



AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE  
DE SÃO PAULO

## **INTEGRAL - J PARA CARREGAMENTOS CÍCLICOS**

**JOSÉ EDUARDO MANESCHY**

Tese apresentada como parte dos requisitos para  
obtenção do Grau de Doutor em Ciências na Área  
de Tecnologia Nuclear - Reatores.

Orientador:

Prof. Dr. Arnaldo H. Paes de Andrade

**São Paulo**

**1998**

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
**Autarquia associada à Universidade de São Paulo**

**INTEGRAL - J PARA CARREGAMENTOS CÍCLICOS**

**JOSÉ EDUARDO MANESCHY**



**Tese apresentada como parte dos requisitos para  
obtenção do Grau de Doutor em Ciências na Área  
de Tecnologia Nuclear – Reatores.**

**Orientador:**

**Prof. Dr. Arnaldo H. Paes de Andrade**

**SÃO PAULO**

**1998**

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Dr. Arnaldo H. Paes de Andrade. Sou grato pelo seu incentivo e numerosas sugestões ao longo de todas as etapas da tese.

Ao Dr. William O'Donnell, da *O'Donnell Consulting Engineers Inc.* de Pittsburgh, por suas idéias e valiosas informações.

Agradeço ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)* e à *Furnas Centrais Elétricas* pela ajuda financeira recebida durante a permanência na *Universidade de Pittsburgh*, nos Estados Unidos.

Ao Dr. Luciano Mendes Bezerra, da *Universidade de Brasília*, e ao Dr. Carlos Edilson Maneschy, da *Universidade Federal do Pará*, pela revisão do texto preliminar deste trabalho. Obrigado pela paciência e atenção que tiveram para responder às minhas muitas questões.

Aos meus amigos Júlio e Carlos Alexandre, companheiros na empreitada "doutorado na área de mecânica da fratura". As longas conversas e discussões, principalmente àquelas na América, me encorajaram e deram ânimo para tornar mais fácil a jornada.

Aos meus pais e irmãos, sempre presentes em todos os momentos da minha vida.

Finalmente, quero agradecer à Cristina, que com seu amor me deu tranquilidade e serenidade durante a etapa final da tese. À ela e ao Felipe dedico este trabalho.

## INTEGRAL - $J$ PARA CARREGAMENTOS CÍCLICOS

José Eduardo Maneschy

### RESUMO

Este trabalho apresenta um procedimento numérico para o cálculo da integral  $J$  para carregamentos cíclicos,  $\Delta J$ . Esta proposta permite prever o crescimento de trincas nos casos em que estão presentes zonas plásticas extensas, situação na qual a teoria da mecânica da fratura linear-elástica não pode ser aplicada. A quantidade  $\Delta J$ , determinada por meio da energia de deformação obtida da relação força versus deslocamento ( $P - \delta$ ), leva em conta automaticamente as tensões e deformações residuais que ocorrem durante eventos cíclicos. O sólido analisado é representado por uma chapa com trinca passante central em estado plano de deformações, submetida à solicitações com amplitude constante do tipo repetida ( $R = 0,0$ ) e completamente reversa ( $R = -1,0$ ). O material é o aço inoxidável, cujo comportamento elasto-plástico é assumido com encruamento cinemático. A solução do problema é obtida por meio da técnica dos elementos finitos, sendo a curva  $P - \delta$  gerada com o código ANSYS. Essa curva é empregada como dado de entrada para o cálculo de  $\Delta J$ , determinado numericamente com o método da quadratura Gaussiana, com formulação implementada num programa desenvolvido pelo autor. Os resultados indicam que mesmo em presença de carregamento elevado a resposta do material pode ser prevista por meio da mecânica da fratura linear-elástica. Nesta pesquisa é também investigada a diferença entre  $\Delta J$  e  $\Delta J_{mon}$ , o valor de  $J$  cíclico calculado usando-se expressões para carregamentos monotônicos. A comparação entre esses dois parâmetros mostra que o emprego de  $\Delta J_{mon}$  é bastante conservador e, portanto, a estimativa da propagação de trincas com  $\Delta J$  como calculado aqui pode estender a vida útil da maior parte dos componentes limitados por fadiga.

## J-INTEGRAL FOR CYCLIC LOADING

José Eduardo Maneschy

### ABSTRACT

This thesis presents a numerical approach to calculate  $J$  integral for cyclic loading,  $\Delta J$ . The proposed methodology allows to estimate crack growth rates when plastic zones are present, and lifetime prediction by linear-elastic fracture mechanics is not adequate. The quantity  $\Delta J$  is determined herein accounting for residual stresses and strains that occur during cyclic events for a constant load range, using the strain energy obtained from the force versus displacement ( $P - \delta$ ) cyclic response. A centrally cracked plate under plane strain is analyzed using kinematic hardening representative of stainless steels. The  $P - \delta$  curve is generated by the ANSYS finite element software. These data are used as input in a computer program developed by the author to perform  $\Delta J$  calculations. The integration algorithm implemented in such program is based on the Gaussian quadrature procedure. Even with no cyclic hardening, shakedown to essentially elastic behavior was found at quite large load amplitudes for both  $R = 0.0$  (zero-to-tension) and  $R = -1.0$  (completely reversed) loading. This means that linear elastic fracture mechanics  $\Delta K$  correlations with crack growth rates can be used for much higher stress amplitudes than previously thought. The difference between  $\Delta J$  and  $\Delta J_{mon}$ , the value related to conventional methods for monotonic loading cases, is also examined. The results indicate that the use of  $\Delta J_{mon}$  values is overly conservative. Crack propagation rates into the plastic regime are much lower than previously predicted using  $\Delta J_{mon}$ , and the safe life of most components limited by fatigue cracking can be extended.

## SUMÁRIO

	Página
<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	i
<b>RESUMO</b> .....	ii
<b>ABSTRACT</b> .....	iii
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	vi
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	vii
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	viii
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 <i>Descrição do problema</i> .....	1
1.2 <i>Objetivo desta pesquisa</i> .....	4
<b>2 A INTEGRAL-<math>J</math> - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	7
2.1 <i>Introdução</i> .....	7
2.2 <i>Formulação original</i> .....	7
2.3 <i>Resultados experimentais</i> .....	11
2.4 <i>Métodos analíticos e numéricos</i> .....	16
2.5 <i>Estágio atual para a estimativa de <math>\Delta J</math> - Discussão</i> .....	20
<b>3 A PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE <math>\Delta J</math></b> .....	23
3.1 <i>Introdução</i> .....	23
3.2 <i>O conceito de <math>J</math> monotônico</i> .....	23
3.3 <i>A metodologia proposta para o cálculo de <math>J</math> cíclico</i> .....	25

	Página
<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA.....</b> 30
	4.1 <i>Introdução.....</i> 30
	4.2 <i>Determinação da curva força versus deslocamento.....</i> 30
	4.3 <i>Cálculo de <math>J</math> e <math>\Delta J</math>.....</i> 34
<b>5</b>	<b>RESULTADOS.....</b> 38
	5.1 <i>Introdução.....</i> 38
	5.2 <i>Dados do problema.....</i> 38
	5.3 <i>Análise linear-elástica.....</i> 40
	5.4 <i>Análise elasto-plástica.....</i> 42
<b>6</b>	<b>AVALIAÇÃO E APLICAÇÃO DOS RESULTADOS.....</b> 55
	6.1 <i>Introdução.....</i> 55
	6.2 <i>Influência das tensões médias em <math>\Delta J_e</math>.....</i> 55
	6.3 <i>Valores de <math>\Delta J</math> com o uso das equações da análise linear-elástica..</i> 56
	6.4 <i>Estimativa do crescimento de trincas com <math>\Delta J_{mon}</math>.....</i> 57
	6.5 <i>Geometria e carregamentos genéricos.....</i> 58
	6.6 <i>Integral-J para material com deformação inicial.....</i> 59
<b>7</b>	<b>FUTURAS PESQUISAS - SUGESTÕES.....</b> 62
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b> 64
	<b>APÊNDICE 1 - Listagem do programa fonte.....</b> 66
	<b>APÊNDICE 2 - Qualificação do programa fonte.....</b> 70
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b> 73

## LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1 - Propriedades geométricas da chapa com trinca passante	39
Tabela 2 - Propriedades do aço 304 a 21°C	39
Tabela 3 - Valores de $\Delta J$ e $\Delta J_{mon}$ em função de $R$	52

## LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1 - Chapa com trinca passante central	6
Figura 2 - Região da trinca e contorno de integração para cálculo de $J$	9
Figura 3 - Correlação $da/dN - \Delta J$ para diferentes geometrias	12
Figura 4 - Curva $P - \delta$ típica obtida do ensaio de fadiga	14
Figura 5 - Curva esquemática tensão versus deformação	14
Figura 6 - Energia de deformação para cálculo de $J$ - carregamento monotônico	25
Figura 7a - Definição operacional para o cálculo de $\Delta J$ - caso linear-elástico	28
Figura 7b - Definição operacional para o cálculo de $\Delta J$ - caso elasto-plástico	28
Figura 8 - Malha de elementos finitos e condições de contorno (1/4 da chapa)	32
Figura 9 - Efeito da tensão média no cálculo de $\Delta J$ . Análise linear-elástica [ $\Delta J_e$ é calculado com a Eq.(8) e $\Delta J$ com a Eq.(17)]	41
Figura 10 - $J$ versus força aplicada. Análises linear-elástica e elasto-plástica	44
Figura 11 - Zona plástica e tamanho da trinca sob condição de carregamento elevado	45
Figura 12 - Valores de $J$ monotônicos. Comparação entre a análise por elementos finitos e a solução fornecida por Ainsworth (1984)	46
Figura 13 - Curva cíclica $P - \delta$ para $R = 0,0$ e $\Delta P / P_o = 1,56$	48
Figura 14 - Curva cíclica $P - \delta$ para $R = -1,0$ e $\Delta P / P_o = 1,56$	49
Figura 15 - Correlação entre $\Delta J$ e a variação da carga $\Delta P$ para $R = 0,0$ e $-1,0$ [Solução linear-elástica da Eq.(8) e elasto-plástica da Eq.(18)]	51
Figura 16 - Curva cíclica $P - \delta$ para $R = -1,0$ e $\Delta P / P_o = 1,87$	53
Figura 17 - Comparação entre $\Delta J$ e $\Delta J_{mon}$ em função da variação da carga para $R = 0,0$ e $-1,0$	54
Figura 18 - Efeito do campo residual no cálculo de $J$ (res: + tensão residual trativa; res: - tensão residual compressiva)	61

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	tamanho da trinca
$B$	espessura do sólido
$b$	ligamento remanescente
$da/dN$	taxa de propagação da trinca
$ds$	incremento no comprimento ao longo do contorno na ponta da trinca
$E, E'$	módulo de elasticidade
$G$	taxa de energia elástica liberada
$h$	metade da altura da chapa
$J$	integral- $J$
$J_e$	componente linear-elástica ou em condição de escoamento reduzido de $J$
$J_{res}$	integral- $J$ com deformação inicial
$K$	fator de intensidade de tensões
$N$	número de ciclos
$n$	coeficiente de encruamento da lei de Ramberg-Osgood
$P$	carga aplicada
$P_o$	carga limite
$P - \delta$	força versus deslocamento
$R$	razão de carga ou tensão ( $P_{min} / P_{max} = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ )
$s$	constante do material na lei de Ramberg-Osgood
$T_m$	componentes do vetor das trações
$U$	energia de deformação por unidade de espessura
$U^*$	energia complementar por unidade de espessura
$u_m$	componentes do vetor de deslocamentos
$W$	densidade da energia de deformação
$w$	metade da largura da chapa
$\sigma$	tensão aplicada
$\sigma_{mn}$	componentes do tensor de tensões

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_y$	limite de escoamento
$\varepsilon_{mn}$	componentes do tensor de deformações
$\varepsilon_0$	deformação de referência ( $\sigma_0 / E$ )
$\delta$	deslocamento
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\alpha$	constante adimensional da lei de Ramberg-Osgood
$\Delta G$	variação na taxa de energia elástica liberada
$\Delta J$	integral- $J$ para carregamento cíclico
$\Delta J_e$	componente linear-elástica ou em condição de escoamento reduzido de $\Delta J$
$\Delta J_p$	componente plástica de $\Delta J$
$\Delta J_{mon}$	$\Delta J$ calculado das expressões para carga monotônica
$\Delta K$	variação do fator de intensidade de tensões
$\Delta u_m$	variação nas componentes do vetor de deslocamentos
$\Delta P$	variação da carga aplicada ( $P_{max} - P_{min}$ )
$\Delta u_m$	variação nas componentes do vetor de deslocamentos
$\Delta W$	variação na densidade da energia de deformação
$\Delta \sigma$	variação da tensão aplicada ( $\sigma_{max} - \sigma_{min}$ )
$\Delta \sigma_{mn}$	variação nas componentes do tensor de tensões
$\Delta \varepsilon_{mn}$	variação nas componentes do tensor de deformações
$\Pi$	energia potencial
ASME	American Society of Mechanical Engineers
CT	corpo de provas do tipo compacto de tração
CC	corpo de provas do tipo chapa com trinca central
EPRI	Electric Power Research Institute

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 - Descrição do problema

Nas últimas três décadas os conceitos da mecânica da fratura linear-elástica vêm sendo aplicados para avaliar a integridade estrutural dos equipamentos em operação na indústria nuclear. Quando o material é sujeito a eventos cíclicos, como os causados por transientes térmicos, podem surgir trincas de fadiga, que são analisadas com base nas regras definidas na norma *ASME Boiler and Pressure Vessel Code* (1992). A previsão da vida dos componentes de acordo com essa referência é baseada numa lei simples, que correlaciona a propagação da trinca por ciclo de carga,  $da/dN$ , e a variação do fator de intensidade de tensões,  $\Delta K$  (PARIS e ERDOGAN, 1960).

A estimativa do crescimento de defeitos nos equipamentos em serviço nas indústrias naval e aeroespacial é também realizada usando a relação  $da/dN - \Delta K$ . Entretanto, sua aplicação é limitada aos casos onde as cargas flutuantes são moderadas e as zonas plásticas são reduzidas quando comparadas às dimensões da trinca existente. Em geral, quando as solicitações envolvidas são elevadas, como em fadiga de baixo-ciclo, as zonas plásticas são significativas e a previsão da vida por meio da mecânica da fratura linear-elástica pode não ser válida. Nessa situação uma metodologia de análise alternativa deve ser explorada.

Uma nova tecnologia que vem sendo usada para estender a vida dos equipamentos é baseada na teoria da mecânica da fratura elasto-plástica e no conceito da integral- $J$  definido por RICE (1968a). Quando o carregamento é flutuante a estimativa do crescimento de defeitos pode ser realizada em função de  $J$  para solicitações cíclicas,  $\Delta J$ . O

emprego desse parâmetro foi proposto inicialmente por DOWLING e BEGLEY (1976), e passou a ser adotado para definir a vida dos materiais nos casos em que  $\Delta K$  não caracteriza o campo de tensões na região do defeito.

Um exemplo típico do emprego da correlação  $da/dN - \Delta J$  é no estudo do comportamento de pequenas trincas, na região do limiar de fadiga na curva  $da/dN - \Delta K$ , zona onde a fratura linear-elástica não prevê adequadamente o crescimento do defeito (TANAKA e NAKAI, 1983). A análise dessas trincas é importante nas situações em que pode ocorrer dano por corrosão-fadiga, o mecanismo que controla a vida dos equipamentos que operam em ambiente agressivo como o existente em reatores (MATTAR; MANESCHY e ANDRADE, 1995).

