamente exclusivas, ditas 1 e 2, junto com a regra de que  $H_0$  será rejeitada se a amostra está contida na região 1 e aceita se estiver contida na região 2.

Dessa forma, aceitando ou rejeitando  $H_0$  podemos cometer dois tipos de erro. Um chamado erro de primeiro tipo que consiste em rejeitar  $H_0$  quando esta é verdadeira, e um chamado erro de segundo tipo que consiste em aceitar  $H_0$  quando  $H_1$  é verdadeira. Assim sendo, a probabilidade de cometer um erro de primeiro tipo é igual a probabilidade, se  $H_0$  é verdadeira, da amostra estar incluída na região crítica  $W$ ; e a probabilidade de cometer um erro de segundo tipo é igual a probabilidade, se  $H_1$  é verdadeira, da amostra cair fora da região crítica  $W$ .

Para uma dada região crítica  $W$  podemos chamar de  $\alpha$  à probabilidade de cometer

um erro de primeiro tipo e de  $\beta$  a probabilidade de se cometer um erro de segundo tipo.

As probabilidades  $\alpha$  e  $\beta$  tem a seguinte importância prática: suponha que possuímos um número muito grande  $M$  de amostras de tamanho  $n$ . Para cada uma destas  $M$  amostras nós rejeitamos  $H_0$  se a amostra estiver contida em  $W$  e aceitamos  $H_0$  se a amostra cair fora de  $W$ . Neste caso teremos  $M$  escolhas de aceitação ou rejeição. Algumas destas escolhas deverão estar erradas e, se  $H_0$  é verdadeira, a probabilidade é perto de 1 de que a proporção de escolhas erradas seja aproximadamente  $\alpha$ , caso  $H_1$  seja verdadeira a probabilidade é perto de 1 de que a proporção de escolhas erradas seja aproximadamente  $\beta$ ; isto é, podemos dizer que no decorrer do teste a probabilidade de escolhas erradas é  $\alpha$  se  $H_0$  é verdadeira e  $\beta$  se  $H_1$  é verdadeira.

Podemos perceber que uma dada região crítica  $W$  é mais desejável se possuir pequenos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

A teoria de Newman—Person deixa em aberto a escolha de  $\alpha$  e  $\beta$ , mas podemos ver que estes valores são fortemente influenciados pela importância relativa, para cada aplicação, dos erros de primeiro e segundo tipos.

A teoria nos indica, também, que a região que contém todas amostras que satisfazem a inequação abaixo

$$\frac{f_1(x_1)f_1(x_2)\dots f_1(x_n)}{f_0(x_1)f_0(x_2)\dots f_0(x_n)} \geq K \quad \text{onde } \begin{aligned} f_1(x) &= f(x, \theta_1) \\ f_0(x) &= f(x, \theta_0) \end{aligned}$$

é a melhor região crítica para testar  $H_0$  frente a  $H_1$ . A constante  $K$  é escolhida para que a região tenha o tamanho requerido  $\alpha$

Outra característica da teoria é o fato de que o tamanho da amostra necessária para a decisão é também uma variável randômica, e por esta razão Wald pode desenvolver o seu método.

Basicamente o teste sequencial consiste em, sob uma dada regra, tomar uma das

três decisões abaixo em cada estágio do experimento:

- 1) Rejeitar a hipótese testada
- 2) Aceitar a hipótese testada
- 3) Continuar o experimento fazendo uma nova observação

Com base nestas decisões podemos definir 3 regiões mutualmente exclusivas. Uma chamada zona de preferência para rejeição, outra chamada zona de preferência para aceitação e uma terceira zona de indiferença. Cada uma destas zonas contém todas as amostras de tamanho  $n$  que levam a cada uma das decisões acima. Desta forma o teste consiste em comparar cada uma das amostras com as contidas em cada uma das zonas e tomar a decisão referente a zona que contém a amostra testada.

Neste ponto atingimos o problema fundamental dos testes sequenciais, que é determinar quais são os limites das zonas e mostrar que esta escolha é a melhor.

Imaginemos que  $f(x, \theta)$  é a distribuição de uma variável randômica  $x$  e que  $H_0$  é a hipótese de que  $\theta = \theta_0$  e  $H_1$  a hipótese de que  $\theta = \theta_1$ , temos então que a distribuição de  $x$  é  $f(x, \theta_0)$  se  $H_0$  é verdadeira ou  $f(x, \theta_1)$  se  $H_1$  é verdadeira.

Para um dado valor  $m$  a probabilidade de que uma amostra  $x_1, x_2, \dots, x_m$  seja obtida é dada por:

$$P_{1m} = f(x_1, \theta_1)f(x_2, \theta_1)\dots f(x_m, \theta_1) \quad \text{se } H_1 \text{ é verdadeira}$$

ou

$$P_{0m} = f(x_1, \theta_0)f(x_2, \theta_0)\dots f(x_m, \theta_0) \quad \text{se } H_0 \text{ é verdadeira}$$

Neste caso o teste é definido como:

Escolhemos duas constantes positivas  $A$  e  $B$  ( $B < A$ ), a cada passo da experiência a razão  $P_{1m} / P_{0m}$  é computada.

se

$$B < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} < A \quad \text{fazemos uma nova observação}$$

$$\frac{P_{1m}}{P_{0m}} \geq A \quad \text{rejeitamos } H_0$$

$$\frac{P_{1m}}{P_{0m}} \leq B \quad \text{aceitamos } H_0$$

As constantes A e B são determinadas para que o teste tenha um poder  $(\alpha, \beta)$ .

Afim de facilitar a construção de um algoritmo para o teste em questão tomamos o logaritmo natural das expressões acima e obteremos:

$$\text{Ln } \frac{P_{1m}}{P_{0m}} = \text{Ln } P_{1m} - \text{Ln } P_{0m}$$

mas

$$\text{Ln } P_{im} = \text{Ln } f(x_1, \theta_i) f(x_2, \theta_i) \dots f(x_m, \theta_i) = \text{Ln } f(x_1, \theta_i) + \text{Ln } f(x_2, \theta_i) + \dots + \text{Ln } f(x_m, \theta_i)$$

portanto

$$\text{Ln } \frac{P_{1m}}{P_{0m}} = \text{Ln } \frac{f(x_1, \theta_1)}{f(x_1, \theta_0)} + \text{Ln } \frac{f(x_2, \theta_1)}{f(x_2, \theta_0)} + \dots + \text{Ln } \frac{f(x_m, \theta_1)}{f(x_m, \theta_0)}$$

se chamarmos

$$Z_i = \text{Ln } \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)}$$

obteremos

$$\text{Se } \text{Ln } B < Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m < \text{Ln } A \quad \text{o teste continua}$$

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m \geq \text{Ln } A \quad \text{rejeição de } H_0$$

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m \leq \text{Ln } B \quad \text{aceitação de } H_0$$

O próximo passo será estudar as relações existentes entre A, B,  $\alpha$  e  $\beta$ .

chamemos de amostra tipo 0 se

$$B < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} < A \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$\text{e } \frac{P_{1m}}{P_{0m}} \leq B$$

e de amostra tipo 1 se

$$\frac{P_{1m}}{P_{0m}} \leq B \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

e  $\frac{P_{1m}}{P_{0m}} \geq A$

Podemos mostrar, tomando como base os dois tipos de amostras acima, que

$$1 - \beta \geq \alpha \cdot A \equiv A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (2.7.1)$$

$$\beta \leq (1 - \alpha) \cdot B \equiv B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (2.7.2)$$

Obtemos, assim, limites para as constantes A e B. Para termos um teste com poder  $(\alpha, \beta)$  teremos que as constantes A e B serão função de  $\alpha$  e  $\beta$ , isto é,  $A(\alpha, \beta)$  e  $B(\alpha, \beta)$ . Na maioria dos casos esta determinação é muito complicada, mas pode-se mostrar /1/ que  $A(\alpha, \beta) = \frac{1 - \beta}{\alpha}$  e  $B(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{1 - \alpha}$  é uma boa aproximação e não irá modificar substancialmente o resultado da decisão.

### 3 – DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIAS DE DETEÇÃO DE FALHAS

Neste capítulo descreveremos, com uso da teoria apresentada no capítulo anterior, dois métodos para detecção e isolamento de falhas.

O primeiro será baseado na teoria da análise sequencial desenvolvida por Wald, e tem aplicação nas situações onde possuímos sensores redundantes. Este método é chamado de análise sequencial de razão de probabilidade, e não leva em conta a dinâmica do sistema em questão.

O segundo método aqui apresentado utiliza-se do filtro de Kalman, que leva em consideração não só a dinâmica do sistema, mas também o ruído associado ao sistema assim como o ruído nas medidas realizadas pelos sensores utilizados. Este método é chamado de método dos resíduos e está baseado na descrição estatística desta variável, como ficará claro ao deduzirmos seu algoritmo.

#### 3.1 – Análise Sequencial de Razão de Probabilidade

Lembrando a teoria apresentada no capítulo 2, vamos assumir uma sequência  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , de observações independentes de variáveis randômicas com distribuição gaussiana sob hipótese  $H_j$  de que tenha média  $\mu_j$  e desvio padrão  $\theta_j$ , isto é,

$$f_j(x_i | H_j) = \frac{1}{\theta_j \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2(\theta_j)^2} \cdot (x_i - \mu_j)^2\right]$$

Dessa forma teremos:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \sum_{i=1}^n \text{Ln} \frac{f_1(x_i | H_1)}{f_0(x_i | H_0)} = \\ &= \text{Ln} \frac{\theta_0}{\theta_1} - \frac{x^2}{2} \left[ \frac{1}{(\theta_1)^2} - \frac{1}{(\theta_0)^2} \right] + x \left[ \frac{\mu_1}{(\theta_1)^2} - \frac{\mu_0}{(\theta_0)^2} \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[ \left[ \frac{\mu_0}{\theta_0} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{\mu_1}{\theta_1} \right]^2 \right] \end{aligned}$$

No caso de termos gaussianas com desvios padrões normalizados,  $\theta_1 = \theta_0 = 1$ , teremos:

$$\text{Ln} \frac{f_1(x_i | H_1)}{f_0(x_i | H_0)} = x(\mu_1 - \mu_0) + \frac{1}{2} \cdot [(\mu_0)^2 - (\mu_1)^2]$$

O teste da população em exame será dado por:

- aceita-se  $H_0$  se  $\lambda_n < A$
- rejeita-se  $H_0$  se  $\lambda_n > B$
- toma-se nova medida se  $A \leq \lambda_n \leq B$

A utilização do filtro de Wald para  $k$  detetores redundantes é facilitada com a definição de desvio relativo entre os  $k(k - 1)/2$  pares de medidas. Cada um dos  $k(k - 1)/2$  desvios é analisado sequencialmente para teste de hipótese  $H_0$  a cada tomada de medida. Como os detetores estão medindo a mesma variável, temos que o desvio relativo entre os pares de medidas deve possuir média zero, implicando que o resultado da razão de probabilidade será dado por:

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} \pm \mu_1 \cdot (x \mp \mu_1) \quad (3.1.1)$$

sendo que os sinais indicam se a hipótese  $H_1$  tem média positiva ou negativa.

Os desvios relativos são definidos por:

$$\epsilon_k = m_i - m_j$$

$$\beta_k = \frac{\epsilon_k}{\sigma_k}$$

$$\sigma_k = [(\sigma_i)^2 + (\sigma_j)^2 - 2\sigma_{ij}]^{1/2}$$

e testados sob hipótese  $H_0$  como uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão unitário, contra  $H_1$ , gaussiana com média  $\pm \mu$  e desvio padrão unitário.

Comparando

$$\lambda_n^+ = \lambda_{n-1}^+ + \mu \cdot (\beta_k - \mu), \text{ para média } +\mu \quad (3.1.2)$$

e

$$\lambda_n^- = \lambda_{n-1}^- - \mu \cdot (\beta_k + \mu), \text{ para média } -\mu \quad (3.1.3)$$

contra os limites A e B definidos em função de probabilidades de alarme falso e de falha de alarme,  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente.

A tabela 3.1 ilustra um caso de tres detetores redundantes onde os resultados mostrados são equivalentes aos da projeção no espaço de paridade /2,3/ quando a matriz de medida tem elementos constantes.

O parâmetro  $\mu$  deve ser escolhido levando em consideração os erros de cada detetor e ter um valor para cada par dado pela seguinte expressão:

$$\mu = 2(b_i - b_j) / \sigma_k, \text{ onde } b_i \text{ e } b_j \text{ é a sensibilidade de cada detetor}$$

Para o teste do filtro utilizaremos um simulador de falhas correlacionadas que será descrito abaixo.

O vetor medida  $z$  pode ser linearmente descrito em função de vetor variável de processo  $x$  e vetor ruído  $r$ , como

$$z = Hx + r$$

onde

$r$  é o ruído, assumido gaussiano branco, com componentes  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , correlacionados entre si

Uma vez obtida uma amostra gaussiana, através de um gerador de ruídos numéricos, pode-se gerar ruídos correlacionados, bastando para isso usar o método da transformada de Cholesky da matriz covariância  $P$ , porque, se  $f(r)$  é gaussiana, tem-se

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi \cdot |P|)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} r^T P^{-1} r\right)$$

Por decomposição de Cholesky obtém-se

$$P = c \sqrt{P} \cdot c \sqrt{P}^T$$

e o argumento da exponencial torna-se

$$r^T P^{-1} r = r^T (C \sqrt{P}^{-T})^{-1} I (C \sqrt{P})^{-1} r$$

Logo se definir  $r_1$  como

$$r_1 = (C \sqrt{P})^{-1} r$$

pode-se expressar o vetor ruído de componentes correlacionados  $r$  em função de vetor ruído de componentes não correlacionados,  $r_1$ , como

$$r = C \sqrt{P} r_1$$

A transformada de cholesky gera uma matriz triangular inferior, portanto a construção de ruídos correlacionados  $r$ , se  $r_1$  representa o ruído gaussiano com desvio padrão unitário, e média zero, e obtida explicitamente como

$$r = \begin{bmatrix} a_{11} r_{11} \\ a_{21} r_{11} + a_{22} r_{12} \\ a_{31} r_{11} + a_{32} r_{12} + a_{33} r_{13} \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

### 3.2 – Análise da Inovação do Filtro de Estimação Ótima

Como já foi mostrado na seção 2.6, a sequência de resíduos é uma sequência gaussiana branca com média zero e covariância  $[H(t_1)P(t_1)H^T(t_1) + R(t_1)]$ .