Contudo, nos problemas de fratura a teoria da mecânica do contínuo não pode ser violada e, por isso, é necessário um comprimento do defeito suficiente para evitar que os efeitos da microestrutura afetem a sua propagação. Esse valor depende do tamanho de grão do material, sendo 0,1 mm um comprimento característico para considerar a trinca como pequena. Como vantagem adicional da formulação elasto-plástica tem-se a sua aplicação geral nos problemas de fadiga uma vez que, ao contrário de  $\Delta K$ , com  $\Delta J$  pode-se prever a vida desde os primeiros momentos após a iniciação da trinca até um tamanho final especificado (DOWLING e BEGLEY, 1976; RITCHIE, 1983; O'DONNELL et al., 1992; ANDERSON, 1995).

Outros exemplos onde a relação  $da/dN - \Delta J$  é aplicada também podem ser citados. Em O'DONNELL (1988) é apresentada uma metodologia teórica que adota essa correlação para determinar a influência de um ambiente agressivo nas curvas  $S-N$  do material (tensão alternada versus ciclos para a falha) disponíveis no ASME *Boiler and Pressure Vessel Code* (1992). Entretanto, como essas curvas estão associadas à fadiga de baixo-ciclo, as zonas plásticas existentes invalidam a previsão da vida em termos de  $\Delta K$ . Para contornar essa dificuldade, a referência propõe que nesses casos  $\Delta J$  seja empregado. Uma extensão dessa técnica, onde o fechamento de trincas é incorporado na lei

$da/dN - \Delta J$ , é mostrado em O'DONNELL e RAJAGOPAL (1994). Nestes estudos a propagação é estimada em função de  $\Delta J$  determinado com as expressões para solicitações monotônicas, e considerando condição de escoamento reduzido.

Existem alguns resultados obtidos dos testes de fadiga que comprovam a validade da relação  $da/dN - \Delta J$  para os casos onde a presença de plasticidade é significativa (DOWLING e BEGLEY, 1976; DOWLING, 1976; DOWLING, 1977; EL HADDAD e MUKHERJE, 1983; TANAKA et al., 1983; O'DONNELL, 1988; JABLONSKI, 1989; BANKS-SILLS e VOLPERT, 1991; MIURA et al., 1997). Estas evidências experimentais são necessárias para assegurar que a propagação da trinca pode ser controlada por  $\Delta J$ , mesmo que o emprego dessa variável não seja rigorosamente correto quando ocorre descarregamento ( $J$  como definido originalmente é baseado na teoria da deformação total).

O cálculo de  $\Delta J$  é um problema relativamente pouco estudado na área de mecânica da fratura e, por essa razão, não existem expressões para a sua obtenção facilmente disponíveis na literatura. Ao contrário do parâmetro  $\Delta K$ , que pode ser determinado por meio de fórmulas divulgadas em diversas referências (TADA et al., 1973; ROOKE e CARTWRIGHT, 1976), muito pouco é conhecido sobre  $J$  em presença de solicitações cíclicas. A primeira contribuição ao seu cálculo foi a proposta de DOWLING e BEGLEY (1976), que estimaram  $\Delta J$  a partir da energia de deformação obtida da curva força versus deslocamento medida durante os testes de fadiga no material. Pesquisas analíticas e numéricas documentadas em TANAKA (1983), BANKS-SILLS e VOLPERT (1991) e CHOW e LU (1991) sugerem a obtenção de  $\Delta J$  usando a integral de contorno estabelecida por Rice. Contudo, a solução dessas integrais é muito difícil nos problemas tridimensionais (PARKS, 1977; DE LORENZI, 1982), e não são facilmente adaptáveis às condições de carga cíclica.

Para contornar essas dificuldades é prática corrente na indústria usar  $\Delta J_{mon}$ , um valor estimado com base nas equações adotadas para os casos em que a solicitação é monotônica. Entretanto, nem sempre essa aproximação fornece resultados confiáveis, uma

vez que as tensões e deformações residuais geradas pelas cargas cíclicas afetam o comportamento elasto-plástico do material. Por isso, a elaboração de um novo critério para a obtenção de  $\Delta J$  é necessária.

## 1.2 - Objetivo desta pesquisa

Neste trabalho é desenvolvido um procedimento numérico para o cálculo de  $\Delta J$  aplicado a uma geometria, propriedade do material e carregamento atuante que sejam representativos de estruturas mecânicas reais. Com os resultados obtidos pode-se estimar a propagação de defeitos em regime plástico de forma mais simples e menos conservadora que a tecnologia atualmente usada. A meta que se espera atingir é fornecer uma contribuição para estender a vida segura dos componentes limitados por fadiga (MANESCHY et al., 1998).

A técnica empregada para determinar  $J$  utiliza a representação energética proposta por RICE (1968a; 1968b) e o método da extensão virtual da trinca originado por PARKS (1977) e DE LORENZI (1982). A solução numérica do problema é dada pelo método dos elementos finitos. A idéia básica é aplicar uma carga cíclica (força ou deslocamento imposto) no sólido e calcular a curva força versus deslocamento  $P - \delta$  resultante. A energia potencial armazenada no material é avaliada por meio da área sob essa curva e usada para a determinação de  $\Delta J$ . O estudo também compara esses valores obtidos sob condição de deformação plástica cíclica com aqueles estimados utilizando-se equações relacionadas aos casos monotônicos.  $\Delta J_{mon}$ . Os efeitos do fechamento da trinca e fenômenos dependentes do tempo não são considerados.

Na análise elasto-plástica a curva  $P - \delta$  é gerada admitindo-se pequenas deformações, teoria da plasticidade incremental, critério de escoamento de Von Mises e

relação tensão versus deformação com encruamento cinemático representada pela lei de RAMBERG-OSGOOD (1943). Os estudos são conduzidos com o código ANSYS (1995). Para a determinação numérica de  $\Delta J$  foi adotado um esquema de integração apropriado, baseado no método da quadratura Gaussiana, implementado num programa computacional especialmente desenvolvido pelo autor.

A investigação considera uma chapa com trinca passante central em estado plano de deformações, sujeita a um carregamento atuando na direção perpendicular à face do defeito (modo I), conforme mostrado na Figura 1. Como o comportamento do sólido é fortemente dependente das condições na região próxima a ponta do defeito, os resultados obtidos com essa geometria são aplicáveis à configurações que possam ser simuladas como a chapa estudada aqui.

As análises são realizadas em regime linear-elástico e elasto-plástico, sendo a influência da tensão média examinada em cada caso. A sollicitação é de amplitude constante, e definida pela variação da força  $\Delta P$  ( $= P_{max} - P_{min}$ ) ou da tensão  $\Delta \sigma$  ( $= \sigma_{max} - \sigma_{min}$ ), que são funções dos valores máximos e mínimos que ocorrem durante o ciclo. Na análise linear-elástica o estudo é conduzido para razão de carga  $R$  ( $= P_{min} / P_{max} = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ ) entre 0,0 e 0,6. Em regime elasto-plástico a sollicitação possui as características comumente empregadas durante os testes de fadiga: repetida e completamente reversa, com  $R = 0,0$  e  $-1,0$ , respectivamente.

O modelo de elementos finitos é bidimensional. Entretanto, ao contrário da solução obtida pela integral de contorno (muito complicada), o cálculo de  $J$  pelo método de energia pode ser estendido mais facilmente aos problemas tridimensionais – nesses casos o tempo de realização das análises aumenta substancialmente.

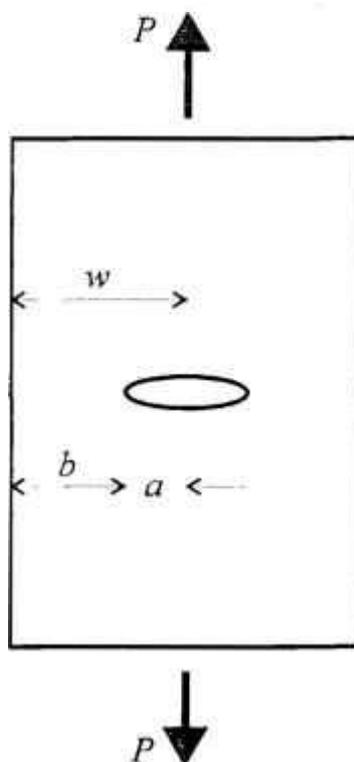


Figura 1 - Chapa com trinca passante central  
( $2h$ : altura da chapa)

Os tópicos tratados nesta tese são abordados em oito capítulos, subdivididos em diferentes seções. No Capítulo 2 é introduzido o conceito original da integral- $J$  (carga monotônica), é feita a apresentação dos principais trabalhos disponíveis na literatura e discutido criticamente o atual estágio tecnológico para a estimativa do parâmetro  $J$  em presença de cargas cíclicas. Em seguida, no Capítulo 3, é apresentado o procedimento de cálculo proposto para a obtenção de  $\Delta J$ . A solução numérica para a determinação da curva  $P - \delta$  e de  $\Delta J$  é desenvolvida no Capítulo 4. Os resultados e aplicações para as análises linear-elástica e elasto-plástica são fornecidos, respectivamente, nos Capítulos 5 e 6. No Capítulo 7 são descritas as sugestões para futuras pesquisas e, no Capítulo 8, são apresentadas as conclusões. Os apêndices com o programa fonte e com os exemplos que serviram para sua qualificação e as referências bibliográficas são incluídas no final do trabalho.

## 2 A INTEGRAL- $J$ - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 - Introdução

Este capítulo apresenta o conceito original da integral- $J$  e as propostas experimentais e numéricas existentes para a sua aplicação às solicitações cíclicas. Para situar o tema a ser estudado no contexto geral do problema, é feita também uma análise crítica de cada uma das principais referências consultadas.

### 2.2 - Formulação Original

A integral- $J$  conforme apresentada por RICE (1968a) tem sua origem no trabalho publicado por ESHELBY (1951), que definiu uma integral de contorno para determinar a distribuição de forças em singularidades (imperfeições) existentes em materiais elásticos. Esta integral, que descreve a modificação na energia total do sistema causada pela singularidade, é função das tensões decorrentes das imperfeições, das provocadas por forças de corpo e daquelas induzidas pelo carregamento externo. Entretanto, como essa formulação não foi desenvolvida para o problema de sólidos trincados, a integral na forma descrita por Rice tornou-se mais popular na área da mecânica da fratura.

O conceito da integral- $J$  permite estender a teoria da mecânica da fratura para os casos onde a consideração de análise linear-elástica não é válida<sup>1</sup>. O problema a ser

---

<sup>1</sup> Além do conceito da integral- $J$  um outro parâmetro da mecânica da fratura elasto-plástica é o CTOD (crack tip opening displacement). O primeiro é largamente aceito nos Estados Unidos; o último é bastante utilizado na Europa e Japão.

resolvido no trabalho original de Rice era calcular o campo de tensões e deformações nas vizinhanças da ponta de uma trinca em materiais elásticos não-lineares. Para superar dificuldades matemáticas relacionadas com a determinação desses parâmetros, ele propôs uma integral de linha cuja solução produz resultados invariantes quando calculados em diferentes contornos próximos à ponta do defeito.

Para problemas bidimensionais o valor de  $J$  associado à cargas monotônicas é definido como

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - T_m \frac{\partial u_m}{\partial x} ds) \quad (1)$$

onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas cartesianas nas direções da trinca e perpendicular a sua superfície, respectivamente.  $W = \int_0^{\epsilon_{mn}} \sigma_{mn} d\epsilon_{mn}$  é a densidade de energia de deformação,  $T_m = \sigma_{mn} n_n$  são as componentes do vetor das trações atuando num plano cuja normal é  $n_n$ , e  $\sigma_{mn}$  e  $\epsilon_{mn}$  são as componentes dos tensores de tensão e deformação;  $u_m$  define as componentes do vetor de deslocamentos e  $ds$  é o incremento no comprimento ao longo do contorno  $\Gamma$  na extremidade da trinca mostrada na Figura 2. Os índices repetidos indicam soma nas direções  $x$  e  $y$ .

Uma alternativa equivalente à integral da Eq.(1) obtida usando uma formulação baseada em métodos variacionais foi também derivada por RICE (1968b). Nesse caso  $J$  pode ser considerado como a variação na energia potencial  $\Pi$  (por unidade de espessura do sólido) com relação a variação no comprimento do defeito,  $a$ . Matematicamente,

$$J = -\frac{d\Pi}{da} \quad (2)$$

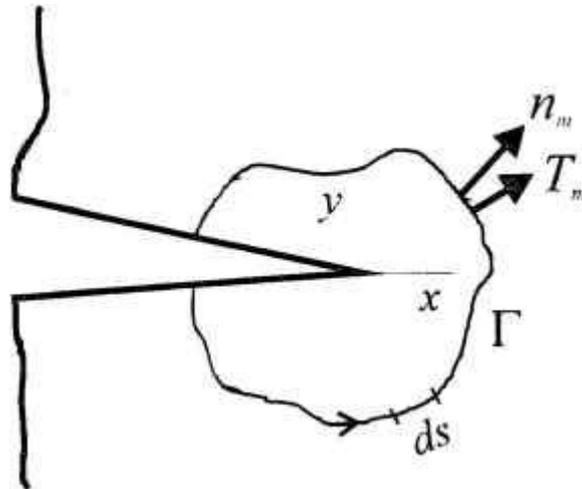


Figura 2 - Região da trinca e contorno de integração para cálculo de  $J$

Esta equação é também aplicada aos casos tridimensionais, e sua equivalência com a integral- $J$  da Eq.(1) foi demonstrada por DE LORENZI (1985).

De acordo com RICE e ROSENGREN (1968) e HUTCHINSON (1968) é possível mostrar que a integral- $J$  descreve o campo de tensões e deformações na ponta da trinca em regime elasto-plástico. Como condição necessária para essa suposição deve-se admitir a validade da teoria da deformação total, que é equivalente à teoria da plasticidade incremental quando o sólido é sujeito à solicitações que aumentam monotonicamente, sem sofrer descarregamento. Nesse caso a lei constitutiva do material é representada pela lei de RAMBERG-OSGOOD (1943), dada para o caso unidimensional por

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (3)$$

O primeiro e o segundo termo da equação acima correspondem, respectivamente, às parcelas elástica e plástica da deformação  $\varepsilon$ . A tensão uniaxial total é  $\sigma$ , a tensão de referência é  $\sigma_0$  (usualmente igual ao limite de escoamento) e a deformação de referência é  $\varepsilon_0$  (igual a  $\sigma_0 / E$ );  $\alpha$  é uma constante adimensional,  $n$  é o expoente de encruamento e  $E$  o módulo de elasticidade do material.

Em condição linear-elástica a integral- $J$  é equivalente a taxa de energia  $G$  que é dissipada no material durante o avanço da trinca (GRIFFITH, 1920). A relação de  $J$  com o fator de intensidade de tensões  $K$  é dada por meio de (RICE, 1968a; 1968b)

$$J_e = \frac{K^2}{E'} = G \quad (4)$$

onde  $E'$  é igual a  $E$  em estado plano de tensões e igual a  $E / (1 - \nu^2)$  em estado plano de deformações;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material.

Os valores de  $J$  para os casos onde a solitação é monotônica são em geral disponíveis na literatura. Existem fórmulas em referências como o manual do *Electric Power Research Institute - EPRI* (1989) ou nos estudos de YAGAWA (1993), que calculam  $J$  para as diferentes geometrias, materiais e condições de carregamento geralmente encontradas na prática da engenharia. Contudo, como já mencionado no Capítulo 1 deste trabalho, essa informação é limitada a um número reduzido de pesquisas quando estão envolvidos eventos cíclicos. Então, a lacuna atualmente existente na área da mecânica da fratura elasto-plástica permite a possibilidade de se desenvolver uma nova metodologia para a determinação de  $\Delta J$ . É com essa motivação que a presente investigação é conduzida.

De modo a situar a abordagem a ser implementada aqui e apresentar o estado da arte no assunto, são discutidas, a seguir, as principais contribuições experimentais e analíticas/numéricas disponíveis.

### 2.3 - Resultados Experimentais

A previsão da vida dos componentes sujeitos a fadiga de baixo-ciclo usando a correlação entre a propagação do defeito e a integral- $J$  para carregamentos cíclicos é comprovada experimentalmente por pesquisas conduzidas por diferentes autores. Os primeiros estudos que mostraram ser válida a relação  $da / dN - \Delta J$  foram publicados por DOWLING e BEGLEY (1976). DOWLING (1976) e DOWLING (1977), que realizaram testes de fadiga sob condição de deformação controlada em corpos de prova trincados com diversas configurações geométricas (compacto de tração CT e chapa com trinca central CC), fabricados de aço ferrítico A 533B e submetidos a plasticidade generalizada. Os resultados destes trabalhos são reproduzidos na Figura 3. Observa-se que a correlação  $da / dN - \Delta J$  fornece a previsão da propagação de trincas em regime elasto-plástico de maneira análoga àquela prevista pela equação  $da / dN - \Delta K$  em condição linear-elástica. A mesma conclusão foi posteriormente confirmada por outros autores (EL HADDAD e MUKHERJEE, 1983; TANAKA et al., 1983; JABLONSKI, 1989; BANKS-SILLS e VOLPERT, 1991; MIURA et al., 1997).

A obtenção de  $\Delta J$  em cada uma destas pesquisas é realizada usando-se diferentes metodologias. Nos trabalhos pioneiros de DOWLING e BEGLEY (1976) e DOWLING (1976) os valores de  $\Delta J$  foram calculados por aproximações da Eq.(2), com a energia potencial obtida usando-se parte da área limitada pelo laço de histerese da curva  $P - \delta$  cíclica (fornecida diretamente pela máquina de testes). A razão para empregar apenas parte da área sob a curva é que a presença das deformações plásticas cíclicas provoca o fechamento da trinca e impede a propagação durante a fase em que suas faces estão em

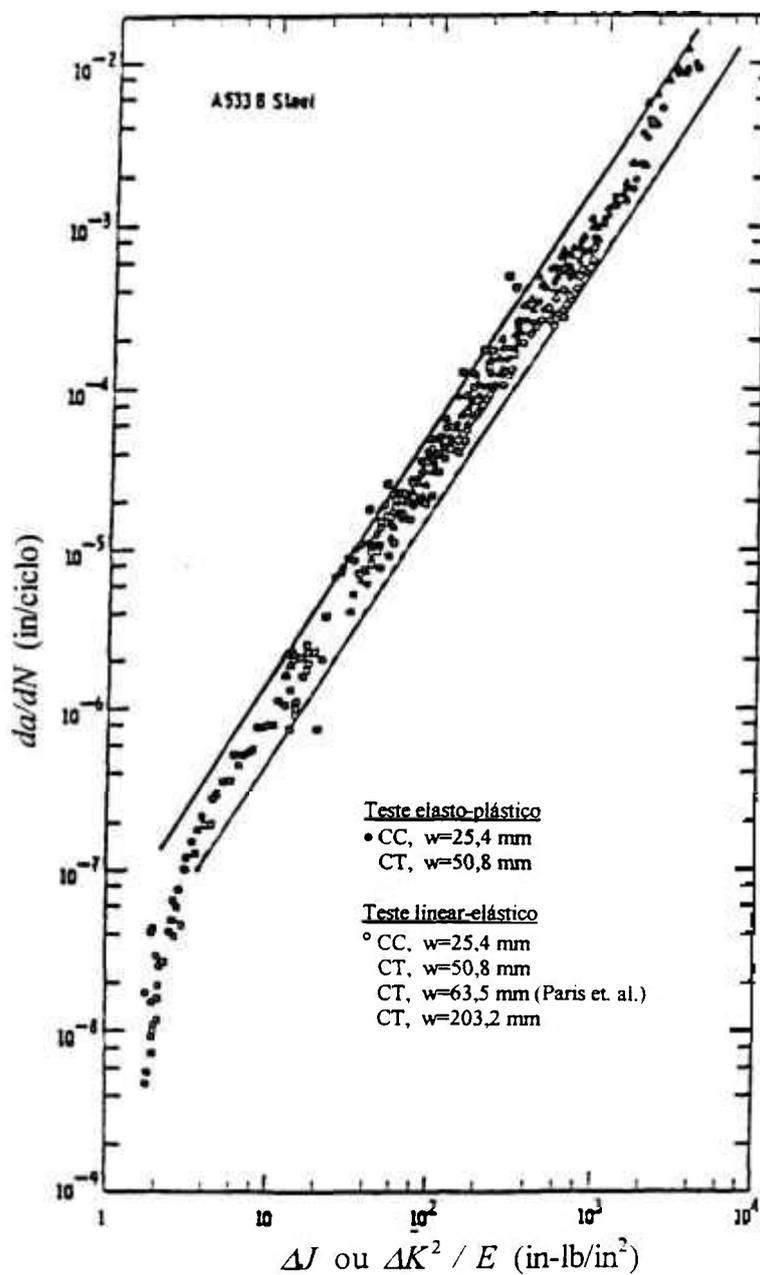


Figura 3 - Correlação  $da / dN - \Delta J$  para diferentes geometrias  
 Fonte: Dowling (1977)

contato (ELBER, 1971). A carga relacionada com o fechamento do defeito é facilmente encontrada na curva  $P-\delta$  esquematizada na Figura 4, e pode ser determinada no ponto de inflexão do laço de histerese antes do pico de compressão ser alcançado.

Em DOWLING (1977) são descritos os testes de fadiga de baixo-ciclo realizados sob condição de amplitude de deformação constante em corpos de prova cilíndricos, solicitados axialmente por carga completamente reversa ( $R = -1,0$ ). O estudo constatou que a trinca gerada nos ensaios possui um formato semicircular (na seção do corpo de provas), cuja profundidade  $a$  é aproximadamente igual a metade do seu comprimento superficial. O valor de  $\Delta J$  é determinado pela expressão

$$\Delta J = 3,2\Delta W_e a + 5,0\Delta W_p a \quad (5)$$

sendo as variações nas densidades de energia elástica,  $\Delta W_e$ , e plástica,  $\Delta W_p$ , estimadas da curva tensão versus deformação cíclica medida durante o ensaio. Uma representação típica dessa curva e dos valores de  $\Delta W_e$  e  $\Delta W_p$  é indicada na Figura 5.

Outra referência que usa resultados experimentais para justificar o uso de  $\Delta J$  como o parâmetro que prevê o crescimento de trincas é apresentada em EL HADDAD e MUKHERJEE (1983). Nesta pesquisa a correlação entre  $da/dN$  e  $\Delta J$  foi obtida por meio de testes em corpos de prova do tipo CT fabricados de aço A 516 sob condições elástica e elasto-plástica. Os valores de  $\Delta J$  são estimados de

$$\Delta J = \frac{2(1+\beta)}{1+\beta^2} \frac{A}{bB} \quad (6)$$

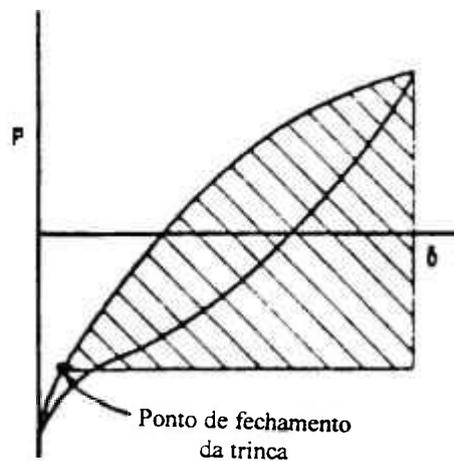
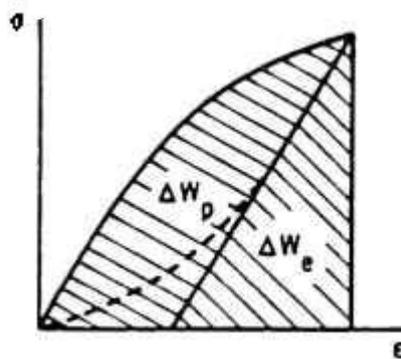


Figura 4 - Curva  $P - \delta$  típica obtida do ensaio de fadiga  
Fonte: Dowling (1977)



$$\Delta W_e = \frac{\Delta \sigma^2}{2E}$$

$$\Delta W_p = \frac{\Delta \sigma \Delta \epsilon_p}{s+1}$$

Figura 5 - Curva esquemática tensão versus deformação  
Fonte: Dowling (1977)

onde  $b$  é o ligamento remanescente da seção,  $B$  é a espessura e  $\beta$  é um coeficiente função do tamanho da trinca e da largura do corpo de provas. O parâmetro  $A$  é parte da área definida pelo laço de histerese na curva  $P-\delta$ , e leva em conta o fechamento da trinca como apontado anteriormente (ver Figura 4).

As investigações experimentais conduzidas por TANAKA et al. (1983) e JABLONSKI (1989) reforçam a hipótese de considerar  $\Delta J$  como adequado para caracterizar o crescimento de trincas. O primeiro realizou testes em corpos de provas dos tipos CT e CC, ambos fabricados de aço estrutural de baixo-carbono; o segundo usou corpos de provas CT de aço inoxidável 304 e HY100, sujeitos à condições de carregamento constante ou variável. A Eq.(6) foi adotada em ambos os casos, sendo a área  $A$  obtida conforme mencionado em Dowling e Begley.

BANKS-SILLS e VOLPERT (1991) conduziram testes de fadiga em corpos de provas do tipo CT fabricados de Al 2024-T351, submetidos à condições de plasticidade reduzida. Neste experimento os valores de  $\Delta J$  também foram obtidos da Eq.(6). Os resultados, mais uma vez, confirmam que a correlação desse parâmetro com a taxa de propagação de trincas pode ser aplicada para prevenir a falha por fadiga.

MIURA et al. (1997) testaram tubulações fabricadas de aço carbono com trinca passante circunferencial submetidas à solicitações flutuantes com amplitude constante. A condição de carregamento imposta foi do tipo flexão em quatro pontos, com diferentes razões de tensão  $R$  (-1,0; -0,5; 0,0). Os resultados obtidos para o caso completamente reverso confirmaram que a correlação  $da/dN - \Delta J$  é adequada para fadiga em regime elasto-plástico. De acordo com os autores, quando  $R = -0,5$  e  $0,0$ , a previsão de crescimento da trinca não pode ser realizada apenas com base em  $\Delta J$  uma vez que, nessas condições, ocorre acúmulo de deformação. Contudo, é possível que esse comportamento seja causado pela realização dos testes usando força controlada. Nos casos em que os ensaios são com deformação controlada não é observado o acúmulo de deformação residual

(DOWLING e BEGLEY, 1976; JABLONSKI, 1989). A variável  $\Delta J$  para a configuração testada foi calculada como será mostrado mais adiante.

#### 2.4 - Métodos analíticos e numéricos

Além das metodologias descritas anteriormente, todas baseadas em experimentos, também foram desenvolvidas algumas formulações analíticas/numéricas para a determinação de  $\Delta J$ . A primeira delas foi estabelecida por LAMBA (1975), que usou o conceito da integral- $J$  para verificar o efeito de entalhes geométricos na iniciação de trincas por fadiga. Lamba definiu  $\Delta J$  em coordenadas cartesianas (eixo- $x$  é paralelo ao plano da trinca conforme indicado na Figura 2) a partir de

$$\Delta J = \int \left[ \Delta W(\Delta \varepsilon_{mn}) dy - \Delta T_m \frac{\partial(\Delta u_m)}{\partial x} ds \right] \quad (7)$$

e provou que seu valor, como no caso das solicitações monotônicas, independe do contorno onde é calculado.  $\Delta W(\Delta \varepsilon_{mn}) = \int_0^{\Delta \varepsilon_{mn}} \Delta \sigma_{mn} d(\Delta \varepsilon_{mn})$  são as variações na densidade da energia de deformação durante o ciclo de carga.  $\Delta T_m = \Delta \sigma_{mn} n_n$  são as variações nas componentes do vetor de tração na superfície e  $\Delta \sigma_{mn}$  e  $\Delta \varepsilon_{mn}$  são as variações nas componentes dos tensores de tensão e deformação;  $\Delta u_m$  define as variações nas componentes do vetor de deslocamentos e  $ds$  é o incremento no comprimento ao longo do contorno na ponta da trinca. Os índices repetidos indicam soma nas direções  $x$  e  $y$ .

TANAKA (1983) usou a expressão proposta por Lamba para calcular  $\Delta J_c$ , o valor de  $J$  cíclico em regime linear-elástico ou em presença de escoamento reduzido. Essa

quantidade foi determinada substituindo-se na Eq.(7) a variação no campo de tensões, deformações e deslocamentos existente na ponta da trinca [zona dominada pela singularidade, IRWIN (1957)], e avaliando-se seu valor ao longo de um contorno circular. Como resultado, a correlação entre  $\Delta J_c$  e a variação no fator de intensidade de tensões,  $\Delta K$ , estabelecida por Tanaka é dada pela equação

$$\Delta J_c = \frac{\Delta K^2}{E'} = \frac{(K_{max} - K_{min})^2}{E'} \quad (8)$$

onde  $K_{max}$  e  $K_{min}$  são determinados usando-se as tensões máximas e mínimas num dado ciclo e  $E'$  como definido anteriormente.

Em presença de escoamento significativo  $\Delta J$  não pode ser obtido de maneira análoga à condição linear-elástica, o que torna inválido o seu cômputo usando-se a diferença  $J_{max} - J_{min}$  ( $J_{max}$  e  $J_{min}$  calculados com as tensões máximas e mínimas no ciclo). Quando a plasticidade é elevada deve-se acompanhar a história da deformação, o que só é possível por meio de análise elasto-plástica. Para evitar essa análise TANAKA (1983) propôs um cálculo simplificado, com base num modelo de trinca de DUGDALE (1960), que considera  $\Delta J$  como a força motriz que durante os ciclos de carga e descarga move a trinca.

A pesquisa experimental desenvolvida por BANKS-SILLS e VOLPERT (1991) para o corpo de provas CT também aborda aspectos numéricos. Inicialmente os autores calcularam  $\Delta J$  pela Eq.(7), usando as tensões e deslocamentos determinados pelo método dos elementos finitos. Em seguida esse parâmetro foi obtido a partir da Eq.(6), considerando-se a curva  $P - \delta$  gerada na análise numérica. Comparação favorável entre os resultados confirma que valores de  $\Delta J$  obtidos dessa curva, Eq.(6), ou pela integral de linha, Eq.(7), são equivalentes.