Durante a operação do filtro a sequência do resíduo pode ser monitorada e comparada contra a hipótese de gaussiana branca. Se a hipótese é confirmada regularmente até que em certo instante passa a ser consistentemente violada, pode-se deduzir que algo ocorreu no sistema real que invalida o modelo dentro do filtro. Se esta violação ocorre em apenas uma componente do vetor resíduo, podemos deduzir que o dispositivo que gerou esta componente do resíduo é a fonte de dificuldade, ou seja, existe uma falha neste dispositivo. Se por outro lado, dois ou mais sinais passarem a acusar desvio de normalidade, pode-se fortemente deduzir, dentro de probabilidade conhecida, que o sistema entrou em funcionamento anormal.

Para esta análise definimos uma função chamada Função Expectativa. Essencialmente, os sinais dos N resíduos mais recentes são examinados para determinar quando há um desvio da descrição estatística assumida em caso de não haver falha. O número N deve ser escolhido de forma há nos prevenirmos de uma declaração de falha devido a um único resíduo, visto que resíduos sistematicamente grandes são indicação de funcionamento anormal do sistema e resíduos individuais de grande magnitude são esperados. Por outro lado, utilizando toda a sequência de resíduos, desde do início até o instante em questão, pode diminuir a sensibilidade para falhas reais que progridem ao longo do tempo. Normalmente o valor de N está entre 5 e 20.

A teoria de teste de hipóteses estatísticas indica que

$$L_{Nk}(t_i) = \sum_{j=i-N+1}^i \ln f_{r_k(t_j) \dots r_k(t_1)}(\rho_j, \rho_{j-1}, \dots, \rho_1)$$

é uma boa escolha para detecção de falhas de sistema.

Se a sequência do resíduo é um conjunto de variáveis randômicas gaussianas independentes com média zero podemos escrever

$$L_{Nk}(t_i) = c_k(t_i) - \frac{1}{2} \sum_{j=i-N+1}^i \frac{r_k^2(t_j)}{\sigma_k^2(t_j)}$$

onde  $c_k$  é um termo negativo independente das observações dos resíduos e  $\sigma_k(t_j)$  é a estimativa da variância possível dos valores do resíduo k-ésimo baseado no fato de não haver falha. O valor  $\frac{1}{\sigma_k^2(t_j)}$  pode ser avaliado pelo valor do k-ésimo termo da diagonal da matriz  $[H(t_j)P(t_j)H^T(t_j) + R(t_j)]^{-1}$ , uma matriz já computada pelo filtro.

Se  $r_k^2(t_j)$  fica substancialmente maior que  $\sigma_k^2(t_j)$  das N mais recentes amostras,  $L_{Nk}(t_j)$  começa a ficar mais e mais negativo, se o valor ultrapassar um determinado limite, uma falha pode ser acusada.

### 3.3 – Modelagem do Sistema a ser Monitorado

Como já foi exposto na introdução estamos interessados em modelar o pressurizador de um reator PWR.

Para obter as equações de estado do pressurizador, seguiremos o modelo proposto por Tylee /5/, que utiliza o esquema simplificado apresentado na figura 3.1, assumindo que água e vapor encontram-se numa mistura homogênea na região de saturação dentro do volume do pressurizador e fazendo o balanço de massa e energia nesta região.

A notação aqui utilizada é a mesma da referência /5/.

#### Balanço de massa

Pela equação da continuidade temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (3.3.1)$$

onde  $\mathbf{v}$  = vetor velocidade do fluido

integrando a eq.(3.3.1) em todo o volume do pressurizador e aplicando o teorema de Gauss obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dv = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dv$$

onde  $\mathbf{n}$  = vetor normal à superfície

mas a área total do pressurizador pode ser dividida em:

$$S_T = S_f + S_s + S_e + S_n$$

onde  $S_f$  = área da seção reta do tubo ligado a perna quente do primário

$S_s$  = área da seção reta do tubo de spray

$S_e$  = área da seção reta do tubo da válvula de escape

$S_n$  = área do resto (paredes) do pressurizador

Dessa forma temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dv = - \int_{S_f} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS_f - \int_{S_s} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS_s - \int_{S_e} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS_e - \int_{S_n} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS_n$$

assumindo que:

- a) A velocidade é paralela as paredes dos tubos em questão
- b) As propriedades físicas do fluido não variam ao longo da seção reta dos tubos

teremos:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = \rho \langle v \rangle_f S_f + \rho \langle v \rangle_s S_s - \rho \langle v \rangle_e S_e \quad (3.3.2)$$

Definindo  $\langle v \rangle =$  velocidade média do fluido no tubo

$$W = \rho \langle v \rangle S = \text{fluxo de massa na seção reta do tubo}$$

e resolvendo a integral de volume da Eq. 3.3.2 obtemos:

$$-\frac{\partial}{\partial t} M_T = W_f + W_s - W_e \quad (3.3.3)$$

onde  $M_T =$  massa total do fluido dentro do pressurizador.

$W_f =$  fluxo de massa na seção reta do tubo ligado a perna quente do primário

$W_s =$  fluxo de massa na seção reta do tubo de spray

$W_e =$  fluxo de massa na seção reta do tubo da válvula de escape

### Balço de energia

Para o balanço de energia partimos da primeira lei da termodinâmica escrita para um sistema aberto não estacionário.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{acumulo de} \\ \text{energia} \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{l} \text{taxa de energia} \\ \text{que entra} \\ \text{por convecção} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{taxa de energia} \\ \text{que sai} \\ \text{por convecção} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{fluxo de calor} \\ \text{que entra} \\ \text{por condução} \end{array} \right] - \\ &\quad - \left[ \begin{array}{l} \text{taxa de trabalho} \\ \text{realizado} \\ \text{pelo sistema} \end{array} \right] \end{aligned}$$

A energia total está dividida em energia cinética, associada ao movimento observável do fluido, e energia interna, associada com a translação aleatória e o movimento interno das moléculas somada com a energia de interação entre elas.

Observamos portanto que a energia interna depende da temperatura local e da densidade do fluido.

Devemos ressaltar que o trabalho realizado pelo fluido consiste de duas componentes:

- a) Trabalho das forças de volume (gravidade)
- b) Trabalho das forças de superfície (pressão e forças viscosas)

Dessa forma a equação da energia total do sistema é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho U + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = - \nabla \cdot [\rho v (\rho U + \frac{v^2}{2})] - \nabla \cdot q + \rho (v \cdot g) - \nabla \cdot (Pv) - \nabla \cdot [\tau v] \quad (3.3.4)$$

Como estamos interessados na energia interna do fluido devemos obter a equação da energia mecânica via balanço de momento linear e subtrair da equação 3.3.4.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{acumulo} \\ \text{de momento} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{momento} \\ \text{que entra} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{momento} \\ \text{que sai} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{resultante} \\ \text{das forças que} \\ \text{agem no sistema} \end{array} \right]$$

lembrando que existem duas formas de transporte de momento:

- a) Por convecção (devido ao escoamento)
- b) Por transferência molecular (devido ao gradiente de velocidade)

Dessa forma teremos que a equação do momento é dada pela seguinte equação:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \nabla \cdot (\rho v v) - \nabla \cdot \tau - \nabla P + \rho g \quad (3.3.5)$$

Calculando explicitamente o tensor  $\nabla \cdot (\rho v v)$  temos:

$$\nabla \cdot (\rho v v) = - v \nabla \cdot (\rho v) + \rho (v \cdot \nabla) v$$

substituindo na Eq. 3.3.5, expandindo a derivada temporal e tomando a eq. 3.3.1 obtemos:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \nabla \cdot \tau - \nabla P + \rho g \quad (3.3.6)$$

multiplicando escalarmente a Eq. 3.3.6 pela velocidade local obteremos a equação da energia mecânica que é dada por:

$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v \cdot (\nabla \cdot \tau) - \nabla \cdot (Pv) + P \nabla \cdot v + \rho v g \quad (3.3.7)$$

subtraindo a eq. 3.3.7 da eq. 3.3.4 obteremos a equação da energia interna que é dada por:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla \cdot q + P \nabla \cdot v - (\tau \cdot \nabla) \cdot v \quad (3.3.8)$$

Para o modelo aqui proposto a equação de interesse é a da entalpia que pode ser deduzida a partir da eq. 3.3.8 e da definição de entalpia, ou seja:

$$h = U + PV$$

portanto

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - P \frac{DV}{Dt} - V \frac{DP}{Dt}$$

tomando a eq. 3.3.1 e a equação acima, após alguma álgebra, temos:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - P \nabla \cdot v - \frac{DP}{Dt} \quad (3.3.9)$$

igualando as eqs. 3.3.8 e 3.3.9 temos:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \cdot \nabla h = -\nabla \cdot q - (\tau \cdot \nabla) \cdot v + \frac{\partial P}{\partial t} + v \cdot \nabla P$$

mas:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + h \nabla \cdot (\rho v)$$

substituindo na equação acima teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) = -\nabla \cdot (h \rho v) - \nabla \cdot q - (\tau \cdot \nabla) \cdot v + \frac{\partial P}{\partial t} + v \cdot \nabla P$$

No caso do pressurizador não existe um gradiente de pressão interno, pois a mistura está em condições de saturação, portanto  $v \cdot \nabla P = 0$ . Como a velocidade de escoamento é muito baixa, o que implica um gradiente de velocidade muito pequeno, temos que a dissipação viscosa é desprezível portanto o termo  $(\tau \cdot \nabla) \cdot v$  é igual a zero.

Dessa forma a equação da energia no pressurizador pode ser expressa por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) = -\nabla \cdot (h \rho v) + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot q \quad (3.3.10)$$

Integrando em todo volume do pressurizador obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (M_T h_p) = \frac{V_p}{J} \frac{\partial P}{\partial t} + Q + W_f(h_f - h_p) + W_s(h_s - h_p) - W_e(h_v - h_p) \quad (3.3.11)$$

As equações da dinâmica do sistema são deduzidas à partir das equações 3.3.3 e 3.3.11.

Temos, por definição, que:

$$v_p = \frac{V_p}{M_T}$$

Substituindo a equação acima na equação do balanço de massa 3.3.3 temos:

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} = - \frac{v_p^2}{V_p} (W_f + W_s - W_e) \quad (3.3.12)$$

mas sabemos que:

$$v_p = v_l + X_p(v_v - v_l)$$

$$h_p = h_l + X_p(h_v - h_l)$$

além disso temos:

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} = \frac{\partial v_p}{\partial X_p} \cdot \frac{\partial X_p}{\partial t} + \frac{\partial v_p}{\partial P_p} \cdot \frac{\partial P_p}{\partial t} \quad (3.3.13)$$

$$\frac{\partial h_p}{\partial t} = \frac{\partial h_p}{\partial X_p} \cdot \frac{\partial X_p}{\partial t} + \frac{\partial h_p}{\partial P_p} \cdot \frac{\partial P_p}{\partial t} \quad (3.3.14)$$

Substituindo 3.3.13 em 3.3.12 teremos:

$$\frac{\partial v_p}{\partial X_p} \cdot \frac{\partial X_p}{\partial t} = - \frac{v_p^2}{V_p} (W_f + W_s - W_e) - \frac{\partial v_p}{\partial P_p} \cdot \frac{\partial P_p}{\partial t} \quad (3.3.15)$$

Substituindo 3.3.14 na equação de balanço de energia 3.3.11 temos:

$$\frac{\partial h_p}{\partial X_p} \cdot \frac{\partial X_p}{\partial t} + \left[ \frac{\partial h_p}{\partial P_p} - \frac{v_p}{J} \right] \cdot \frac{\partial P_p}{\partial t} = \frac{v_p \cdot \Delta}{V_p}$$

onde:

$$\Delta = Q + W_f(h_f - h_p) + W_s(h_s - h_p) - W_e(h_v - h_p)$$

Substituindo 3.3.15 obtemos, após alguma álgebra:

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \frac{v_p}{V_p} \cdot \Omega \left[ v_p \cdot \frac{\partial h_p}{\partial X_p} \cdot (W_f + W_s - W_e) + \frac{\partial v_p}{\partial X_p} \cdot \Delta \right] \quad (3.3.16)$$

onde

$$\Omega = \frac{\partial v_p}{\partial X_p} \cdot \left[ \frac{\partial h_p}{\partial P_p} - \frac{v_p}{J} \right] - \frac{\partial h_p}{\partial X_p} \cdot \frac{\partial v_p}{\partial P_p}$$

Substituindo 3.3.16 em 3.3.15 temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_p}{\partial X_p} \cdot \frac{\partial X_p}{\partial t} = & -\frac{v_p^2}{V_p} (W_f + W_s - W_e) - \frac{v_p^2}{V_p} \cdot \Omega \cdot \frac{\partial v_p}{\partial P_p} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial X_p} \cdot (W_f + W_s - \\ & - W_e) - \frac{v_p}{V_p} \cdot \Omega \cdot \frac{\partial v_p}{\partial P_p} \cdot \frac{\partial v_p}{\partial X_p} \cdot \Delta \end{aligned}$$

Após alguma álgebra e substituindo o valor de  $\Omega$  teremos:

$$\frac{\partial X_p}{\partial t} = -\frac{v_p}{V_p} \cdot \Omega \cdot \left[ v_p \cdot (W_f + W_s - W_e) \cdot \left[ \frac{\partial h_p}{\partial P_p} - \frac{v_p}{J} \right] + \frac{\partial v_p}{\partial P_p} \cdot \Delta \right] \quad (3.3.17)$$

Essas equações não descrevem totalmente o sistema do pressurizador pois está faltando a temperatura da mistura; como o sensor de temperatura é colocado na região do líquido vamos propor uma equação de primeiro grau introduzindo um fator que corresponderá ao atraso do sensor de temperatura em relação à temperatura real da mistura, portanto:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot (T - T_p) \quad (3.3.18)$$

As equações 3.3.16, 3.3.17 e 3.3.18 são as equações de estado que descrevem o comportamento da mistura dentro do pressurizador e são estas equações que serão utilizadas na construção do detetor e isolador de falhas aqui proposto.

$m_1 - m_2$	$m_1 - m_3$	$m_2 - m_3$	Diagnóstico
0	0	0	Sistema normal
1	1	0	Falha do detetor 1
1	0	1	Falha do detetor 2
0	1	1	Falha do detetor 3
1	1	1	Pelo menos 2 detetores falhos

Tabela 3.1 – Demonstrativo dos possíveis resultados de 3 detetores redundantes  
(0 e 1 referem-se às hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ , respectivamente)

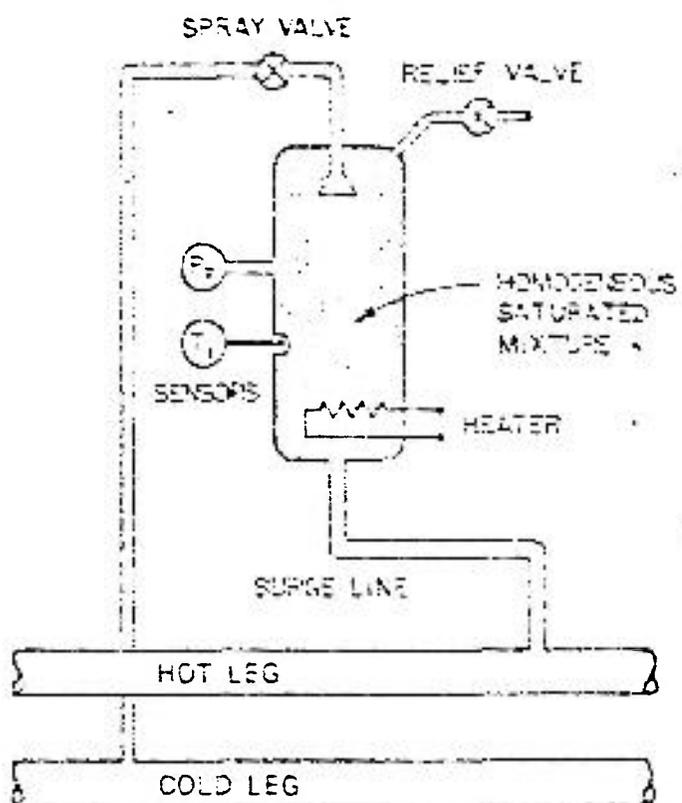


Figura 3.1 – Esquema simplificado do pressurizador

## CAPÍTULO 4 – RESULTADOS DA EXPERIÊNCIA NUMÉRICA

Neste capítulo validaremos as metodologias apresentadas no capítulo anterior através da simulação numérica. As metodologias serão estudadas em separado.

Primeiramente será validada a metodologia baseada na teoria de Wald, que se aplica especificamente para casos de detetores redundantes.

O segundo método, que se baseia no filtro de Kalman, leva em conta a dinâmica do sistema assim como os ruídos associados ao próprio sistema e aos sensores utilizados.

### 4.1 – Testes com Análise Sequencial de Razão de Probabilidade

Para realização dos testes foi montado um experimento de detecção de temperatura em túnel de vento, onde foram posicionados, ao redor do filamento aquecido central, 3 termopares tipo T, expostos, na mesma seção reta, como mostra a figura 4.1a.

As condições operacionais na seção de teste do túnel foram:

- Vazão:  $0,042 \text{ m}^3/\text{s}$
- Potência: 550 W
- Temperatura ambiente:  $23 \text{ }^\circ\text{C}$

Os sinais obtidos passaram por um amplificador isolador, onde foram utilizados os seguintes filtros:

Filtro passa-baixa: 1 KHz

Filtro passa-alta: 0,1 Hz

e possuíam as seguintes características:

- Nível DC: em torno de 6V
- Intensidade das flutuações: em torno de 0,4V

Dessa forma obtivemos, em arquivos gravados em disquete, as flutuações dos sinais fornecidos pelos tres termopares para posterior análise em um microcomputador IBM-PC.

Para análise foi escrito um programa auxiliar que nos forneceu a média de cada um dos sinais gravados, assim como o valor da matriz covariância  $P$  do sistema, conforme apresentado abaixo:

Termopar 1 : -0,05432

Termopar 2 : 0,02845

Termopar 3 : 0,01849

$$P = \begin{bmatrix} 0,00617 & -0,00249 & 0,00195 \\ -0,00249 & 0,00533 & 0,00169 \\ 0,00195 & 0,00169 & 0,00358 \end{bmatrix}$$

O próximo passo foi uma verificação da distribuição dos sinais de cada detetor, normalizando a distribuição em  $\sigma$ , fornecido pela diagonal principal da matriz  $P$ , e no número de detecções, 20000, verificando seu caráter gaussiano. Dessa forma, para o teste em questão, considerou-se que a medida do detetor será dada por:

$$\text{medida}_i = \text{sinal}_i - \text{média}_i \quad i = 1,2,3$$

Os dados assim obtidos serão comparados com um simulador de falhas, construído a fim de possibilitar um meio empírico de determinação dos parâmetros envolvidos na construção do filtro. O simulador assume que as medidas podem ser representadas por:

$$z = Hx + v \quad \text{onde } v \text{ é um ruído gaussiano branco}$$

Os ruídos serão obtidos através de um gerador de ruídos numérico, baseado no teorema do limite central e no método de Monte Carlo, podendo ser representados por:

$$v = \frac{(m_g - m_d)}{\sigma_d}$$

onde  $v$  = ruído gaussiano branco

$m_g$  = média de um grupo de  $L$  números randômicos

$m_d$  = média da gaussiana base ( 0,5 )

$\sigma_d$  = sigma da gaussiana base (  $1 \div [12L]^{1/2}$  )

Antes do início do teste propriamente dito, necessita-se determinar três variáveis de crucial importância no funcionamento do filtro. As duas primeiras são os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , que determinam os limites da região crítica, que tem seus valores basicamente ligados a probabilidade de alarmes falsos aceitável. A terceira variável está ligada ao fato de que, para indicação de falha, dois pares, positivos ou negativos, devem ultrapassar o limite para indicação de falhas simultaneamente.

Um teste preliminar determinou, para valores de  $\alpha = \beta = 0,001$ , o tempo de espera de 2 contagens para a obtenção de boa concordância entre a taxa de alarmes falsos esperados e os obtidos na prática.

Com estes parâmetros foram simulados vários casos com a finalidade de se determinar, por erro e tentativa, os valores de  $\mu_k$  a serem postulados na hipótese  $H_1$  para os pares  $m_1 - m_2$ ,  $m_1 - m_3$  e  $m_2 - m_3$ , de forma a não obter nenhuma indicação de falha para os sinais gravados, obtendo-se os seguintes resultados:

$$\mu_{12} = 6$$

$$\mu_{13} = 7$$

$$\mu_{23} = 7$$

Estes valores concordam com a previsão teórica feita através da seguinte expressão:

$$\mu_k = \frac{2(b_i + b_j)}{\sigma_k}$$

onde

$b_i$  e  $b_j$  representam a sensibilidade de cada detetor

$\sigma_k$  é a correlação entre os detetores  $i$  e  $j$

que resultam em:

$$\mu_{12} = 5$$

$$\mu_{13} = 7$$

$$\mu_{23} = 7$$

Para estas previsões assumimos que  $b_j = 2\sigma_j$ , pois, como o sinal é gaussiano, 95% dos sinais obtidos estão dentro desta faixa.

Com todos os parâmetros determinados o simulador de detecção de falha de sensores utiliza as equações 3.1.2 e 3.1.3 para o cálculo sequencial da razão de probabilidades. A simulação das medidas é efetuada através das equações geradas pela matriz dada em 3.1.4.

As falhas foram simuladas em ambos os casos variando-se o valor da amplitude dessas falhas desde 0 até 6 unidades de  $\sigma_k$ , e os resultados encontram-se nas tabelas 4.1.

Com os dados da tabela 4.1 construímos o gráfico da razão entre o número de falhas e o número total de medidas em função da amplitude das falhas que se encontra na figura 4.2. Através deste gráfico verificamos que as taxas de detecção de falhas nos dois casos concordam satisfatoriamente entre si, indicando boa qualidade na reprodução de ruído gaussiano a partir da covariância medida.

Verificou-se experimentalmente, também, que a taxa de detecção de falhas atinge um patamar para valores de  $\delta$  maiores que 3 unidades de  $\sigma_k$ , isto é, aproximadamente  $\frac{\mu_k}{2}$ , como pode ser observado na figura 4.1.

O próximo passo foi um estudo da sensibilidade do método em função do parâmetro  $\beta$ . Para este estudo fixamos uma amplitude de falha e variamos o valor de  $\beta$  obtendo os resultados da tabela 4.2. Pelos resultados deduz-se que a sensibilidade de taxa de falhas é bastante baixa em relação a variação de  $\beta$ .

O último teste foi determinar se o método é capaz de filtrar eventuais pulsos espúrios que venham ocorrer durante a operação normal do sistema de detecção. Para este fim foram gerados pulsos com alturas da ordem de  $3\sigma_k$  e  $5\sigma_k$  e os resultados encontram-se na tabela 4.3.

Através da análise dos dados da tabela 4.3 verificou-se que para pulsos de altura de  $3\sigma_k$  temos taxas de detecção de alarmes falsos insignificamente baixas. Já para

pulsos de altura  $5\sigma_k$ , praticamente todos os pulsos foram reconhecidos como falha na medida do sensor em questão.

Dessa forma concluímos que o método de Wald pode ser utilizado como filtro de eventuais pulsos espúrios, tendo a vantagem de funcionar também como detetor e isolador de falhas dos sensores monitorados.

#### 4.2 – Testes com Análise da Inovação do Filtro de Kalman

Observando as equações de estado deduzidas no capítulo anterior, vemos a necessidade de ajuste do atraso  $\tau$ , que está ligado a equação da temperatura. Este ajuste é feito através de um transiente conhecido.

Neste caso utilizamos o transiente L6-3 do LOFT (Loss-Of-Fluid Transient facility) /8/, que consiste na total abertura da válvula principal de controle de vapor do circuito secundário do LOFT. O aumento da capacidade de refrigeração do gerador de vapor causa uma queda na pressão e na temperatura do refrigerante levando a ocorrência de um desligamento rápido por baixa pressão no circuito primário do LOFT.

A figura 4.2a apresenta a pressão medida durante o transiente, e a figura 4.2b apresenta a variação da temperatura medida pelo termopar e os resultados da variação da temperatura obtida através da equação utilizada no modelo do pressurizador. Podemos observar que um valor de  $\tau = 50$  segundos reproduz aproximadamente a variação da temperatura medida experimentalmente.

Para confirmação do valor de  $\tau$  utilizamos o transiente L6-1 do LOFT /5/, que consiste no fechamento da válvula principal de controle de vapor do circuito secundário do LOFT. A diminuição da transferência de calor do circuito primário aos tubos do gerador de vapor causa um aumento da temperatura no circuito primário e conseqüentemente um aumento da pressão, levando ao desligamento rápido por alta pressão no circuito primário do LOFT.

As figuras 4.3 a 4.5 ilustram o comportamento do filtro para o transiente L6-1, mostrando a adequação do modelo utilizado na construção do filtro.

O valor aparentemente alto encontrado para o parâmetro  $\tau$  está ligado a localização do sensor no interior do pressurizador, visto que o modelo desenvolvido assume que água e vapor encontram-se numa mistura homogênea no seu interior, o que só ocorre na região de vapor, e o sensor está instalado na região do líquido subresfriado, causando um atraso considerável entre a temperatura de saturação, determinada pela pressão interna ao pressurizador, e a temperatura indicada pelo sensor.

Com o parâmetro  $\tau$  ajustado e validado, utilizando os parâmetros do apêndice I, passamos a determinação dos níveis de indicação de falhas.

Para este fim temos que determinar os níveis das funções L de cada uma das variáveis de estado em medições de normalidade. O primeiro passo para esta determinação foi simular um transiente de média intensidade e através das equações de estado obter o comportamento de cada uma das variáveis de estado do sistema, assim como das variáveis de controle.

O transiente considerado foi um degrau de surto positivo de 4 lb/s entre 20 e 40 segundos seguido de um surto negativo de mesma magnitude, -4 lb/s, entre 60 e 80 segundos.

Procurando simular as variações das medidas dos sensores durante o transiente, adicionamos, através de um gerador de ruídos, um ruído de magnitude igual a um sigma de cada um dos sensores nas respectivas medidas.

Além disso, devemos lembrar que cada sensor pode apresentar oscilações de baixa frequência devido a desvios naturais dos próprios sensores, que foram simulados através de senóides de pequena magnitude adicionadas aos valores medidos.

Os dados assim obtidos encontram-se nas figuras 4.6 a 6.8 apresentadas abaixo.

Como o método aqui utilizado não se vale diretamente dos resíduos reais, mas sim

da somatória de um determinado número destes, devemos determinar este número de forma a aumentar a sensibilidade do método para as falhas que devem ser detetadas. Este número também está relacionado com o intervalo de tempo necessário para a detecção da falha apresentada pelo sensor. Dessa forma devemos acomodar dois fatores conflitantes: o método deve ser suficientemente rápido na identificação das falhas e ao mesmo tempo não deve apresentar um alto índice de alarmes falsos. A teoria nos indica que o número ideal está no intervalo de 5 a 20 medidas. Testes com os dados obtidos acima indicaram 6 como um valor aceitável, produzindo uma sequência sem variações bruscas como indicam as figuras 4.9 a 4.11.

Sabemos, também, que a somatória dos resíduos está associada a uma matriz de covariância definida por  $[HPH^T + R]^{-1}$ , que nos fornece, em sua diagonal, a variância associada a cada resíduo. No caso aqui estudado temos:

$$\sigma_L = 0,07 \text{ in}$$

$$\sigma_P = 2,8 \text{ psi}$$

$$\sigma_T = 0,33 \text{ F}$$

Pela estatística sabemos que uma variável aleatória gaussiana tem aproximadamente 99,73 % de probabilidade de ter seu valor no intervalo  $(-3\sigma, 3\sigma)$  em torno do valor médio, dessa forma assumiremos que valores fora deste intervalo indicarão possível falha no sistema ou nos sensores, possibilitando a fixação de valores limites para a função expectativa, conforme indicado nas figuras 4.9 a 4.11. Quando o valor da função expectativa ultrapassar este limite poderemos indicar a existência de falhas.