CHOW e LU (1991) questionaram  $\Delta J$  conforme proposto por Lamba e Tanaka, posto que a Eq.(7) não leva em consideração toda a energia disponível para mover o defeito. Esta conclusão é baseada no fato de a equação original ser obtida com base numa simplificação usando trinca de Dugdale. Como nesse caso o valor de  $\Delta J$  é subestimado, eles introduziram uma nova expressão, definida por

$$\Delta J = \int_i^j \left[ \psi dy - \int_{u_m^i}^{u_m^j} T_m^i \frac{\partial}{\partial x} (du_m) ds \right] \quad (9)$$

sendo  $\psi = \Delta W + \sigma_{mn}^i \Delta \varepsilon_{mn}$  a nova densidade da energia de deformação,  $i$  e  $j$  são estados onde as tensões cíclicas são definidas, e as outras quantidades como consideradas previamente. Sob condição de plasticidade reduzida eles mostraram que  $\Delta J$  é igual a variação na energia elástica liberada,  $\Delta G$ . Nesse caso a Eq.(9) pode ser reescrita como

$$\Delta J_e = G_{max} - G_{min} = \frac{K^2_{max} - K^2_{min}}{E'} \quad (10)$$

É evidente que para  $R > 0.0$  o valor de  $\Delta J_e$  calculado por esta equação é maior que aquele obtido anteriormente pela Eq.(8). Com isso Chow e Lu mostraram que a expressão proposta por Tanaka não considera toda a energia envolvida no processo de propagação da trinca. Eles validaram a sua formulação por meio de ensaios e mostraram que  $da/dN$  pode ser relacionado com  $\Delta J$  para materiais metálicos e poliméricos.

Uma proposta simplificada para o cálculo de  $\Delta J$  nos problemas em estado plano de tensões é disponível em AL-SUGAIR (1992). Neste trabalho valores de  $J$  monotônicos calculados assumindo material com comportamento totalmente plástico determinados por SHIH e HUTCHINSON (1976) são combinados com  $J$  cíclicos fornecidos

experimentalmente por DOWLING (1976). A quantidade  $\Delta J$  é estimada especificamente para o aço A 533B adicionando-se as parcelas elástica  $\Delta J_e$ , dada pela Eq.(8), e plástica,  $\Delta J_p$ . Essa última é derivada de

$$\Delta J_p = \alpha(2\sigma_o)\epsilon_o a(1 - a/b)F^2(a/b)f(n)(\Delta P / 2P_o)^{n+1} h_p(a/b, \Delta\sigma / 2\sigma_o) \quad (11)$$

onde  $f$ ,  $F$  e  $h_p$  são fatores de correção para o material, geometria do corpo de provas e solitação atuante. A carga limite é  $P_o$  e os demais parâmetros já foram definidos.

Nos testes em tubos com trinca passante circunferencial realizados por MIURA et al. (1997) a variável  $\Delta J$  também é estimada combinando-se as parcelas elástica e plástica, com  $\Delta J_p$  igual a

$$\Delta J_p = 2 \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \eta(P - P_{min}) d\delta^{PL} + \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \phi \Delta J_{pl} d\theta \quad (12)$$

Os fatores  $\eta$ ,  $\phi$  e  $\theta$  são determinados em função das geometrias do tubo e do defeito, e  $\delta^{PL}$  é o deslocamento plástico no ponto onde a carga  $P$  é aplicada. Os valores máximos e mínimos da solitação no  $i^{\text{th}}$  ciclo são dados por  $\delta_{max}^{PL,i}$  e  $\delta_{min}^{PL,i}$ , com  $\Delta J_{pl}$  associado a esse ciclo e ao imediatamente anterior.

Outras simplificações disponíveis na literatura (O'DONNELL, 1988; O'DONNELL e RAJAGOPAL, 1994; MIURA et al., 1995) avaliam  $\Delta J$  a partir das fórmulas para  $J$  aplicadas aos casos monotônicos. Conforme mencionado anteriormente, essas equações são encontradas em referências de mecânica da fratura elasto-plástica, como no manual do EPRI já referenciado. Quando essa aproximação é considerada,  $\Delta J$  é denominado  $\Delta J_{mon}$ .

É prática corrente na indústria o cálculo de  $\Delta J_{mon}$  usando a variação da carga cíclica,  $\Delta P$ , nas equações para solicitações monotônicas (LIAW et al., 1993). Nesse caso, e com base no esquema proposto pelo EPRI, a parcela plástica é estimada genericamente de

$$\Delta J_{mon}^{PL} = \alpha \varepsilon_o \sigma_o b h_1 \left( \frac{\Delta P}{P_o} \right)^{n+1} \quad (13)$$

onde  $h_1$  é um fator da geometria do sólido e do encruamento do material. O valor total de  $\Delta J_{mon}$  é obtido combinando-se a parcela plástica dada pela equação acima com a solução elástica fornecida pela Eq.(8).

## 2.5 - Estágio atual para a estimativa de $\Delta J$ - Discussão

Apesar de em número reduzido, os resultados experimentais indicam que é válida a correlação entre a integral- $J$  para cargas cíclicas e a taxa de crescimento de trincas – em todos os ensaios são reproduzidas curvas semelhantes àquela representada na Figura 3. Isso permite considerar que mesmo na falta de comprovação matemática rigorosa  $\Delta J$  é um parâmetro adequado para a previsão da vida dos materiais sujeitos a plasticidade elevada.

As propostas para a avaliação teórica/numérica de  $J$  cíclico também são restritas. As metodologias discutidas foram elaboradas com o objetivo de dar suporte aos ensaios, o que deixa implícito que elas são dependentes das condições (materiais, geometrias e carregamentos) existentes durante os testes. Por exemplo, na técnica descrita no trabalho de AL-SUGAIR (1992) só é possível obter o valor de  $\Delta J$  para o aço A 533B, posto que os

parâmetros  $f$ ,  $F$  e  $h_p$  da Eq.(11) são definidos com os dados dos testes realizados no corpo de provas tipo CC referenciado em DOWLING (1976). Por isso não há garantia de que essa fórmula possa ser usada para qualquer situação. Limitação semelhante também existe na pesquisa de MIURA et al. (1997), que é aplicada somente para a tubulação testada. Em BANKS-SILLS e VOLPERT (1991) os ensaios foram em corpos de provas sujeitos a plasticidade limitada, sendo a principal motivação do trabalho a confirmação da correlação  $da/dN - \Delta J$ . Assim, a extensão para as situações onde as condições dos testes não são mantidas é, no mínimo, suspeita.

Em princípio as propostas de TANAKA (1983) e CHOW e LU (1991) poderiam ser empregadas genericamente. Contudo, a sua aplicação na prática não é simples, principalmente nos casos tridimensionais. Nessa situação a solução do problema é bastante complicada porque a frente da trinca não é reta e, portanto, a integral de contorno a ser resolvida torna-se uma integral de superfície, cuja superfície não é facilmente definida. Isso implica admitir que a avaliação numérica das Eqs.(7) ou (9) é bastante difícil.

Por fim, o emprego de  $\Delta J_{mon}$ , exemplificado conforme a Eq.(13), adotado na indústria e por outros autores, pode levar a resultados muito conservadores, principalmente em regime onde as zonas plásticas são significativas. A principal razão é a presença de tensões e deformações residuais que aparecem durante um evento cíclico, que não são consideradas nos casos em que o carregamento é monotônico. As conseqüências negativas do uso dessa técnica para prever  $da/dN$  são evidentes, e serão abordadas nos Capítulos 5 e 6.

Com base no que foi discutido pode-se assumir que a correlação  $da/dN - \Delta J$  é consistente. Entretanto, as técnicas atualmente empregadas para estimar  $\Delta J$  são dependentes das condições existentes nos testes, sendo sua avaliação realizada apenas para dar suporte aos ensaios. Nas referências consultadas não são discutidas alternativas para o cálculo de  $\Delta J$ , quais são os parâmetros que afetam o seu valor e sob que condições a sua obtenção pode ser simplificada e usada genericamente. Neste trabalho apresenta-se pela

primeira vez uma tecnologia que leva em conta todas essas questões, e com resultados aplicáveis às geometrias e carregamentos que possam ser modelados de modo similar à configuração mostrada na Figura 1.

### 3 A PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE $\Delta J$

#### 3.1 - Introdução

A teoria básica para implementar a técnica a ser proposta é introduzida neste capítulo. Inicialmente são abordadas as formulações para  $J$  em termos de energia, considerando-se as hipóteses de carregamento imposto por força ou deslocamento. Em seguida é apresentado o procedimento para obter  $\Delta J$  em regime linear-elástico e elasto-plástico, a partir da curva  $P-\delta$  cíclica do material. Por último, são discutidas a interpretação física para  $\Delta J$  e as limitações da metodologia de cálculo.

#### 3.2 - O conceito de $J$ monotônico

A representação da integral- $J$  em termos de energia como proposta por Rice é derivada do princípio dos trabalhos virtuais aplicado a um sólido trincado elástico não-linear. Na ausência de forças de corpo a energia potencial  $\Pi$  (por unidade de espessura) é dada por

$$\Pi = \int W dA - \int T_m u_m ds \quad (14)$$

onde  $A$  é a área total do sólido e  $\Gamma_r$  é o contorno no qual  $T_m$  é prescrito (ver Figura 2). Os outros parâmetros já foram definidos. Se a energia potencial é comparada com aquela armazenada num corpo solicitado de modo idêntico, exceto pelo tamanho do defeito que é incrementalmente maior, a integral- $J$  é definida como a relação entre as variações na energia e no comprimento da trinca,  $J = -d\Pi / da$ , conforme apontado pela Eq.(2).

Consequentemente,  $J$  é calculado após a determinação da energia potencial em dois sólidos, um com tamanho de trinca  $a$  e outro com trinca  $a + da$ . Para o caso em que a força  $P$  é imposta e o deslocamento  $\delta$  é obtido no ponto onde ela é aplicada, a Eq.(14) é o negativo da energia complementar,  $U^*$ . Essa energia é calculada usando-se a área sob a curva  $P - \delta$  e o eixo das ordenadas, e está mostrada graficamente na Figura 6.  $J$  monotônico é determinado a partir da variação da energia entre os dois sólidos (área sombreada), e de acordo com Rice é igual a

$$J = \left( \frac{dU^*}{da} \right)_P = \left( \frac{\partial}{\partial a} \int_0^P \delta dP \right)_P \quad (15)$$

Quando a geometria trincada é submetida a um deslocamento  $\delta$ , o segundo termo da Eq.(14) é zero uma vez que não há força externa aplicada. Nesse caso a energia potencial é igual a energia de deformação,  $U$ , e pode ser obtida pela área sob a curva  $P - \delta$ . O valor de  $J$  é computado por meio da variação de  $U$  calculado com as trincas  $a$  e  $a + da$  usando a expressão

$$J = - \left( \frac{dU}{da} \right)_\delta = - \left( \frac{\partial}{\partial a} \int_0^P P d\delta \right)_\delta \quad (16)$$

Como pode ser observado pela Figura 6 e também demonstrado por RICE (1968a;

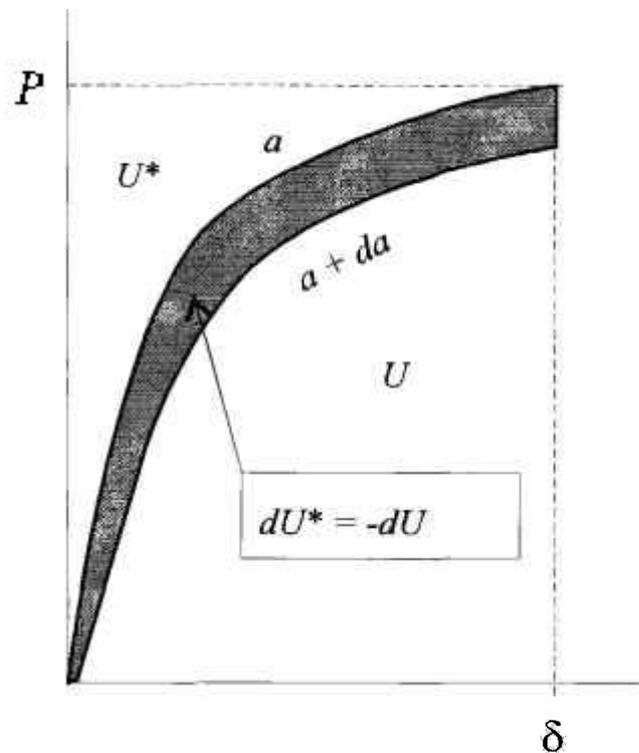


Figura 6 - Energia de deformação para cálculo de  $J$   
Carregamento monotônico

1968b), as formas das Eqs.(15) e (16) são equivalentes. Elas permitem calcular  $J$  usando as áreas da curva  $P-\delta$ , e representam o aumento (quando a força é aplicada) ou a redução (no caso do deslocamento imposto) na energia potencial armazenada nos sólidos com trincas diferenciando infinitesimalmente.

### 3.3 - A metodologia proposta para o cálculo de $J$ cíclico

O presente trabalho utiliza o conceito da integral- $J$  desenvolvido por Rice, e depois adaptado por Dowling e Begley para os casos de cargas cíclicas. A originalidade da idéia apresentada aqui é fazer uma abordagem numérica do problema da obtenção de  $\Delta J$ , com

resultados aplicáveis às situações simuladas como a placa da Figura 1. A diferença básica entre esta pesquisa e aquela de Dowling e Begley, é que estes últimos determinaram valores de  $\Delta J$  por meio de aproximações usando as curvas  $P - \delta$  medidas durante os ensaios e que, desse modo, são dependentes da configuração testada.

O cálculo de  $\Delta J$  é efetuado considerando-se a variação da energia armazenada num corpo trincado, que é representada geometricamente pela área sob a curva força versus deslocamento cíclica<sup>1</sup>. Conforme mencionado no Capítulo 1, nesta pesquisa admite-se que o sólido é submetido a uma força ou tensão aplicada. Entretanto, por simplificação, a derivação mostrada a seguir assume a situação de deslocamento imposto. Procedimento similar pode ser adotado para a condição de força controlada.

Considere-se, por exemplo, um sólido com trinca lateral submetido ao carregamento flutuante caracterizado pela aplicação dos deslocamentos máximos e mínimos,  $\delta_{max}$  e  $\delta_{min}$ , respectivamente. Para os problemas onde é assumido comportamento do material linear-elástico as curvas  $P - \delta$  associadas aos tamanhos das trincas  $a$  e  $a + da$  são também lineares, conforme mostrado na Figura 7a. Nesta figura é esquematizada a condição em que  $R > 0,0$  posto que, assim, fica mais fácil visualizar graficamente as energias envolvidas. A energia de deformação por unidade de espessura para o primeiro caso é definida pela área sob a linha  $OM$ , limitada pelos segmentos  $AB$  e  $\delta_{max} \delta_{min}$ . Para o sólido cuja trinca tem comprimento  $a + da$ , a energia de deformação é obtida da área sob a linha  $ON$  (segmento  $DC$ ) e o eixo dos deslocamentos (segmento  $\delta_{max} \delta_{min}$ ). O valor de  $\Delta J$  é determinado pela diferença entre essas energias, representada pela área  $ABCD$ , dividida pela variação  $da$ . Matematicamente,

$$\Delta J = \frac{area_{ABCD}}{da} \quad (17)$$

<sup>1</sup> A nomenclatura  $P - \delta$  é usada, indistintamente, para identificar as curvas cíclica e monotônica.

Fisicamente, o parâmetro  $\Delta J$  caracteriza a energia por unidade de espessura necessária para estender a trinca em cada ciclo, e para o caso linear-elástico é equivalente à variação da energia liberada,  $\Delta G (= G_{max} - G_{min})$ .

Um esquema análogo é empregado à condição elasto-plástica. A carga externa é dada em termos de  $\delta_{max}$  e  $\delta_{min}$ , e o comportamento do material é representado pelas curvas  $P - \delta$  mostradas na Figura 7b. Esta figura é esquematizada para  $R = -1,0$  uma vez que, desse modo, é mais fácil visualizar as energias em questão. Ainda para uma melhor representação gráfica são indicados dois sistemas de eixos quando, na verdade, as curvas  $P - \delta$  para os dois tamanhos de trincas devem ser mostradas num sistema único, cuja origem é a mesma.

A energia de deformação para a trinca de comprimento  $a$  é obtida com a área limitada pela linha de carregamento do laço de histerese,  $G' H' E'$ , e o segmento de reta paralelo ao eixo dos deslocamentos, que passa pela ponta inferior do laço, e limitado por  $\delta_{max}$  e  $\delta_{min}$ . Cálculo similar é realizado com o tamanho de trinca  $a + da$ . As áreas envolvidas são ilustradas pela região sombreada assinalada nas figuras. A variação dessas energias por unidade de espessura dividida pelo incremento  $da$  define  $\Delta J$  por

$$\Delta J = - \frac{\text{area}_{GHEF} - \text{area}_{G'H'E'F'}}{da} \quad (18)$$

Uma vez que  $\Delta J$  assim obtido representa o trabalho realizado para abrir o defeito, o seu valor pode ser correlacionado conceitualmente com a taxa de crescimento,  $da/dN$ . Somente a área limitada pela linha de carregamento do laço de histerese é incluída na Eq.(18). É assumido que toda a variação da carga é efetiva e, portanto, os efeitos do fechamento da trinca são desprezados. Por isso, o ponto de inflexão existente na Figura 4 não é indicado na Figura 7b.

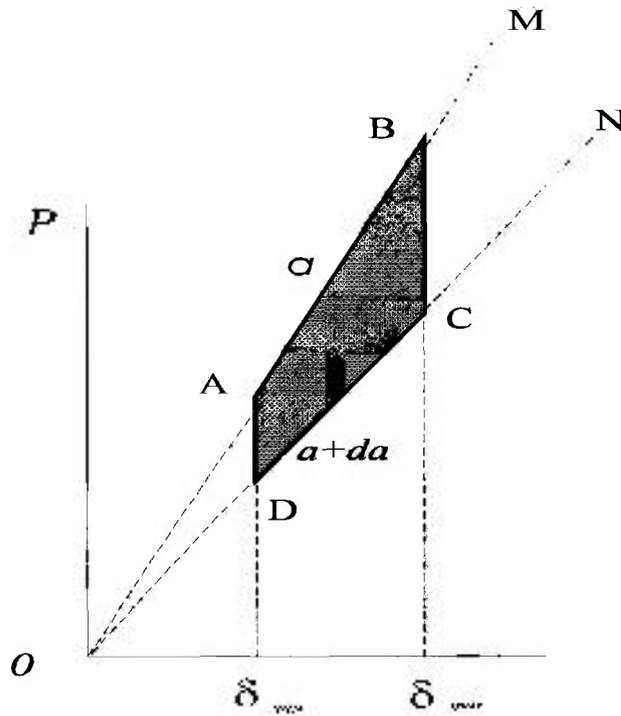
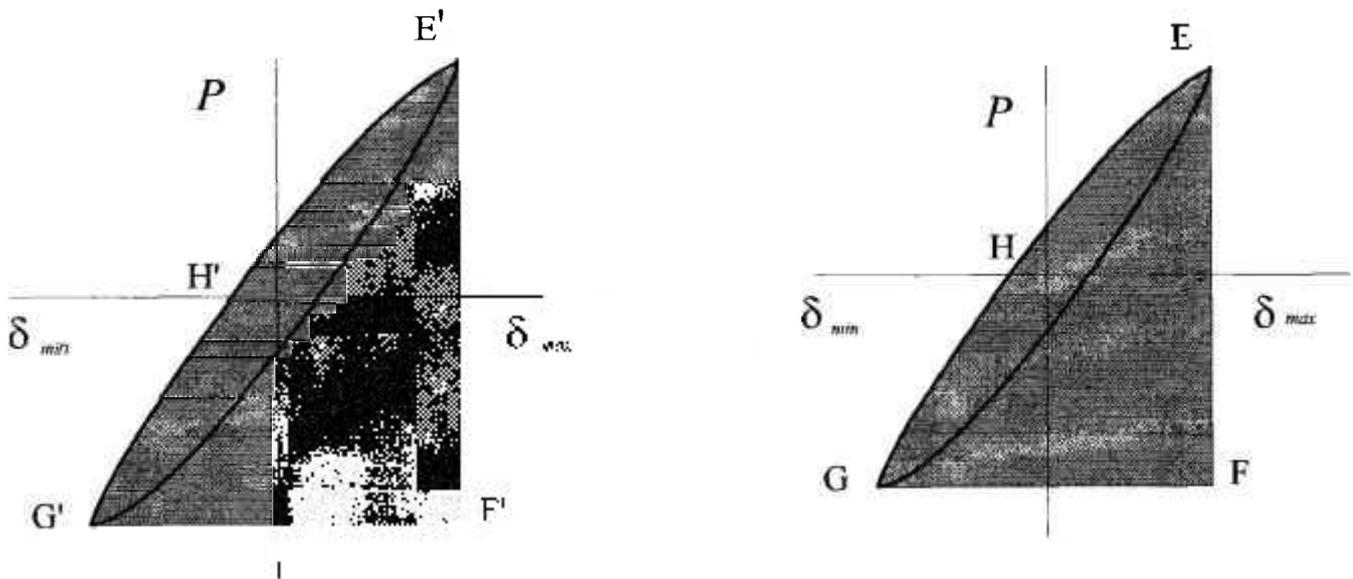


Figura 7a - Definição operacional para o cálculo de  $\Delta J$  - caso linear-elástico



tamanho da trinca:  $a$

tamanho da trinca:  $a + da$

Figura 7b - Definição operacional para o cálculo de  $\Delta J$  - caso elasto-plástico

É importante reconhecer que a correlação  $da/dN - \Delta J$ , apesar de fornecer resultados comprovados experimentalmente, sofre restrições do ponto de vista matemático, uma vez que o conceito original da integral- $J$  de Rice é baseado na teoria da deformação total. Como esse conceito só é válido nos casos em que o material é solicitado monotonicamente (sem descarregamento), o uso de  $J$  para definir crescimento de defeitos associado à cargas cíclicas é adequado para os casos em que a plasticidade fica limitada à região do defeito e, portanto, não abrange todo o ligamento remanescente da seção trincada.

O parâmetro  $\Delta J$  é interpretado fisicamente como a força motriz que propaga a trinca em regime elasto-plástico. De modo análogo ao caso monotônico quando  $J$  é correlacionado às deformações plásticas, em presença de solicitações flutuantes  $\Delta J$  é associado com a variação dessas deformações, cujo valor é proporcional a energia armazenada numa dada configuração.

Assim, mesmo na falta de comprovação teórica rigorosa,  $\Delta J$  leva em conta a energia plástica que move a trinca e é o parâmetro recomendado para ser relacionado com a sua propagação nos casos em que os conceitos da fratura linear-elástica não são válidos. As publicações discutidas nos capítulos anteriores justificam essa consideração.

Por último, ressalte-se que as áreas indicadas nas Figuras 7 representam a imagem do comportamento do sólido quando a trinca tem um comprimento específico. Essa situação é associada à estabilização do laço de histerese ao final do período de endurecimento ou amolecimento do material. Com isso, admite-se que o número de ciclos necessários para estabilizar a resposta é bem menor que os responsáveis para a falha do material. A propagação do defeito é analisada com  $\Delta J$  em cada instante usado para estimar o crescimento incremental por ciclo (correlação com  $da/dN$ ). Adicionando-se esse valor ao tamanho de trinca anterior, e repentinando-se o processo, chega-se a um comprimento correspondente à  $N$  aplicações da carga.

## 4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

### 4.1 - Introdução

A parte numérica do trabalho combina duas etapas. A primeira apresenta a solução por elementos finitos e abrange uma discussão sobre a análise elasto-plástica, as características do modelo estrutural e o uso da técnica da extensão virtual da trinca. A etapa seguinte aborda o esquema de integração para o cálculo de  $J$  e  $\Delta J$  e sua implementação no programa computacional desenvolvido.

### 4.2 - Determinação da curva força versus deslocamento

O primeiro passo para a solução do problema consiste na determinação dos deslocamentos resultantes da aplicação do carregamento externo. A alternativa numérica para a obtenção da resposta é a utilização do método dos elementos finitos. Devido à simetria existente na chapa com trinca passante central somente  $\frac{1}{4}$  da geometria é modelada. A solitação é representada por uma tensão  $\sigma$  monotônica ou cíclica, atuando uniformemente na face externa da chapa, numa direção perpendicular ao plano da trinca. As análises são realizadas com o código ANSYS (1995).

Em regime elasto-plástico é assumido teoria das pequenas deformações, teoria da plasticidade incremental e critério de escoamento de Von Mises. O comportamento do

material é simulado pela relação tensão versus deformação com encruamento cinemático, na qual a variação máxima da tensão durante o descarregamento, antes do retorno ao estado elasto-plástico, é  $2\sigma_y$ . Com essa hipótese assume-se que a superfície de escoamento possui tamanho constante e translada-se como corpo rígido no espaço de tensão com o aumento da plasticidade. A lei constitutiva é na forma da expressão de Ramberg-Osgood, com a Eq.(3) reescrita em termos das variações na tensão e deformação. Ao contrário da representação bilinear, adotou-se a discretização multilinear (quatro segmentos) da curva tensão versus deformação.

O modelo da chapa trincada é criado com a opção de geração automática da malha disponível no programa. É assumido estado plano de deformações na superfície que passa pelo plano médio da chapa. São usados elementos bidimensionais de oito nós, sendo os graus de liberdade em cada nó as translações nas direções  $x$  e  $y$ . A malha é uma combinação de elementos triangulares e quadrangulares, os primeiros usados na região da ponta da trinca e os segundos no restante da geometria. O tipo de elemento selecionado (PLANE82 da biblioteca de elementos do ANSYS) possui características que garantem a precisão na solução para um formato da malha irregular, configuração típica assumida pelo sólido durante a aplicação da carga cíclica. A discretização da geometria para o modelo  $\frac{1}{4}$  é representada na Figura 8.

Os campos de deslocamentos, deformações e tensões nos problemas de fratura em regime linear-elástico apresentam singularidades na extremidade da trinca; em condição elasto-plástica isso ocorre somente no caso dessas duas últimas, os denominados campos HRR [HUTCHINSON (1968); RICE e ROSENGREN (1968)]. Para forçar as singularidades na fase linear-elástica é prática comum a utilização de elementos especiais, com função de interpolação quadrática, faces coincidentes, e construídos de modo que os nós localizados na metade dos seus lados sejam deslocados para a posição um-quarto da ponta da trinca (BARSOUM, 1976).

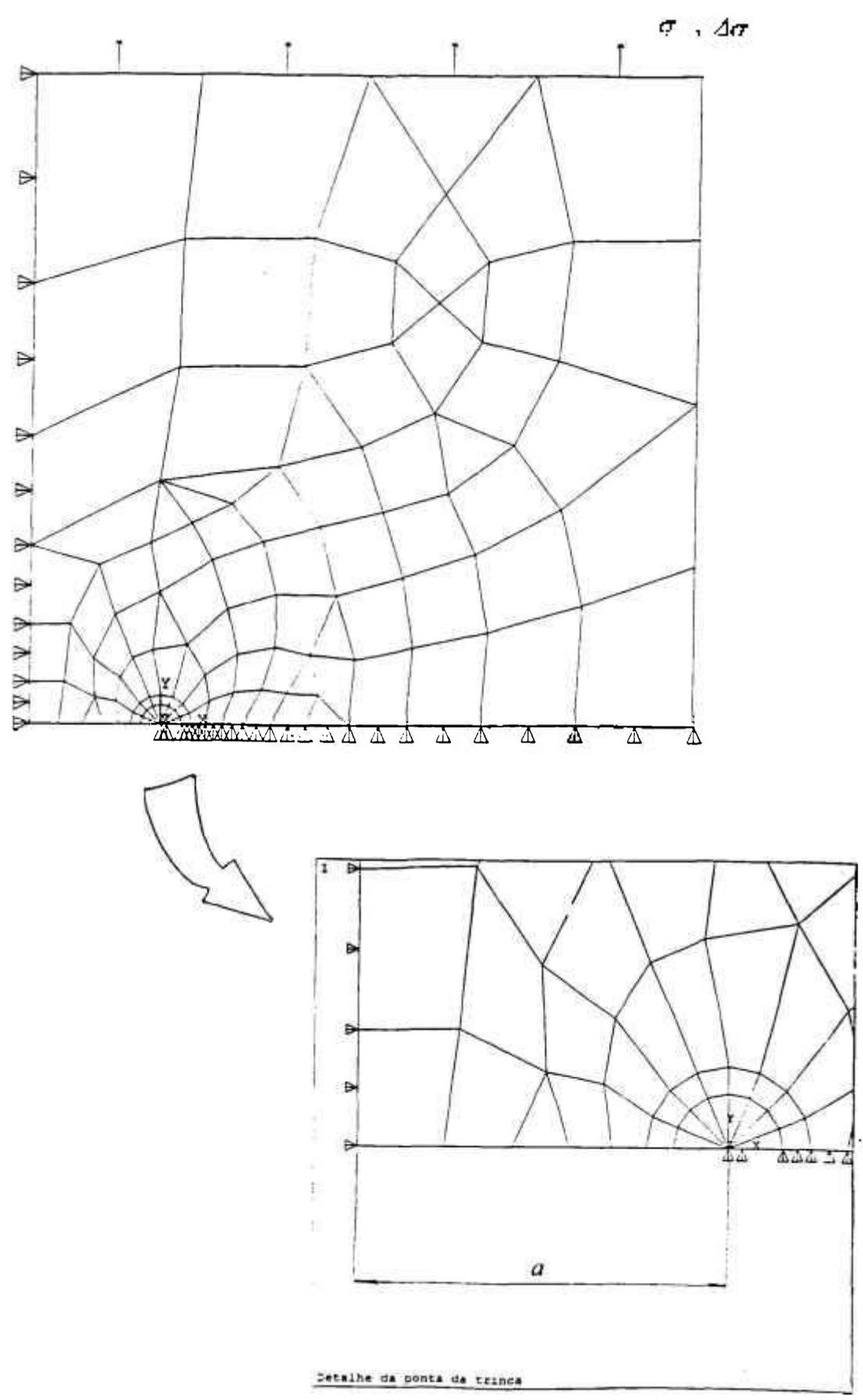


Figura 8 - Malha de elementos finitos e condições de contorno (1/4 da chapa)

Como pode ser observado no detalhe da Figura 8 toda a primeira fileira de elementos quadrilaterais – colapsados para o formato triangular na região do defeito – é formada pelos elementos especiais mencionados acima. Modelo idêntico é usado na fase elasto-plástica. De acordo com a recomendação indicada no manual do ANSYS, a configuração da malha é circular com centro na ponta da trinca, sendo a discretização formada por cinco elementos na direção radial e oito na direção angular.

Na extremidade do defeito a densidade de elementos é maior do que em regiões afastadas. Noventa e seis elementos são usados no modelo. Como existe simetria em relação aos eixos  $x$  e  $y$  é imposto, como condição de contorno, movimento nulo para os nós localizados sobre eles – como exceção ficam os nós correspondentes ao tamanho da trinca. Além disso, todos os nós que convergem para a extremidade do defeito são acoplados para que os seus deslocamentos sejam os mesmos.