Estes limites foram testados através da simulação das falhas comumente encontradas nos sensores de temperatura, de pressão e de nível, escolhendo-se para os testes os seguintes transientes: rampa de medida, degrau de duração limitada, ruído no sensor e pulsos espúrios de intensidade variável.

Para análise das falhas tipo degrau foram simulados dois degraus, um entre 20 e

40 segundos e outro entre 60 e 80 segundos, em cada uma das medidas dos sensores separadamente, obtendo os resultados das figuras 4.12 a 4.14.

As alturas dos degraus correspondem a aproximadamente 3 desvios padrões dos respectivos sensores e observa-se claramente o aumento do valor da função L, em módulo, logo no início e final dos degraus simulados em comparação a função L dos sensores não falhos. Conclui-se, portanto, que o nível para sinalização e aceitação de falha pode ser facilmente definido dada a nítida caracterização do comportamento da função L do sensor falho em comparação a seu comportamento em operação normal, mostrado nas figuras 4.9 a 4.11. Outro fator a ser observado, é que este tipo de falha pode ser detetada e isolada em menos de 3 segundos, ficando a critério do sistema operacional da planta a conveniência de se permitir um tempo de espera antes da sinalização da falha do sensor em questão.

As falhas tipo rampa são importantes pois a anormalidade da resposta do sensor pode ocorrer de uma forma lenta e gradual, e não repentinamente como ocorre nas falhas tipo degrau. Dessa forma devemos analisar se o método é sensível a este tipo de falha e qual deve ser a inclinação desta rampa.

Para esta análise foram simuladas rampas que inseriam falhas à taxa constante de aproximadamente um desvio padrão por segundo em cada um dos sensores separadamente, a partir do tempo 40 segundos. Os resultados encontram-se nas figuras 4.15 a 4.17.

Podemos observar dos resultados que as alturas dos valores das funções L se distinguem dos valores normais em menos de aproximadamente 10 segundos permitindo portanto a indicação de falha prematuramente, enquanto a magnitude do erro na medida ainda é tolerável.

Devemos ressaltar que a variação na função L para o sensor de temperatura, quando da ocorrência de uma rampa de pressão, já era prevista visto que a equação de

estado da temperatura é proporcional a pressão medida, pois esta determina a temperatura de saturação da mistura. Esta variação faz com que o nível de sinalização de falha para a temperatura deva ser colocado um pouco acima do ideal para evitar a indicação de falha deste sensor quando da rampa de pressão. Isto, porém, não diminuiu a sensibilidade do detetor e isolador de falhas para o sensor de temperatura, como será evidenciado pela análise dos dados obtidos ao longo deste capítulo.

Durante operação normal, os sensores estão submetidos a diversos ruídos que são inerentes ao próprio processo de medida. No entanto estes sensores podem ser submetidos temporariamente a ruídos originados de ocorrências anormais, ruídos estes que devem ser detetados prontamente a fim de evitar desenvolvimento incontrolável desta anormalidade.

Para testar o detetor e isolador de falhas frente a esse problema seguimos o seguinte procedimento: através de um gerador de ruídos gaussianos não correlacionados foram gerados ruídos gaussianos brancos de intensidade da ordem de tres desvios padrões de cada um dos sensores separadamente, no intervalo de 30 a 40 segundos. Os resultados obtidos dessa forma encontram-se nas figuras 4.18 a 4.20. Destes resultados podemos notar a facilidade com que este tipo de ocorrência pode ser identificado comparando os valores da função L para estes ruídos anormais com os valores obtidos em condições normais de operação.

Estes ruídos anormais podem também ocorrer na forma de alterações espúrias por causas diversas das originadas por falhas no sistema de medidas ou por mal funcionamento da planta. Estes sinais espúrios devem ser filtrados de forma a não interferir no sistema de alarme. O tratamento do sinal por método de análise sequencial feito pelos filtros de Wald, como foi mostrado no início do capítulo, pode facilmente reduzir a probabilidade de alarmes falsos para taxas aceitáveis com um mínimo de carga computacional, tendo como único limitante a necessidade de sensores redundantes.

Vamos mostrar agora que a análise da inovação do filtro de estimação ótima também pode ser usado para a eliminação dos pulsos espúrios de duração de aproximadamente um segundo com grande eficácia. Pulsos espúrios de alturas de 2,3 e 4 desvios padrões foram simulados em instantes diferentes para cada um dos sensores e suas funções L foram determinadas e encontram-se nas figuras 4.21 a 4.23.

Através destas figuras podemos concluir que análise da inovação do filtro de estimação ótima pode discriminar os pulsos espúrios em todos os sensores, se compararmos os resultados obtidos com os valores da função L para operação normal.

Por fim determinamos o comportamento da função L para um transiente de grande intensidade afim de estudar o comportamento dos resíduos durante o transiente. O transiente escolhido foi o L6-1, o mesmo que utilizamos para confirmação do valor de  $\tau$ , e os resultados obtidos encontram-se na figura 4.24.

Observando as figura concluímos que o método acusaria falha do sistema pois os valores das funções L de todos os sensores ultrapassam os limites de sinalização de falhas ao mesmo tempo.

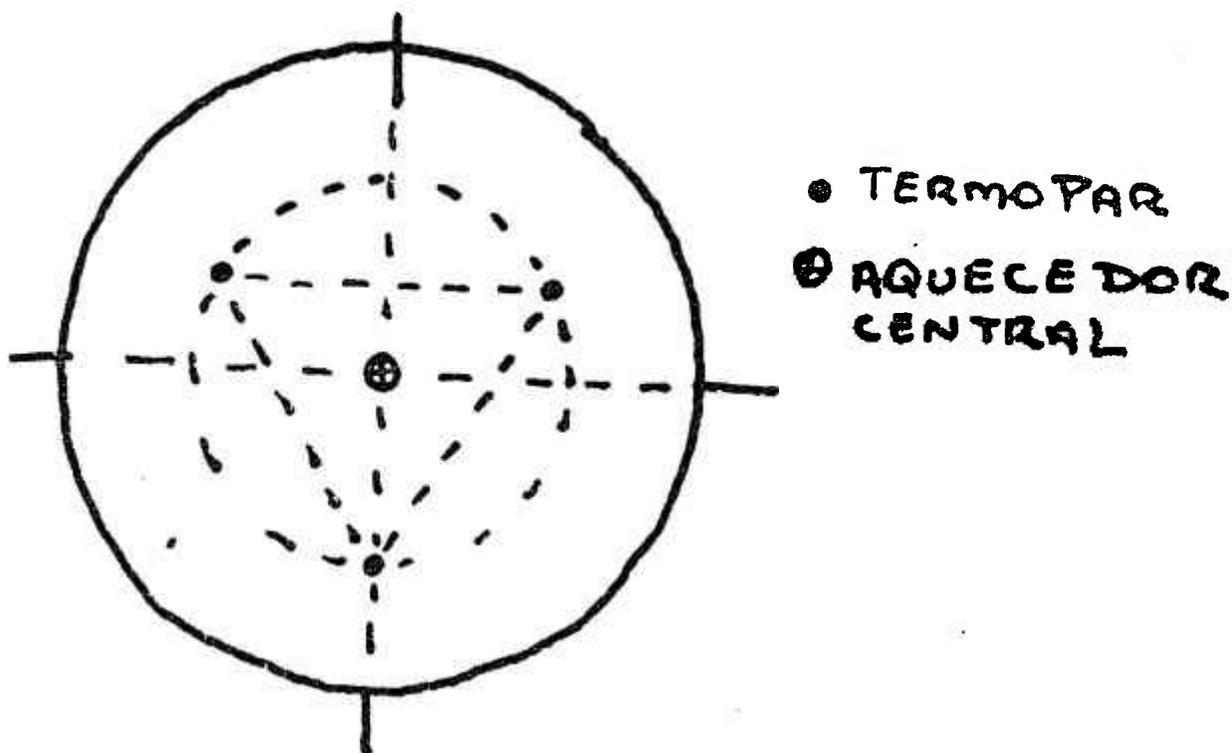


Figura 4.1a – Corte transversal do túnel de vento

Condições do teste

Medida = medida +  $\delta \cdot \sigma$

$\alpha = 0,001$

Contagens de espera = 2

Número de detecções = 10.000

$\delta$	Falhas no sinal real	Falhas no simulador
0,0	0	0
0,25	0	0
0,50	0	0
0,75	3	0
1,0	17	1
2,0	333	140
3,0	1659	1401
4,0	3809	4099
5,0	5210	5339
6,0	5674	5612

Tabela 4.1 – Resultado das falhas simuladas.

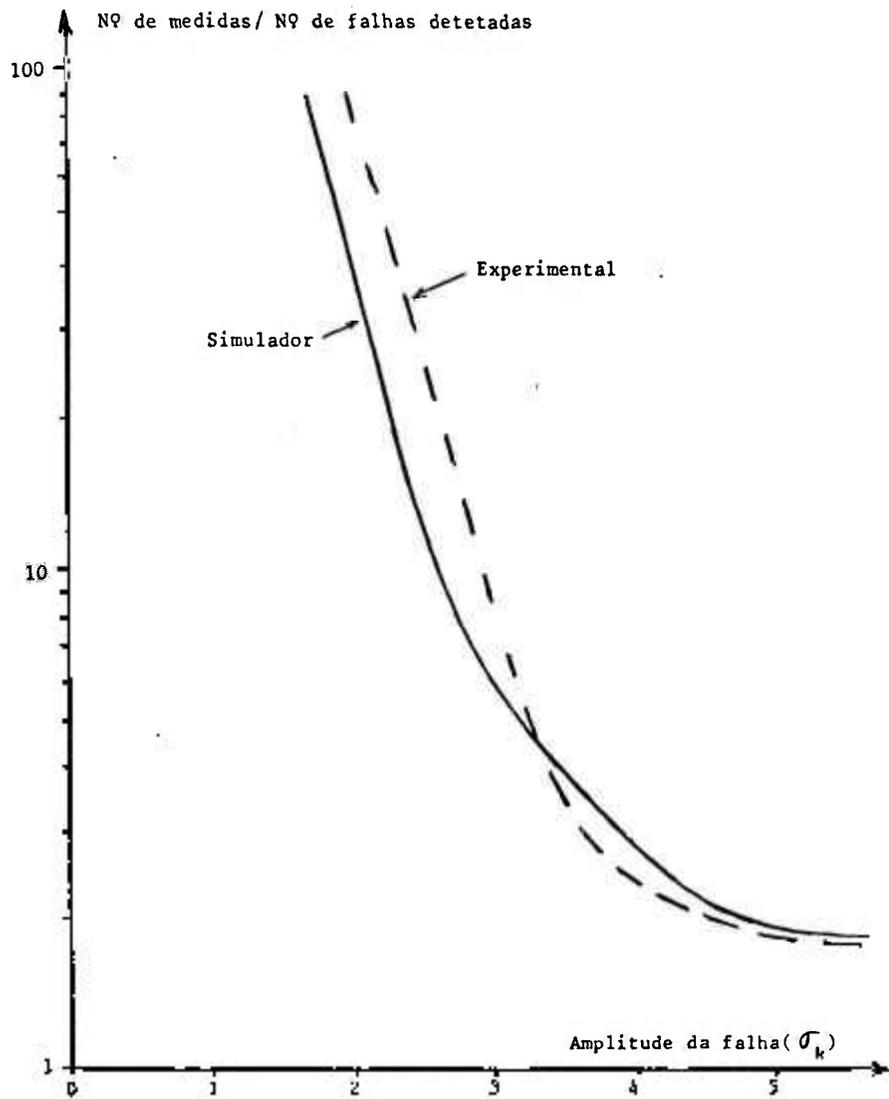


Figura 4.1 – Sensibilidade do Simulador em função da amplitude da falha simulada

Condições do teste

Medida = medida +  $3\sigma$

$\alpha = 0,001$

Contagens de espera = 2

Número de detecções = 10.000

$\beta$	Falhas no sinal real	Falhas no simulador
0,001	1659	1401
0,01	1677	1526
0,05	1703	1585
0,1	1709	1629
0,5	1795	1818

Tabela 4.2 – Variação no número de indicações de falhas em função do parâmetro  $\beta$ .