Os valores de  $J$  e  $\Delta J$  são calculados usando-se a técnica da extensão virtual da trinca, como proposta por PARKS (1977) e DE LORENZI (1982). Essa metodologia consiste em realizar duas análises, uma considerando o modelo com tamanho de trinca  $a$  e outra com comprimento  $a + da$ . Em cada uma delas os deslocamentos são obtidos no ponto onde as forças são aplicadas (bordo superior no ponto localizado à meia-largura da chapa) e, a partir daí, são geradas as curvas  $P - \delta$ . Quando a segunda análise é conduzida a malha é modificada somente na região próxima à extremidade do defeito. Todos os nós afastados  $0,5a$  dessa região possuem suas posições defasadas da configuração original na direção normal à frente da trinca por um incremento  $da = 0,005a$  (SOLECKI, 1989).

Como a presença das zonas plásticas produz um sistema não-conservativo é necessário que a história do carregamento seja seguida passo-a-passo. Para que a precisão numérica seja assegurada a solicitação é aplicada incrementalmente. No presente estudo as curvas  $P - \delta$  são obtidas discretizando-se a força atuante em dez passos de mesmo incremento, sendo os deslocamentos registrados em cada um deles. O ANSYS utiliza o

método iterativo de Newton-Raphson para verificar a convergência da solução ao final de cada passo.

É importante mencionar que a malha mostrada na Figura 8 e o número de passos considerados na discretização da carga são uma seleção final. Outras opções com um maior número de elementos na ponta da trinca (dez elementos) e com maior discretização na solicitação atuante (vinte passos de carga) foram também examinadas nesta pesquisa. Os resultados obtidos são basicamente os mesmos que aqueles determinados com o modelo descrito anteriormente.

As curvas  $P - \delta$  geradas nas análises com as trincas  $a$  e  $a+da$  são armazenadas para posterior processamento, conforme será abordado a seguir.

#### 4.3 - Cálculo de $J$ e $\Delta J$

Em todos os casos investigados (material no regime linear-elástico ou elasto-plástico) a estimativa dos parâmetros  $J$  monotônico e cíclico é realizada numericamente. Seus valores são obtidos com as energias indicadas nas Figuras 6 e 7 usando um esquema de integração apropriado, como por exemplo o procedimento denominado quadratura Gaussiana (GERALD e WHEATLEY, 1989).

A determinação de  $J$  e  $\Delta J$  é realizada com um programa computacional especialmente desenvolvido para esse fim, sendo a formulação de Gauss o algoritmo numérico implementado nas rotinas de cálculo. O programa determina os valores de  $J$  para uma geometria trincada submetida a um carregamento monotônico ou cíclico. No primeiro caso as áreas integradas são as assinaladas na Figura 6; no segundo são àquelas mostradas

na Figura 7. Os dados de entrada para o programa são as forças e deslocamentos gerados na solução por elementos finitos fornecida pelo ANSYS. A discretização da curva  $P - \delta$  é a mesma que a especificada durante a análise estrutural.

Quando a solicitação é monotônica o programa calcula inicialmente a área relacionada com a trinca de comprimento  $a$ , e em seguida a área associada ao defeito de tamanho  $a + da$ , Figura 6. O uso desses valores na Eq.(16) é imediato. No caso em que a carga é cíclica a energia para as trincas  $a$  e  $a + da$  é obtida após a estabilização do laço de histerese na curva  $P - \delta$ , Figura 7. Os dados relacionados com a linha de carregamento do último ciclo da curva  $P - \delta$  definem as áreas empregadas nas Eq.(17) e (18), regimes linear-elástico e elasto-plástico, respectivamente.

Observe-se que como na presente análise a solicitação é aplicada em termos da tensão (ou força) atuante, e as equações são apresentadas para um deslocamento imposto, torna-se necessário modificar as Eq.(16) a (18) para levar em conta a energia complementar (definida como a diferença entre o trabalho das forças externas e a energia de deformação). Note-se também que estas equações são relacionadas a uma geometria com trinca lateral, cuja área incremental é  $daB$ . Para a chapa com trinca central utilizada neste trabalho a área empregada é  $2daB$ . O programa efetua automaticamente estas duas correções.

O programa contém aproximadamente cem instruções em linguagem FORTRAN (MICROSOFT, 1995), e pode ser usado como pós-processador de qualquer código de elementos finitos que forneça como resultado a curva  $P - \delta$ . Cada um dos principais blocos do programa, cuja listagem fonte é mostrada no Apêndice 1, é descrito a seguir:

- Leitura dos dados de entrada:

É realizada em duas etapas: interface com o código ANSYS e leitura das informações complementares, como as características geométricas da chapa ( $a$ ,  $w$  e  $B$ ) e o

número de pontos do laço de carregamento final. Nesta unidade são abertos os arquivos para onde os resultados serão transferidos.

Na etapa da interface com o ANSYS o programa lê as forças e deslocamentos para a trinca  $a$ , em seguida para  $a+da$ , e armazena esses valores para posterior processamento. São considerados apenas os pontos correspondentes à aplicação do ciclo final, sendo o primeiro par especificado o relacionado com os valores mínimos da curva  $P - \delta$ .

- Cálculo da energia de deformação:

Uma subrotina determina as áreas associadas às trincas  $a$  e  $a+da$  mostradas nas Figuras 6 e 7. É neste bloco que é implementado o método da quadratura de Gauss. A função a ser integrada é discreta e definida pelos pares de pontos da curva  $P - \delta$ .

O procedimento numérico consiste em integrar a função entre os valores especificados, armazenar os resultados, e repetir o processo até que todos os pontos tenham sido considerados. Cada intervalo é subdividido em vários outros (quadratura de Gauss com quatro termos), sendo os valores intermediários de  $P - \delta$  obtidos por interpolação linear. Para facilitar o esquema de integração e permitir que a obtenção de  $J$  e  $\Delta J$  seja realizada na mesma subrotina o sistema de coordenadas inicial é modificado para um outro, com origem nos pontos mínimos da curva  $P - \delta$ .

- Cálculo da energia complementar:

É obtida pela diferença entre o trabalho das forças externas e a energia de deformação para  $a$  e  $a+da$  determinada no item anterior.

- Cálculo de  $J$  e  $\Delta J$ :

São computados com as Eqs. (15), (17) e (18). As duas últimas são reescritas em termos da energia complementar para as trincas  $a$  e  $a+da$ .

A qualificação do programa foi realizada por meio de testes nos quais as respostas são comparadas com às fornecidas por cálculos manuais ou exatos. O Apêndice 2 apresenta alguns desses resultados. Primeiro foi qualificado o módulo que determina a integral de uma função qualquer. Os resultados foram examinados e comparados com os disponíveis em exemplos da literatura. Em seguida foi verificado o módulo que faz a interface com o ANSYS. Finalmente, o algoritmo foi qualificado para a análise linear-elástica de uma geometria com  $K$  (ou  $J$ ) conhecidos. Nesse estudo foram considerados todos os parâmetros adotados posteriormente na fase elasto-plástica. Os resultados obtidos com as soluções exata e numérica concordam de modo satisfatório. Consequentemente, os testes indicam que a lógica e as equações do programa estão implementadas corretamente.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 - Introdução

A sistemática adotada para a obtenção dos resultados é aumentar gradativamente o grau de dificuldades exigido para a solução do problema. As análises são realizadas em regimes linear-elástico e elasto-plástico. A configuração estudada possui solução para  $J$  monotônico disponível na literatura, o que permite qualificar a análise numérica empregada aqui. São determinados os valores de  $\Delta J$  sob condições de carga cíclica para diferentes  $R$ . Ao final do capítulo é mostrada a diferença entre  $\Delta J$  e  $\Delta J_{mon}$ , este último o parâmetro estimado pela prática atualmente empregada na indústria.

### 5.2 - Dados do problema

Os casos estudados referem-se a chapa com trinca passante central em estado plano de deformações mostrada na Figura 1. As suas dimensões são indicadas na Tabela 1. O material considerado é o aço inoxidável 304, com propriedades elásticas e parâmetros da curva tensão versus deformação representada pela lei de Ramberg-Osgood conforme a Tabela 2 (valores monotônicos, assumidos iguais aos cíclicos). Todos os dados materiais são obtidos na temperatura ambiente (21°C). Admite-se que a resposta do material é essencialmente estável durante a sua vida e, por isso, o modelo não inclui endurecimento cíclico.

Tabela 1 - Propriedades geométricas da chapa com trinca passante  
(dimensões em : mm)

$w$	$B$	$h$	$a$
127	6,35	127	25,4

Tabela 2 - Propriedades do aço 304 a 21°C

$E$ (GPa)	$\sigma_0$ (MPa)	$\nu$	$n$	$\alpha$
195	240	0,3	5,04	3,82

Fonte: EPRI (1989)

A carga é representada por uma tensão  $\sigma$  uniforme, monotônica ou cíclica, aplicada no contorno da chapa na direção perpendicular ao plano da trinca (modo I). A correlação entre a tensão imposta e a força atuante é  $P = (2wB)\sigma$ , sendo suas correspondentes variações  $\Delta P = P_{max} - P_{min}$  e  $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ . A malha de elementos finitos usada em todas as análises é mostrada na Figura 8.

A curva  $P - \delta$  é gerada com os deslocamentos obtidos na face superior e na meialargura da chapa, no ponto cujas coordenadas no modelo de elementos finitos são  $x = 0$  e  $y = h$ ).

### 5.3 - Análise linear-elástica

De modo a qualificar a solução numérica e adquirir experiência no trato com todos os aspectos envolvidos no problema, a análise linear-elástica da chapa é inicialmente conduzida. Valores de  $J$  para solicitações monotônicas e cíclicas são determinados por meio das equações exata e numérica. A comparação entre as respostas garante a precisão dos resultados.

Nos casos em que o carregamento é monotônico a correlação entre o fator de intensidade de tensões e a integral- $J$  é dada pela Eq.(4). Como já foi mencionado, estão disponíveis na literatura diversas fórmulas para a determinação exata de  $K$  e, em consequência, de  $J$ . Numericamente,  $J$  é obtido pelo método da energia descrito anteriormente, usando a Eq.(15). Esses cálculos são efetuados e a comparação entre os resultados exato e numérico, discutidos no Apêndice 2 (Exemplo n° 3), apresenta uma diferença menor que 1%. Isso é uma indicação de que o modelo de elementos finitos, o uso da técnica da extensão virtual da trinca e o esquema da integração numérica realizada aqui estão corretamente implementados.

Quando a solicitação é cíclica os valores de  $\Delta J$  são estimados numericamente de acordo com o método da energia via a Eq.(17). Esses resultados são plotados na Figura 9 em função da razão de carga  $R$ , a grandeza que caracteriza a magnitude da tensão média aplicada. Os valores são determinados mantendo-se fixa a variação de tensão  $\Delta\sigma$  (ou força  $\Delta P$ );  $\Delta J$  é normalizado por  $\Delta J_e$  dado pela Eq.(8), já definido como a integral- $J$  para os casos linear-elástico ou em que a prevalece a condição de escoamento reduzido. Como era esperado os resultados mostram uma grande influência de  $R$ , e indicam que a validade dessa equação só é confirmada para os casos onde a tensão média é baixa. É bom observar que  $J$  cíclico calculado neste trabalho incorpora diretamente o efeito da tensão média, e em regime linear-elástico coincide com a variação na taxa da energia liberada,  $\Delta G$  obtida pela Eq.(10).

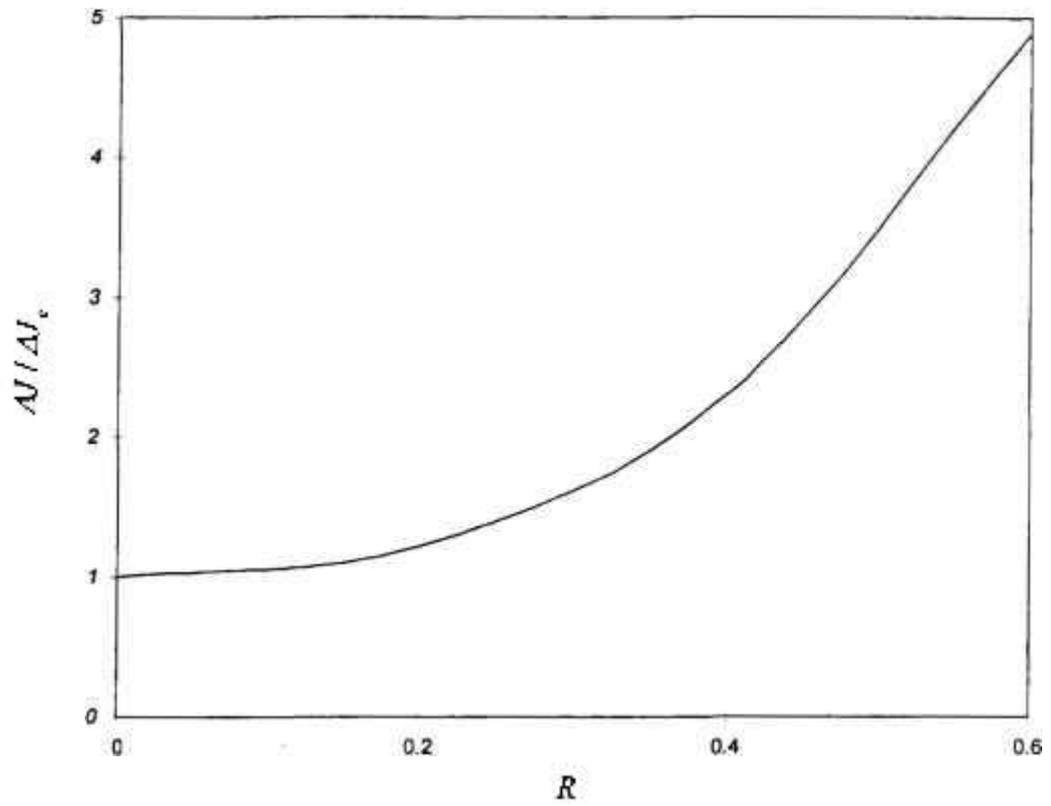


Figura 9 - Efeito da tensão média no cálculo de  $\Delta J$ . Análise linear-elástica  
[ $\Delta J_e$  é calculado com a Eq.(8) e  $\Delta J$  com a Eq.(17)]

#### 5.4 - Análise elasto-plástica

Dois tipos de problemas são estudados. Inicialmente o material é submetido a um carregamento monotônico e a integral- $J$  é calculada. Os resultados são comparados com a solução assumindo material totalmente plástico disponível na literatura, e empregados como referência para as análises subseqüentes. Em seguida a solitação cíclica é aplicada e  $\Delta J$  é computado para dois valores de  $R$ . Os resultados são comparados com  $\Delta J_{mon}$ , a quantidade determinada com fórmulas usadas para a condição monotônica. O propósito dessa última investigação é verificar a diferença entre  $\Delta J$  e  $\Delta J_{mon}$ .

O estudo inicial emprega a Eq.(15) para determinar  $J$  relacionado com o caso monotônico. Os resultados da análise elasto-plástica são plotados na Figura 10 em função da força atuante,  $P$ . A carga limite, que de acordo com o manual do EPRI (1989) é  $P_o = (4/\sqrt{3})Bb\sigma_o$ , também está indicada na figura. Sob condição de escoamento reduzido o comportamento do material é previsto pela análise linear-elástica. A hipótese de regime linear deixa de ser válida para forças elevadas (usualmente maiores que  $0,80P_o$ ), uma vez que nessa condição as zonas plásticas tornam-se extensas quando comparadas com o tamanho da trinca. A Figura 11 ilustra essa situação.