Condições do teste

Medida = medida +  $\delta \cdot \sigma$

$\alpha = \beta = 0,001$

Contagens de espera = 2

Número de detecções = 10.000

Número de pulsos espúrios = 1.666

$\delta$     Indicação de falhas

3,0    155

5,0    1491

Tabela 4.3 – Indicações de falhas para pulsos espúrios

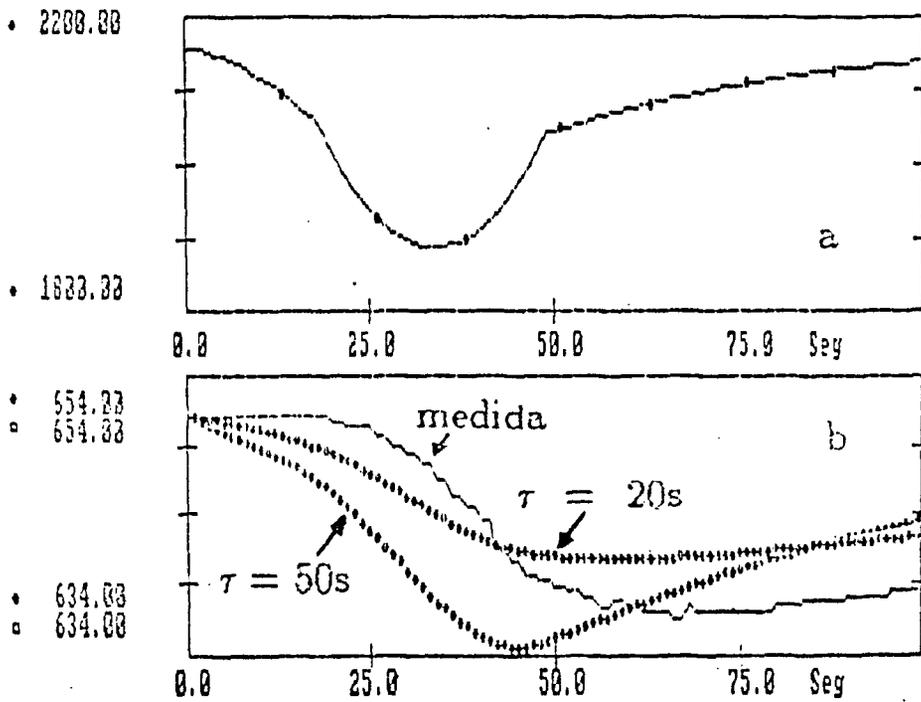


Figura 4.2 – Transiente L6-3 a) Medida da pressão b) Temperatura

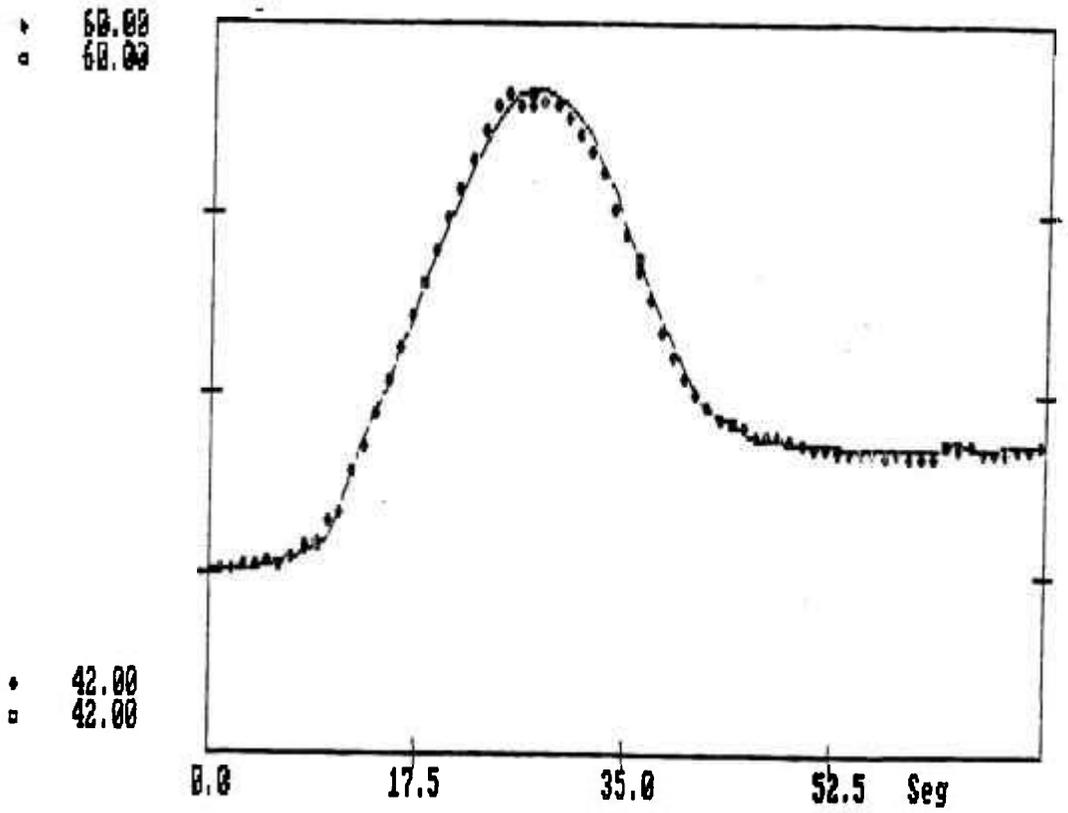


Figura 4.3 – Transiente L6-1 ( nível )

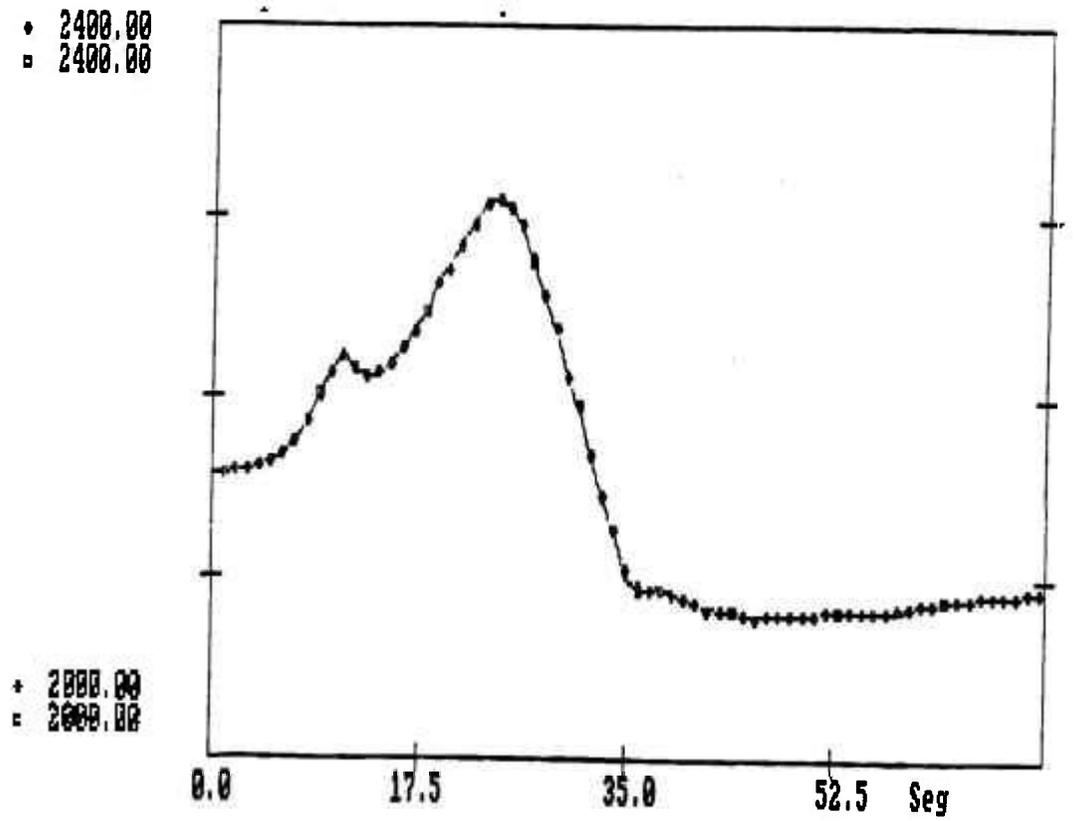


Figura 4.4 – Transiente L6-1 ( pressão )

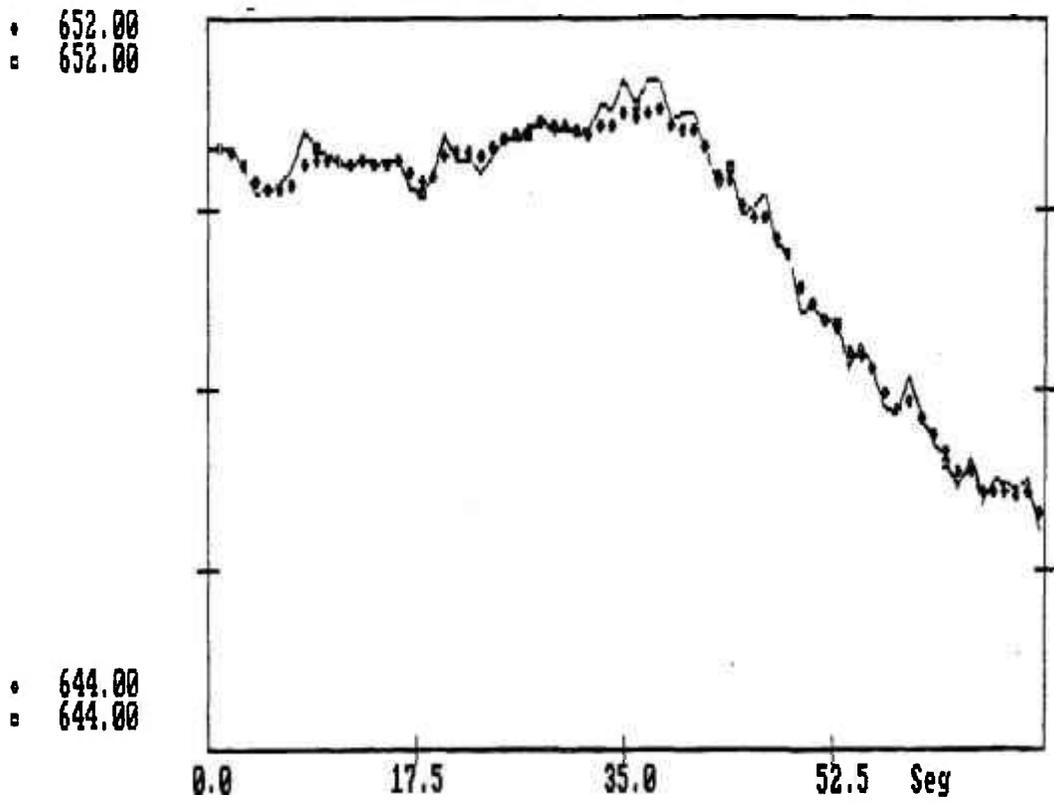


Figura 4.5 – Transiente L6-1 (temperatura)

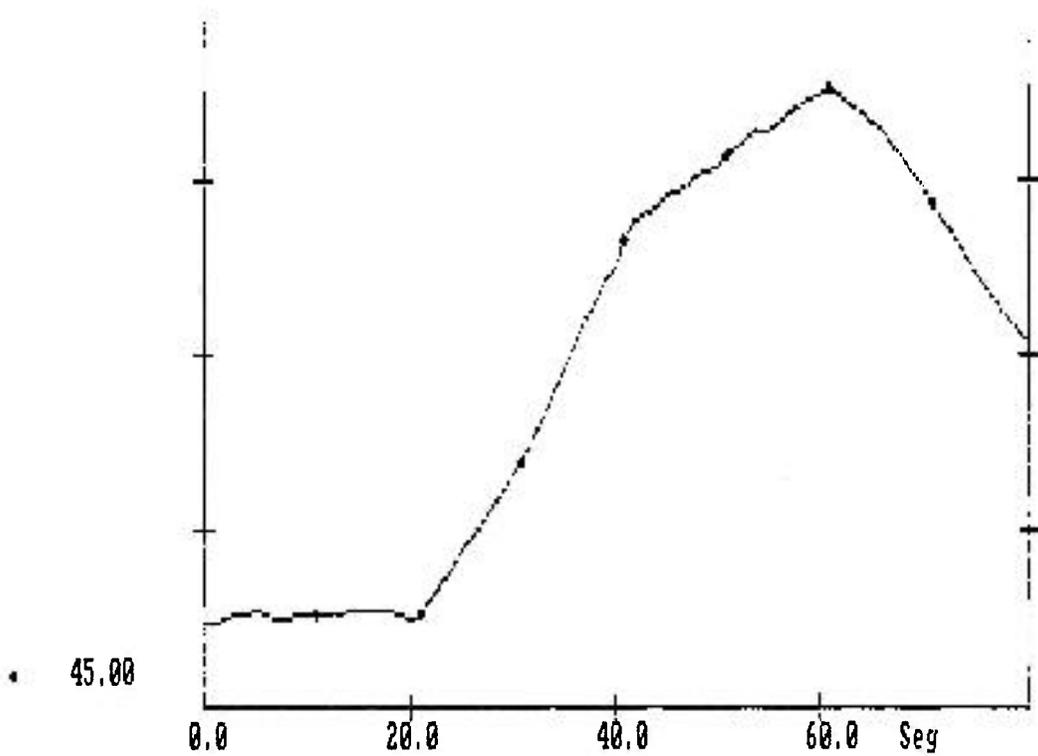


Figura 4.6 – Transiente de média intensidade ( nível )

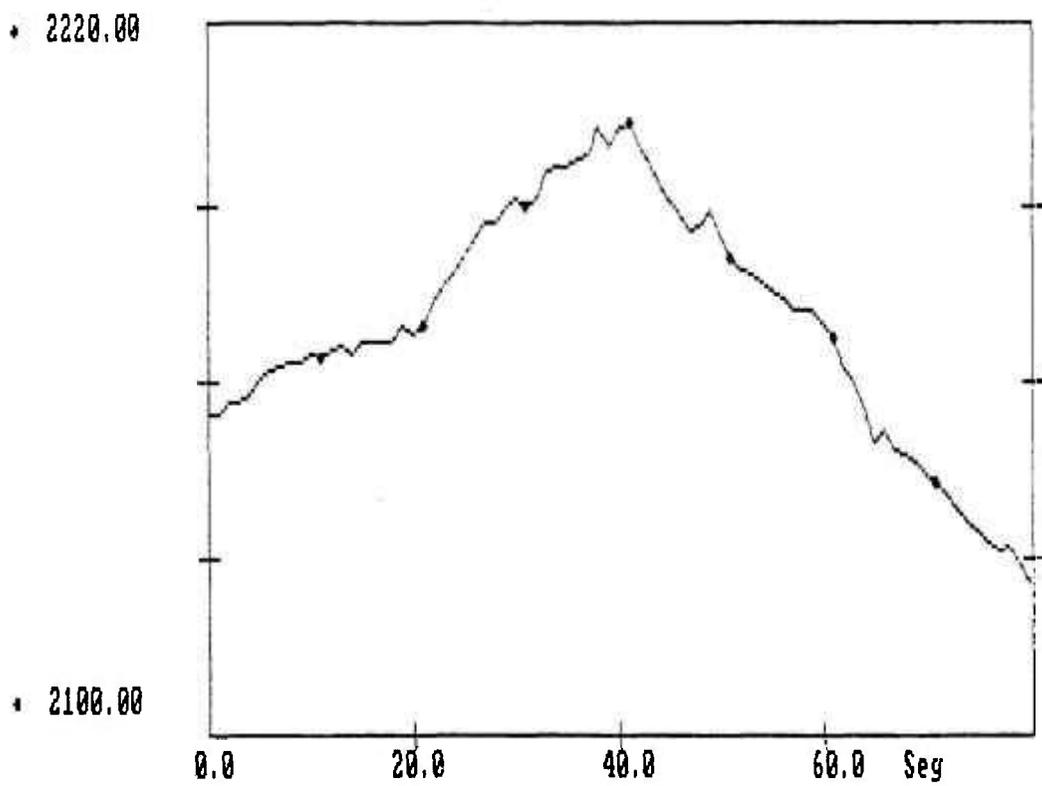


Figura 4.7 – Transiente de média intensidade ( pressão )

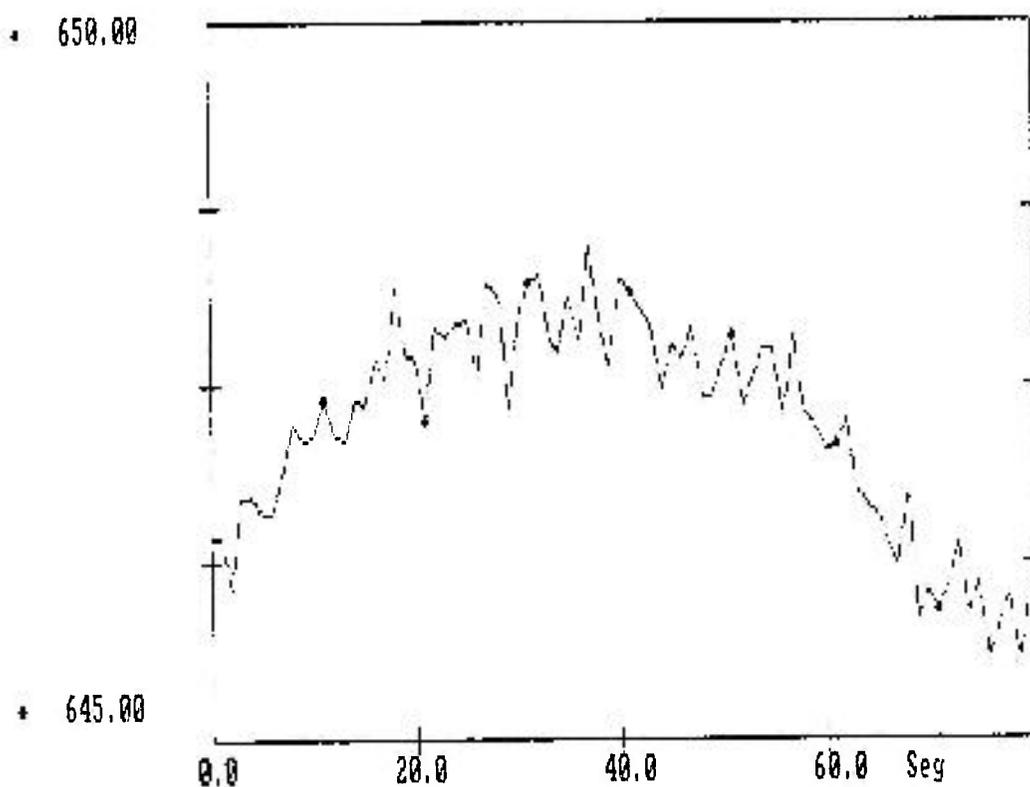


Figura 4.8 – Transiente de média intensidade ( temperatura )

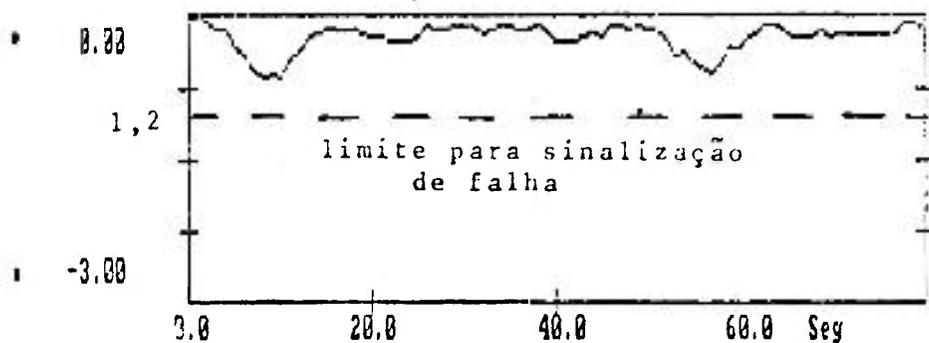


Figura 4.9 – Valor da função L do nível em operação normal

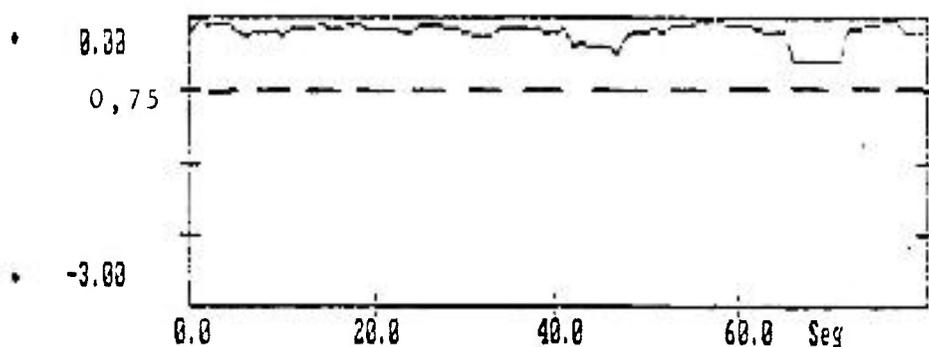


Figura 4.10 – Valor da função L da pressão em operação normal

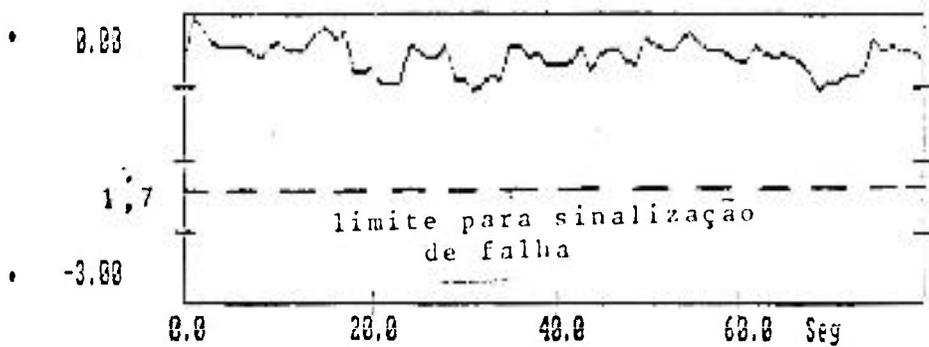


Figura 4.11 – Valor da função L da temperatura em operação normal

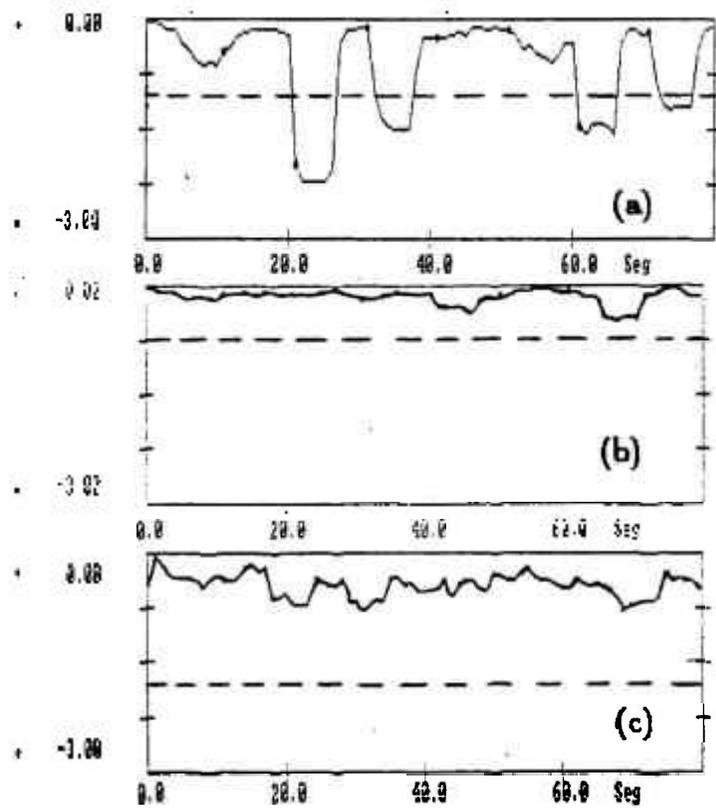


Figura 4.12 – Degrau de nível a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

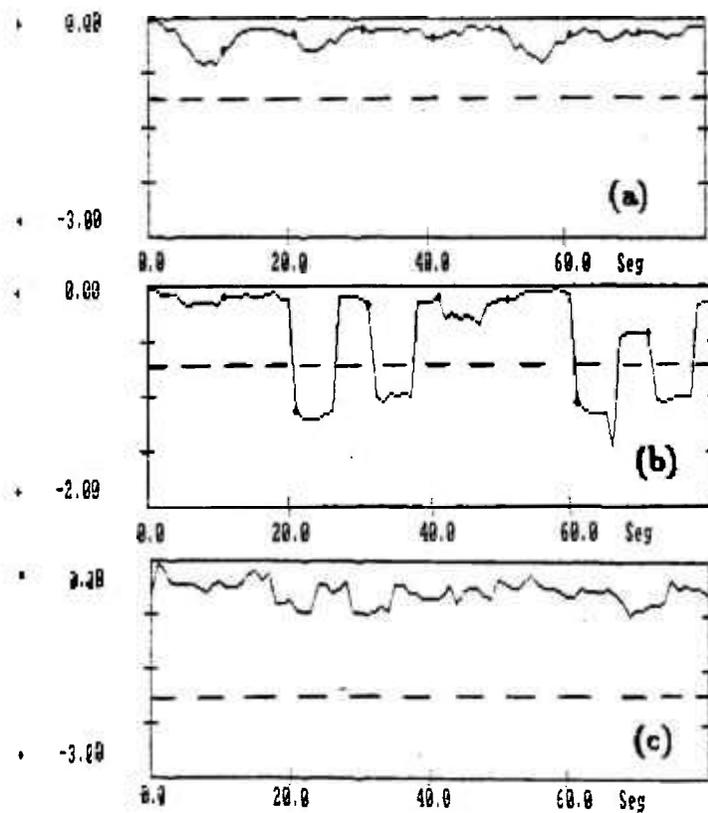


Figura 4.13 – Degrau de pressão a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

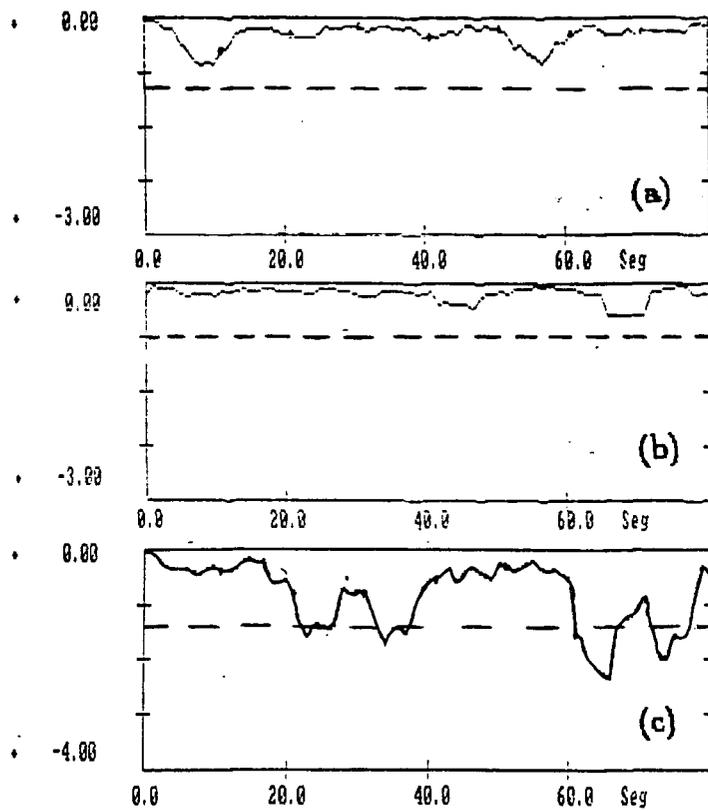


Figura 4.14 – Degrau de temperatura a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