Os mesmos resultados da Figura 10 são reproduzidos na Figura 12 (linha contínua), com  $J$  normalizado por  $J_o = \sigma_o \epsilon_o a$  e  $P$  por  $P_o$ . Observa-se que ocorre um rápido acréscimo em  $J$  quando a força é elevada ( $P$  maior que  $0,80 P_o$ ). A estimativa para  $J$  disponível em AINSWORTH (1984), obtida usando-se uma combinação das soluções para os casos linear-elástico e completamente plástico, é também indicada na Figura 12 (linha tracejada). A discrepância entre esse resultado e o do estudo realizado neste trabalho é explicada pela hipótese adotada por Ainsworth, que assume o completo escoamento da seção trincada. Isso não é confirmado pela análise usando elementos finitos e, por conseguinte, o valor de  $J$  calculado é menor. A concordância entre esses resultados é

melhor quando maiores valores de  $n$  e  $a/w$  são empregados (KANNINEN e POPELAR, 1985).

Como no caso linear-elástico, conclui-se que a solução numérica implementada é adequada e pode ser aplicada para as demais análises.

A análise para o cálculo de  $\Delta J$  é realizada considerando-se que a chapa trincada é submetida a solicitações cuja variação na carga é  $\Delta P$ . Por hipótese, admite-se que a força imposta um número de vezes suficiente para que a resposta do material seja estável. Esse comportamento é caracterizado pela formação do laço de histerese (que pode ser aberto ou fechado) na curva  $P-\delta$ . O estudo é realizado examinando-se dois tipos de carregamento: repetido, no qual a razão de carga é  $R = 0,0$  (tensão média diferente de zero) e completamente reverso, com  $R = -1,0$  (tensão média nula).

Nos casos em que eventos cíclicos estão presentes, as primeiras aplicações da carga produzem deformações plásticas em volta da ponta da trinca. A partir daí as tensões residuais criadas, combinadas com as tensões de trabalho, são responsáveis pelo comportamento subsequente do material. Se as solicitações são controladas pelas deformações ou deslocamentos e a variação total da tensão em cada ponto durante os carregamentos e descarregamentos seguintes é menor que  $2\sigma_0$  (é assumido endurecimento cinemático), a resposta é linear-elástica. Em caso contrário, o comportamento é elasto-plástico e um laço de histerese é gerado. As Figura 13 e 14 fornecem, respectivamente, as representações típicas para essas situações<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>As figuras são para  $a/w = 0,20$ . São obtidos gráficos similares quando o incremento na trinca é considerado.

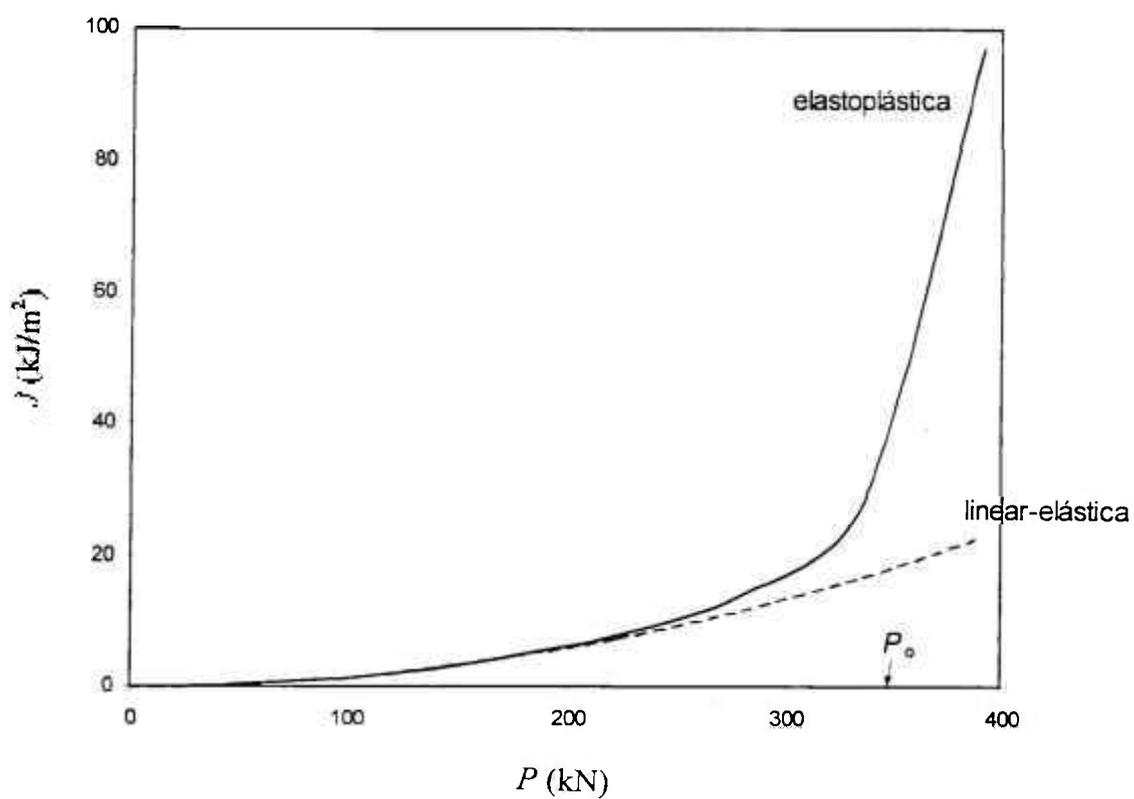


Figura 10 -  $J$  versus força aplicada. Análises linear-elástica e elasto-plástica

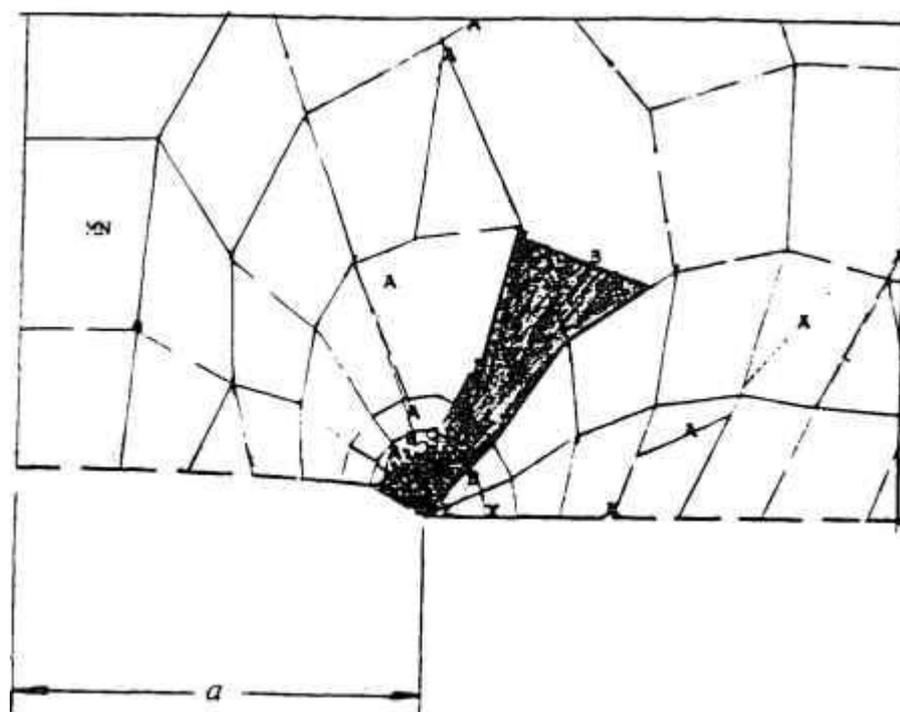


Figura 11 - Zona plástica e tamanho da trinca sob condição de carregamento elevado  
( $P = 0,80 P_0$ )

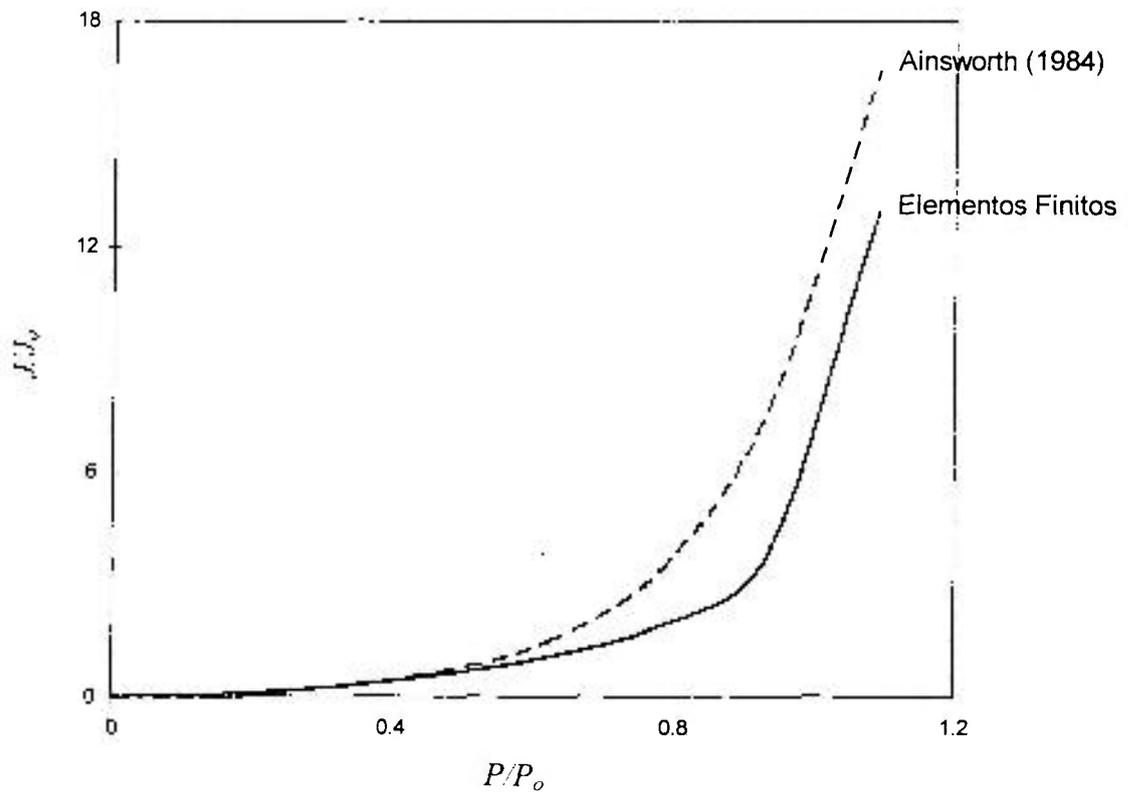


Figura 12 - Valores de  $J$  monotônicos. Comparação entre a análise por elementos finitos e a solução fornecida por Ainsworth (1984)

A Figura 13 ilustra o caso em que  $R = 0,0$ , com o material sendo primeiramente solicitado até um valor de carga onde é alcançado o estágio plástico. Observa-se que o laço de histerese é fechado para as demais aplicações da força. Essa resposta é esperada porque após a aplicação inicial da carga são criadas tensões residuais de compressão (geralmente opostas em sinal ao máximo valor da tensão), e a magnitude dos carregamentos e descarregamentos subsequentes não é suficiente para superar esse campo residual e produzir escoamento adicional. Portanto, a resposta  $P - \delta$  cíclica é caracterizada por uma relação linear-elástica.

A curva  $P - \delta$  apresentada na Figura 14 representa o comportamento típico para a situação em que um carregamento completamente reverso,  $R = -1,0$ , é imposto. Nessa condição a variação na tensão aplicada é suficiente para produzir o laço de histerese, uma vez que as tensões residuais na ponta da trinca formadas pelo ciclos de carga iniciais são trativas. Note-se também que como a tensão média é nula, existe simetria em relação ao ramo de tração e compressão da curva. A extensão da zona plástica é dada pela largura do laço na interseção com o eixo dos deslocamentos. A energia de deformação e  $\Delta J$  aumentam com esse deslocamento cíclico.

Os valores de  $\Delta J$  associados com solicitações cíclicas foram obtidos com a Eq.(18). Os resultados são mostrados na Figura 15 e apresentados em função da variação da força aplicada  $\Delta P$  para  $R = 0,0$  e  $-1,0$ . A figura também contém  $\Delta J_e$  (linha pontilhada), a quantidade considerada em regime linear-elástico, calculada pela Eq.(8), válida quando a tensão média é nula ou reduzida (ver Figura 9).

Quando  $R = 0,0$  o laço de histerese é fechado (Figura 13) e a propagação da trinca é controlada pela energia de deformação elástica. As áreas obtidas após à aplicação final da carga, e que devem ser incluídas na Eq.(18), são indicadas na Figura 7b. Observa-se na Figura 15 (linha tracejada) que mesmo para forças elevadas (maiores que  $P_0$ ) existe concordância entre  $\Delta J$  e  $\Delta J_e$ .