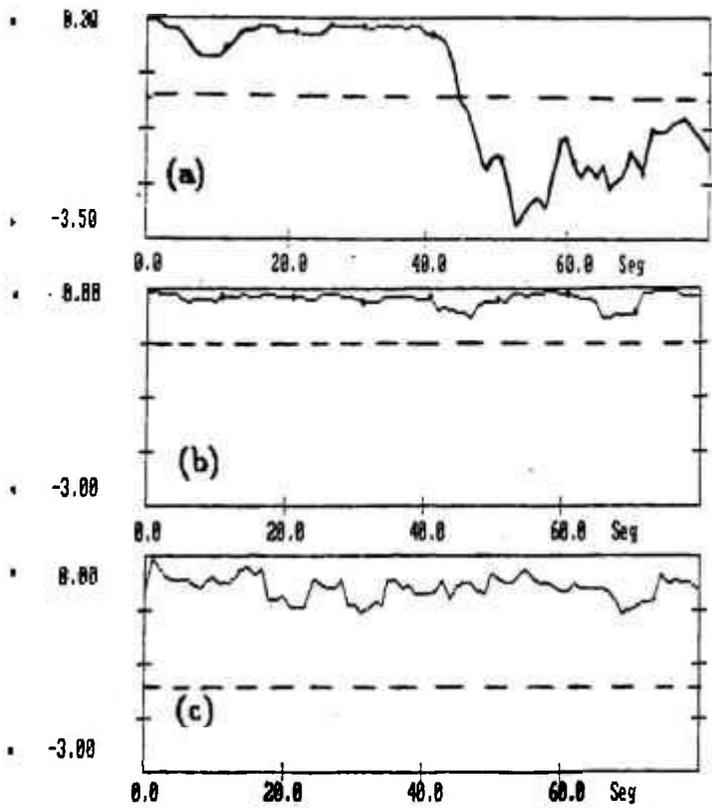


Figura 4.15 – Rampa no nível a) L do nível b) L da pressão

c) L da temperatura

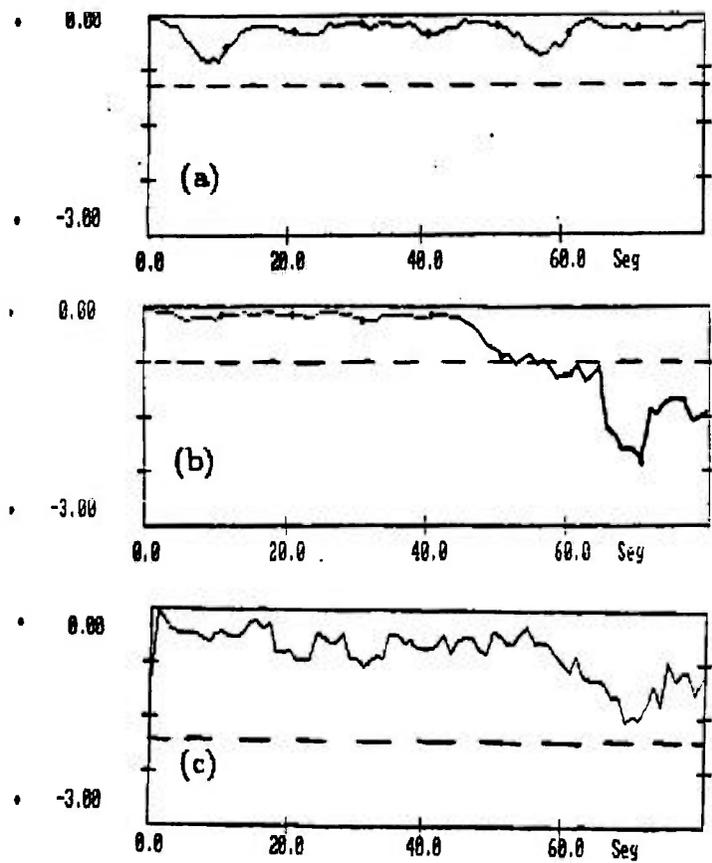


Figura 4.16 – Rampa na pressão a) L do nível b) L da pressão

c) L da temperatura

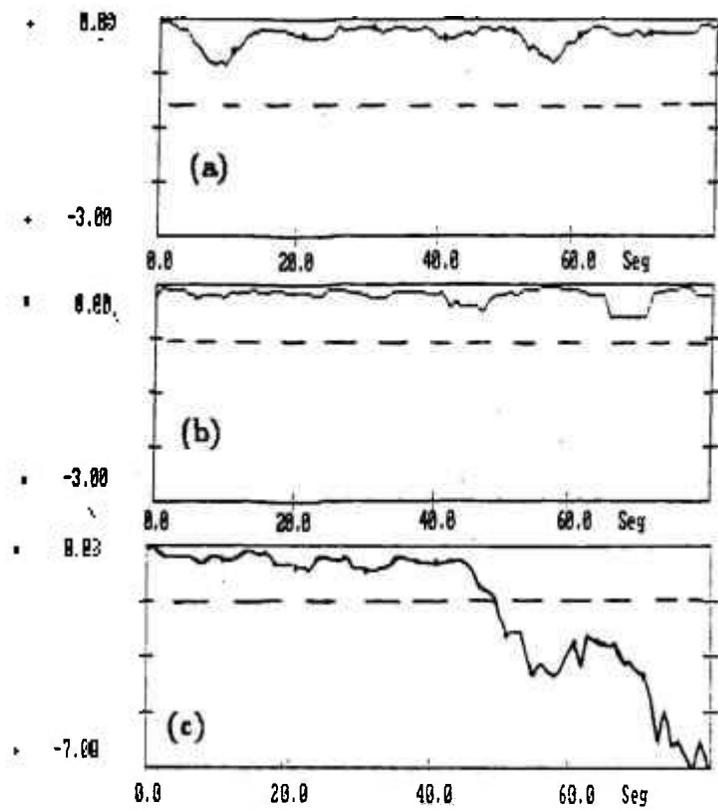


Figura 4.17 – Rampa na temperatura a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

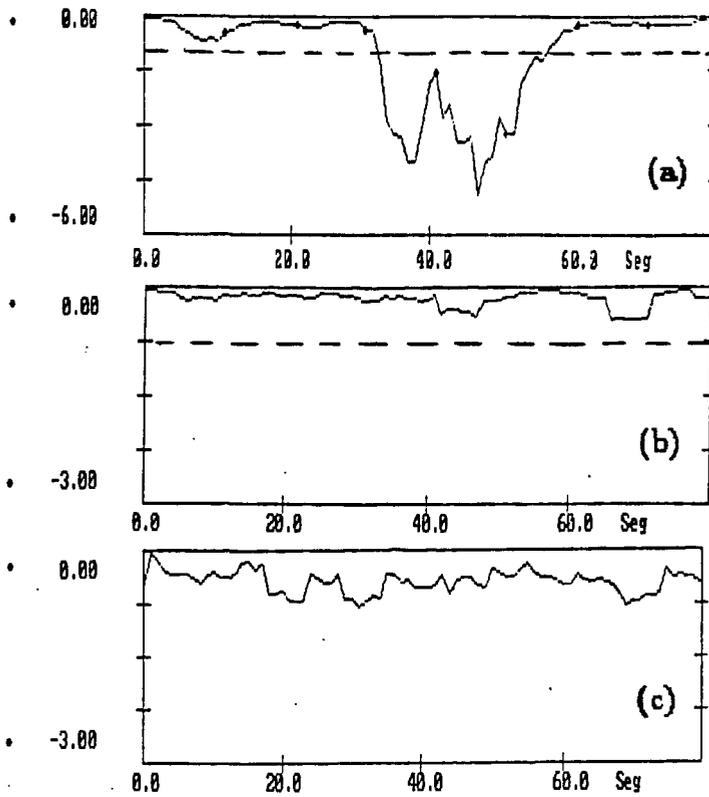


Figura 4.18 – Ruído no nível a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

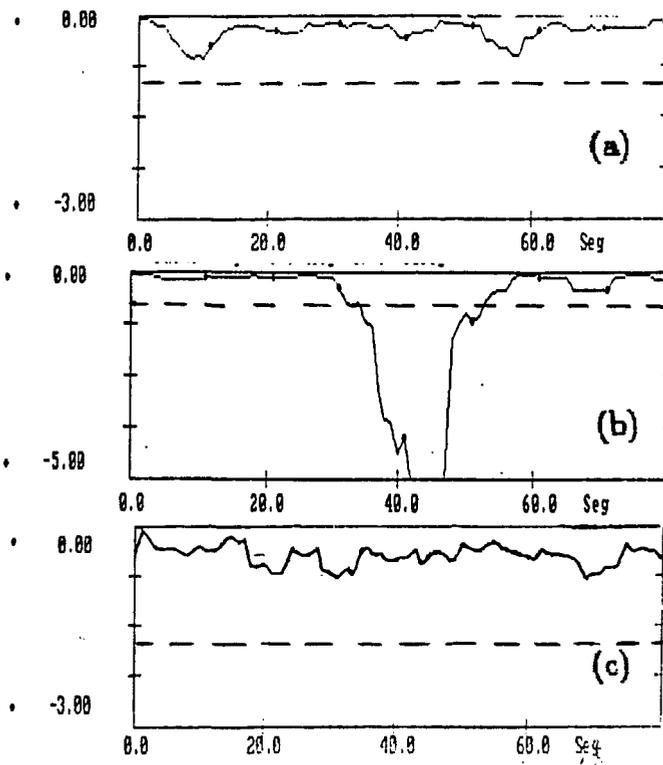


Figura 4.19 – Ruído na pressão a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

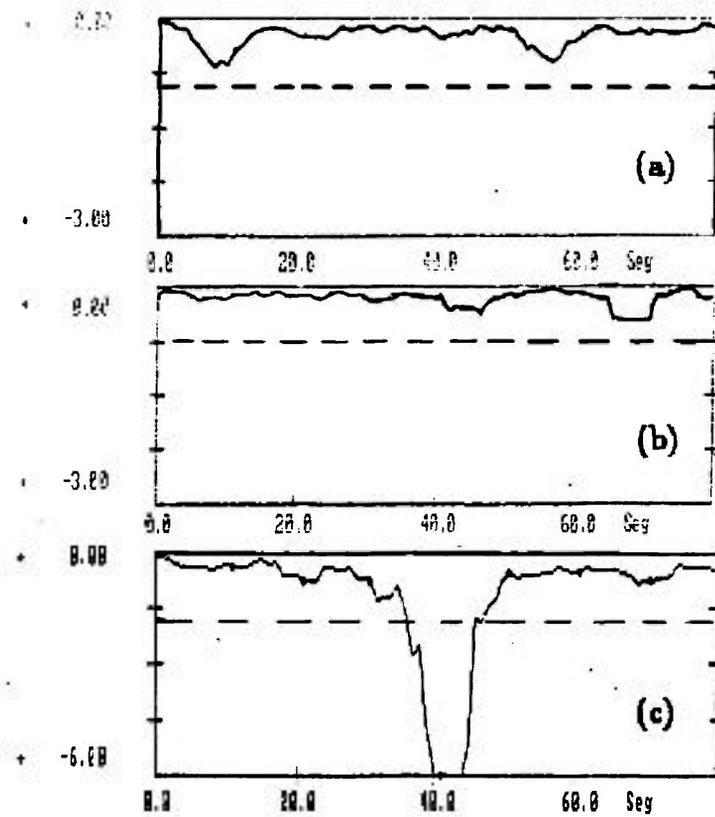


Figura 4.20 – Ruído na temperatura a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

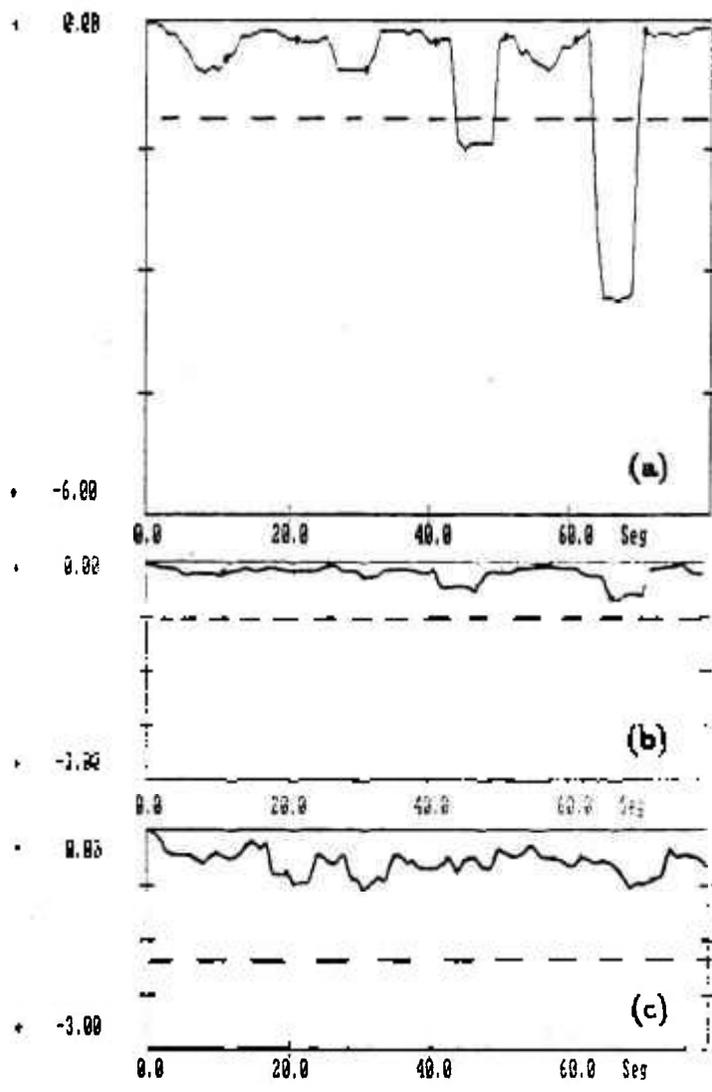


Figura 4.21 – Espúrio no nível a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

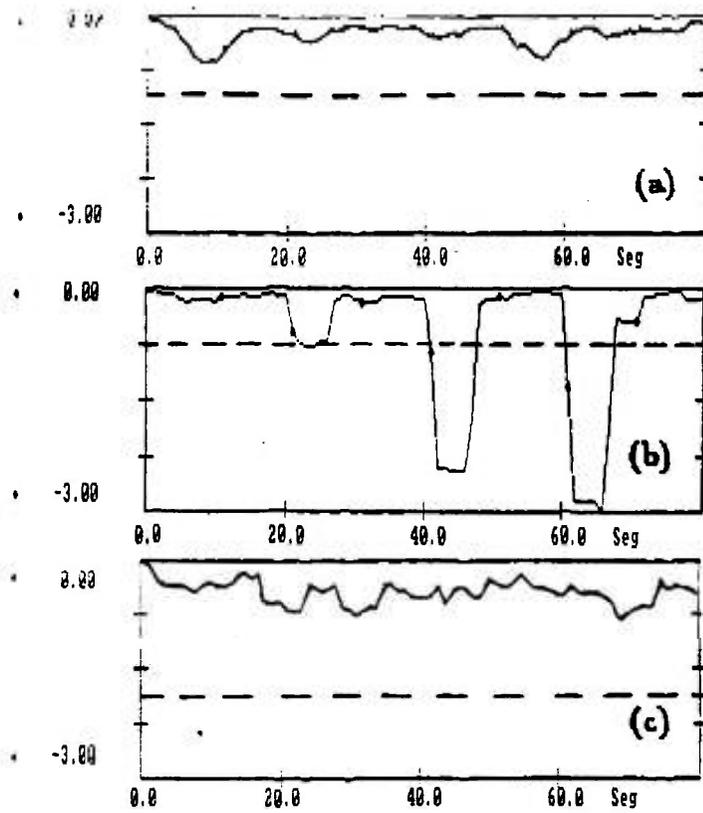


Figura 4.22 – Espúrio na pressão a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

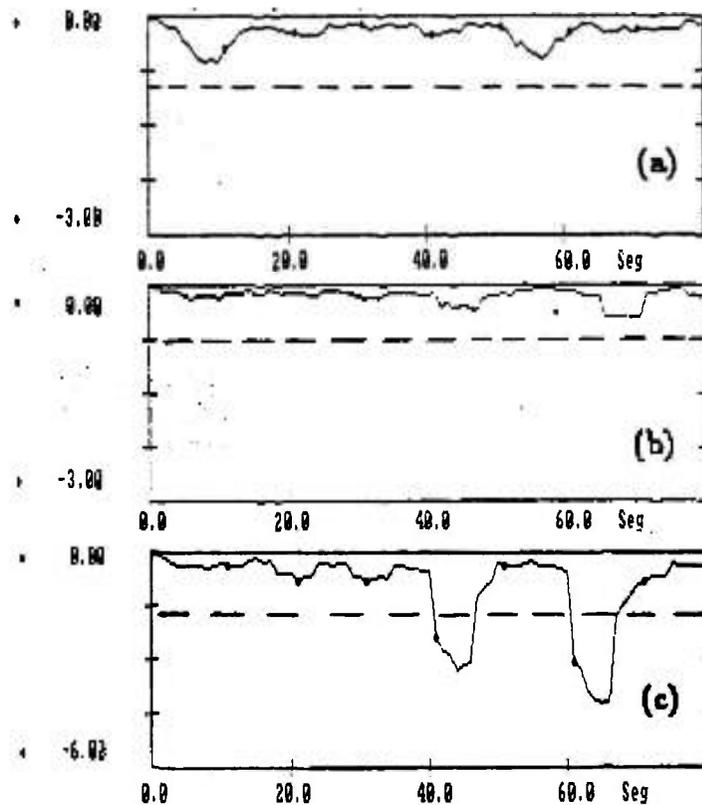


Figura 4.22 – Espúrio na temperatura a) L do nível b) L da pressão  
c) L da temperatura

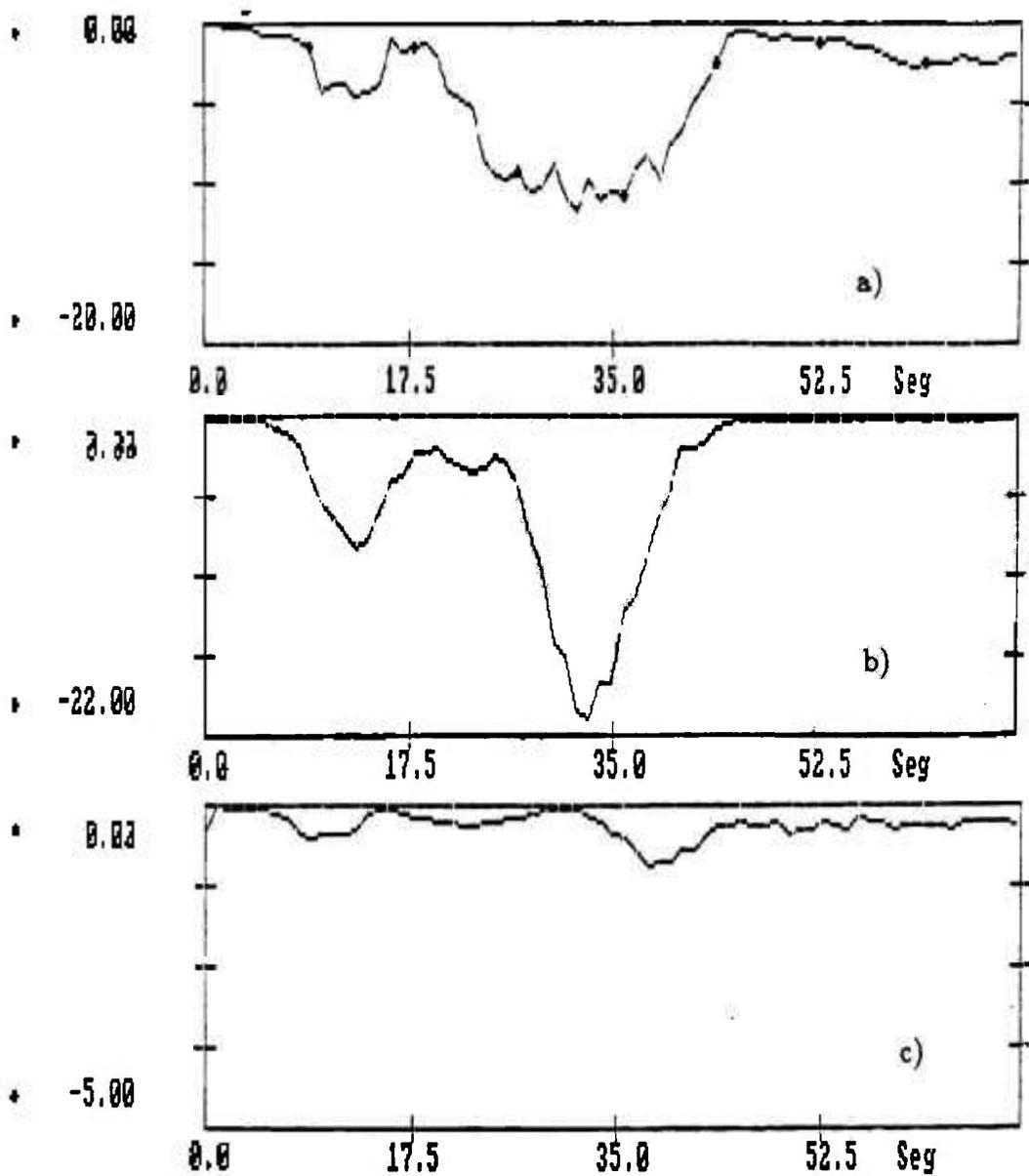


Figura 4.24 – Valores da função L para o transiente L6-1

a) L do nível b) L da pressão c) L da temperatura

## CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO

Após o acidente de Three Miles Island, todos esforços foram centrados em implementar metodologias de validação de sinais afim de garantir ao operador informações precisas sobre o estado da planta a cada instante, certificando-se de que as ações realizadas na operação da mesma não prejudicarão sua segurança. Além disso, qualquer falha na instrumentação de processo deve ser prontamente detetada, isolada e informada ao operador.

Neste estudo são cobertas duas situações distintas: sistemas onde há redundância de instrumentação na medida do parâmetro de processo estudado e na segunda não há redundância.

Quando da existência da redundância física utilizamos o Teste Sequencial de Razão de Probabilidade. Os resultados obtidos demonstraram a rapidez com que falhas são detetadas e isoladas (2 a 3 contagens), além da efetiva capacidade de filtrar pulsos espúrios que venham ocorrer ao longo da operação da planta, diminuindo assim a taxa de alarmes falsos.

Para aplicação desta metodologia necessita-se de uma análise estatística dos sinais provenientes dos sensores a fim de determinar a matriz de covariança do sistema em questão e posterior calibração do filtro através do simulador aqui desenvolvido.

Este método tem como limitação o não reconhecimento de flutuações graduais na leitura dos sensores e de falhas de modo comum; e como vantagens sua praticidade, economia e facilidade de implementação em microcomputadores pessoais.

O método da análise sequencial de razão de probabilidade, como ficou demonstrado pelos testes realizados, pode ser implementado para utilização prática em pressurizador de reatores PWR, no caso de haver a redundância de sensores.

Para sistemas onde não existe redundância física estudamos a viabilidade da aplicação da Análise de Inovação do Filtro de Estimação Ótima com utilização de filtro Kalman estendido.

Para aplicação desta metodologia necessita-se de um modelo dinâmico do sistema em estudo, por esta razão escolhemos utilizá-la no controle de um pressurizador de um reator tipo PWR, utilizando um modelo bastante simplificado.

Os testes com a Análise da Inovação do Filtro de Estimção Ótima com utilização de filtro Kalman extendido foram realizados com a simulação de operação normal na presença de um transiente de média intensidade perturbado por falhas tipo degrau; rampa e ruído.

Os resultados obtidos permitiram concluir o seguinte acerca do método de análise da inovação do filtro de estimção ótima:

1) O método é eficaz e confiável na detecção e isolação de falhas de ocorrência comum durante a operação de plantas nucleares.

2) O parâmetro  $\tau$ , atraso entre o sensor de temperatura e a temperatura da mistura, é influenciado por dois fatores. O primeiro está ligado ao tempo de resposta inerente ao sensor utilizado e tem pequena influência no seu valor, visto que os sensores utilizados normalmente tem resposta em torno de 1 ou 2 segundos. O segundo fator está ligado à localização do sensor no interior do pressurizador; como o modelo utilizado assume que água e vapor encontram-se numa mistura homogênea no interior do pressurizador, o que só ocorre na região de vapor, a instalação do sensor na região do líquido subresfriado causará um atraso considerável entre a temperatura de saturação determinada pela pressão interna do pressurizador e a temperatura indicada pelo sensor; esta é a razão do alto valor encontrado (50 segundos) para este parâmetro nos testes realizados.

3) A determinação do nível de aceitação e sinalização de falha pode ser previamente determinado por simulação numérica de falhas com evidente economia e rapidez, sendo que a calibração fina deve ser feita *in loco* a fim de considerar as variáveis difíceis de serem simuladas por modelagem estocástica simplificada.

4) No caso de transientes de grande intensidade, transientes anormais, os valores das funções L ultrapassariam o nível de aceitação e sinalização de falhas, no entanto, nesta situação o próprio sistema de segurança da planta sobrepor-se-ia ao sistema de detecção e isolamento de falhas.

No caso da análise de inovação do filtro de estimação ótima ficou comprovada a sua viabilidade em comparação com estudos de viabilidade de outros métodos apresentados na literatura, bastante para sua implementação prática avançar para o estágio de resolução dos problemas inerentes de implementação em testes reais em plantas nucleares. Neste estágio devemos verificar a adequação da modelagem ao sistema real, o nível de oscilações e incertezas nos parâmetros físicos e testes com simulação de falhas reais. Caso a viabilidade seja comprovada nos testes reais realizados deverá ser investigada a estabilidade do filtro adotado, através de metodologias convencionais de resolução dos problemas de divergência de filtros.

## Capítulo 6 – Referências Bibliográficas

- /1/ – WALD, A. *Sequential Analysis*. New York, John Wiley, 1947
- /2/ – RAY, A.; DESAI, M. & DEYST, J. On-Line Fault Diagnosis in Nuclear Reactors by Sequential Testing. *IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-20(3)*:1850–1855, 1983
- /3/ – DESAI, M. & RAY, A. A Fault Detection and Isolation Methodology. *20th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, Dec. 81
- /4/ – CLARK, R.N. & CAMPBELL, B. Instrument Fault Detection in Pressurized Water Reactor Pressurizer. *Nucl. Technol. 56*:137, 1982
- /5/ – TYLEE, J.L. *Real-Time Instrument Failure Detection in LOFT Pressurizer Using Functional Redundancy*. EGG-EE-5518 (1982)
- /6/ – MAYBECK, P.S. *Stochastic Models, Estimation and Control*. New York, Academic Press, 1979
- /7/ – JAWINSKY, A.H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York, Academic Press, 1970
- /8/ – TYLEE, J.L. A Generalized Likelihood Ratio Approach to Detecting and Identifying Failures in Pressurizer Instrumentation. *Nucl. Technol. 56*, 1982
- /9/ – ECKERT S. J., LOPARO K. A. & ROTH Z. S An Application of Nonlinear Filtering to Instrument Failure Detection in Pressurized Water Reactor. *Nucl. Technol. 74*, 1986
- /10/ – CHIEN T. T. & ADAMS M. B. A Sequential Failure Detection Technique and its Application. *IEEE Trans. on Automatic Control AC-21(5)*, 1976
- /11/ – RAY A., BERNARD J. A. & LANNING D. D. Computer Control of Power in Nuclear Reactor. *IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-30(1)*, 1983
- /12/ – CHUNG H. Y. & CHANG S. H. Development of Combined Algorithm of On-Line Instrument Failure Detection With an Improved Generalized Likelihood Ratio Method and Suboptimal Control on PWR Pressurizer. *Nucl. Technol. 74*, 1986

## APÊNDICE I – PARÂMETROS DO PRESSURIZADOR DO LOFT

Volume ( $V_p$ ) = 34,75 ft<sup>3</sup>

Altura (H) = 5,85 ft

Constante de conversão qualidade/nível ( $L_p$ ) = 2,02 pol/ft<sup>3</sup>

Vazão da válvula de spray ( $w_s$ ) = 2,126 lb/s

Vazão da válvula de escape de operação ( $w_e$ ) = 2,0062 lb/s

Vazão da válvula de escape de segurança ( $w_e$ ) = 12,61 lb/s

Potência dos aquecedores cíclicos ( $Q_c$ ) = 34,12 Btu/s

Potência dos aquecedores reserva ( $Q_r$ ) = 11,37 Btu/s

### ESTADO NOMINAL DE OPERAÇÃO

pressão = 2156,6 psia

qualidade = 0.0737

temperatura = 650.61 °F

### SET-POINTS DO SISTEMA DE CONTROLE DO PRESSURIZADOR

Reset-point da válvula de escape de segurança = 2549.0 psia

Set-point da válvula de escape de segurança = 2525,0 psia

Set-point da válvula de escape de operação = 2425.1 psia

Reset-point da válvula de escape de operação = 2405.0 psia

Set-point da válvula de spray = 2188.0 psia

Reset point dos aquecedores cíclicos = 2180.0 psia

Reset-point da válvula de spray e dos aquecedores reserva = 2155.0 psia

Set-point dos aquecedores cíclicos = 2145.0 psia

Set-point dos aquecedores reserva = 2135.0 psia

### MATRIZES UTILIZADOS PELO FILTRO KALMAN

$$Q = \begin{bmatrix} 2.30E-8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 9.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0625 \end{bmatrix}$$