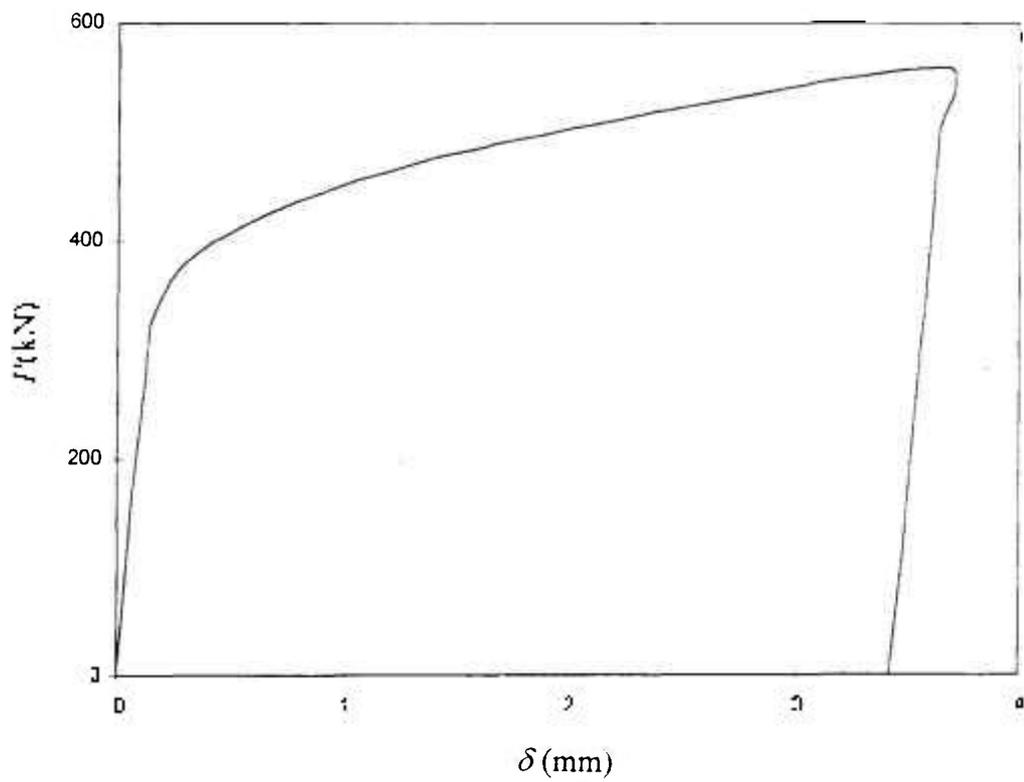


Figura 13 - Curva cíclica  $P - \delta$  para  $R = 0,0$  e  $\Delta P / P_o = 1,56$

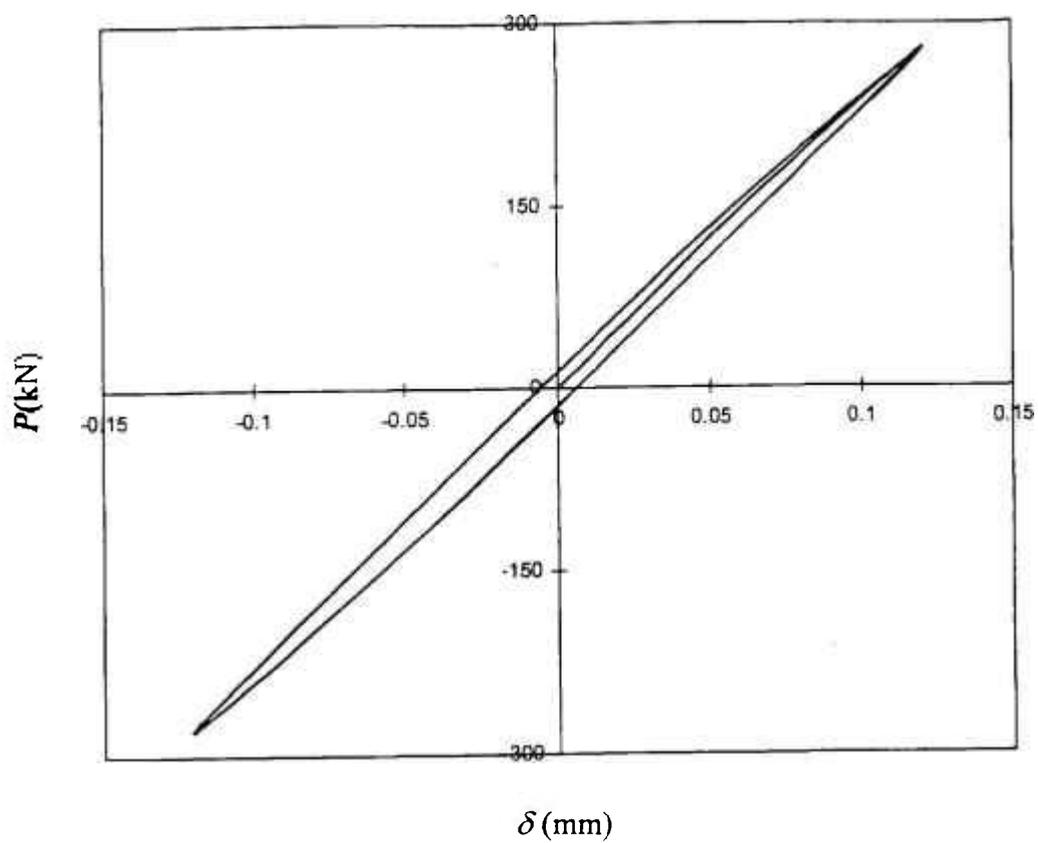


Figura 14 - Curva ciclica  $P-\delta$  para  $R = -1,0$  e  $\Delta P / P_o = 1,56$

Quando  $R = -1,0$  o laço de histerese é aberto (Figura 14) e o crescimento da trinca é comandado pela energia de deformação plástica.  $\Delta J$  é avaliado como explicado no caso anterior. Nota-se, mais uma vez, a excelente concordância entre  $\Delta J$  (linha contínua) e  $\Delta J_c$  representados na Figura 15, mesmo quando a força aplicada é da magnitude de  $P_o$ . Essa igualdade deixa de existir com o aumento na carga, posto que a zona plástica também cresce e o seu tamanho é a variável que controla o cálculo de  $\Delta J$ . A Figura 16 mostra uma ilustração da curva  $P - \delta$  determinada para  $\Delta P / P_o = 1,87$ . Comparação com a Figura 14, obtida com  $\Delta P / P_o = 1,56$ , fornece a indicação de que é esperada discrepância maior entre  $\Delta J$  e  $\Delta J_c$  para valores crescentes de  $\Delta P$ .

A diferença entre  $\Delta J$  e  $\Delta J_{mon}$ , esse último o valor estimado usando expressões para solicitações monotônicas (conforme praticado na indústria), é agora examinada. Essas quantidades, cada uma delas representada graficamente nas Figuras 15 e 10, são reproduzidas na Tabela 3 para  $R = 0,0$  e  $-1,0$ . Os dados da tabela são plotados na Figura 17, que mostra como a razão  $\Delta J / \Delta J_{mon}$  varia com diferentes níveis de carga, indicados pela relação  $\Delta P / P_o$ .

Nota-se que com o aumento de  $\Delta P / P_o$  existe um decréscimo acentuado em  $\Delta J / \Delta J_{mon}$ . Assim, quando a plasticidade é significativa  $\Delta J$  é uma ordem de magnitude menor que  $\Delta J_{mon}$ . Isso ocorre devido a tendência de crescimento dramático no valor monotônico quando a força aplicada é maior que a carga limite (ver Figura 10). Os resultados para  $R = 0,0$  e  $-1,0$  são coincidentes porque, conforme observado na Figura 15,  $\Delta J$  é independente desse parâmetro durante praticamente toda a variação de carga.

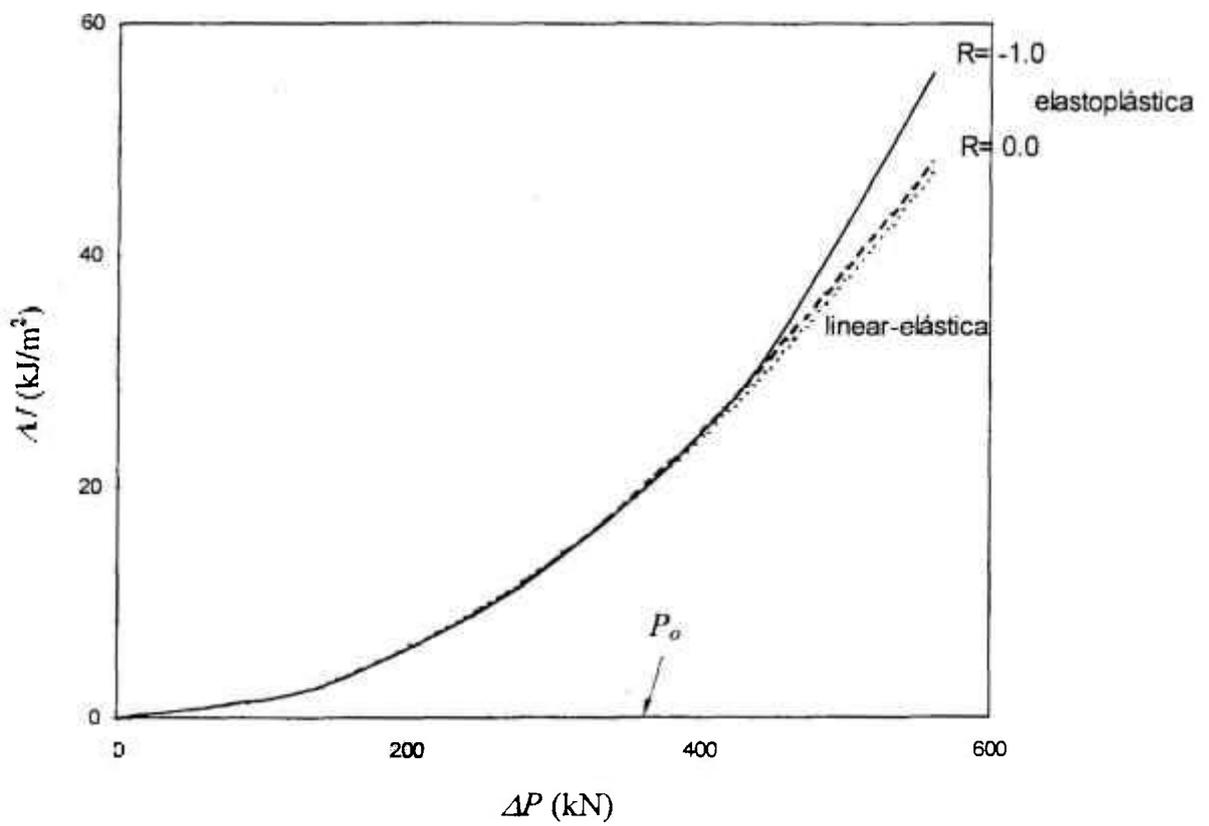


Figura 15 - Correlação entre  $\Delta J$  e a variação da carga  $\Delta P$  para  $R = 0,0$  e  $-1,0$ .  
[Solução linear-elástica da Eq.(8) e elasto-plástica da Eq.(18)]

Tabela 3 - Valores de  $\Delta J$  e  $\Delta J_{mon}$  em função de  $R$ 

$\Delta P / P_n$	$\Delta J / \Delta J_{mon}$	
	$R = 0,0$	$R = -1,0$
0,31	0,99	0,99
0,47	0,97	0,97
0,62	0,92	0,92
0,78	0,82	0,82
0,94	0,59	0,59
1,09	0,24	0,24
1,25	0,11	0,11
1,56	0,04	0,05

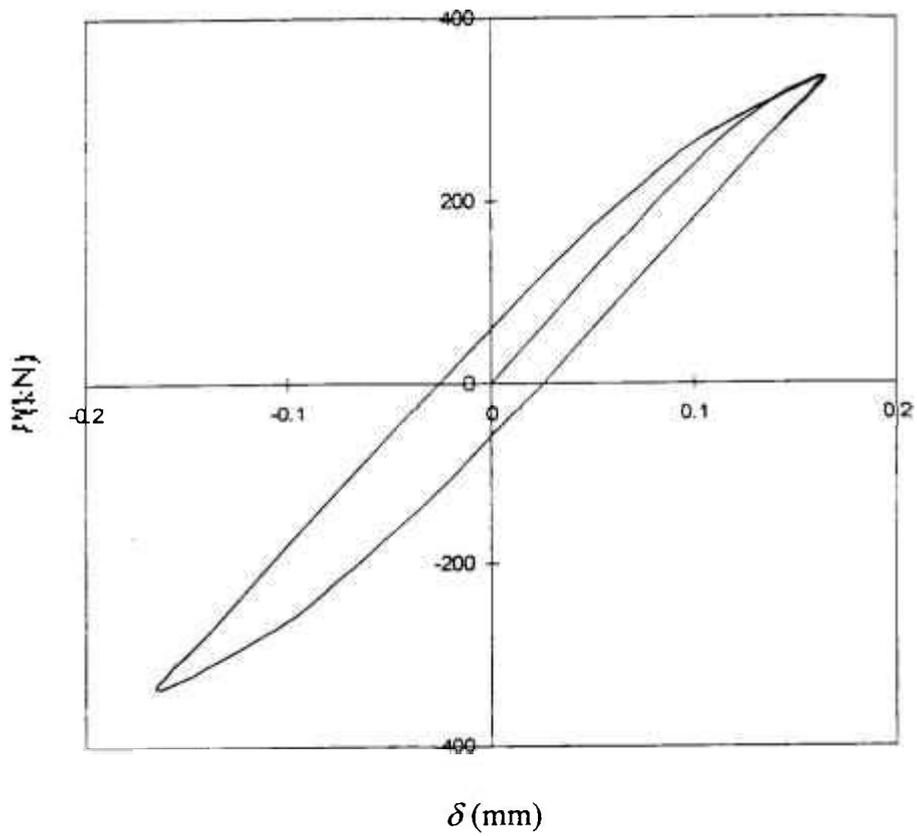


Figura 16 - Curva cíclica  $P - \delta$  para  $R = -1,0$  e  $\Delta P / P_o = 1,87$

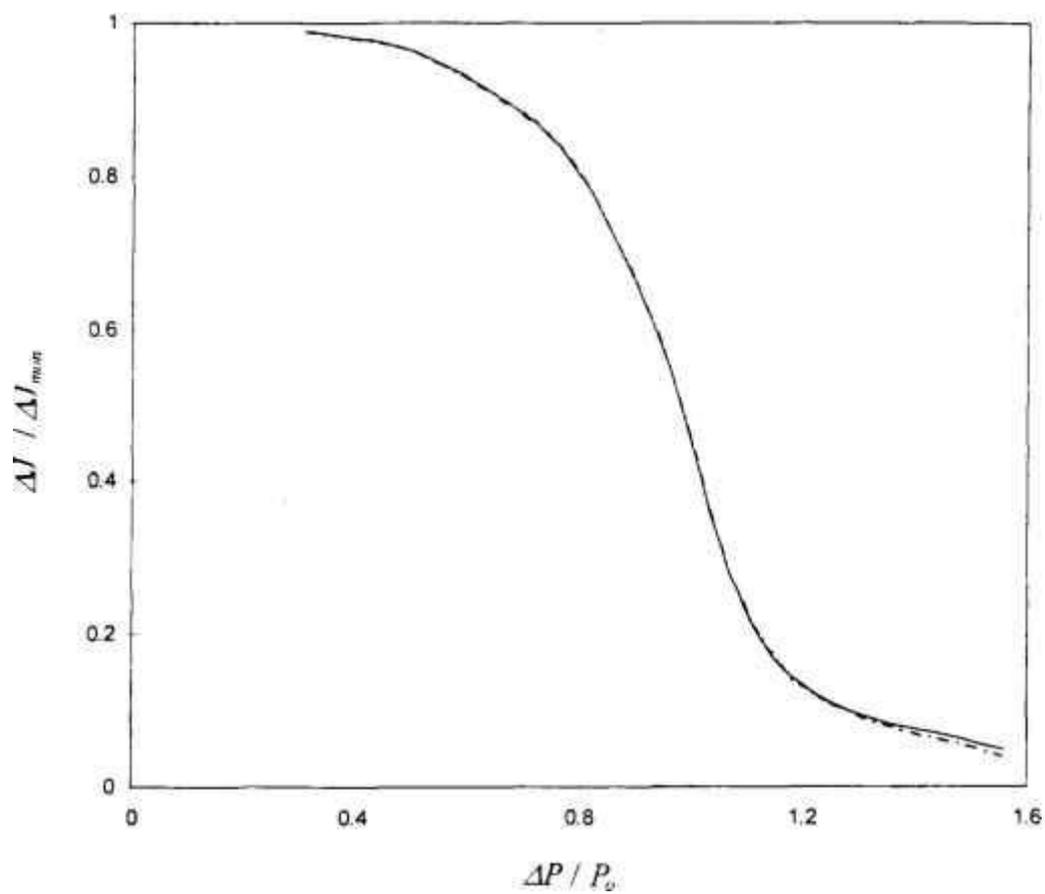


Figura 17 - Comparação entre  $\Delta J$  e  $\Delta J_{mon}$  em função da variação da carga para  $R = 0,0$  e  $-1,0$

## 6 AVALIAÇÃO E APLICAÇÃO DOS RESULTADOS

### 6.1 - Introdução

As principais informações obtidas no presente trabalho são discutidas neste capítulo. Os seguintes itens são abordados: influência das tensões médias no cálculo de  $\Delta J_c$ , determinação de  $\Delta J$  usando as equações da análise linear-elástica, estimativa de crescimento de trincas com  $\Delta J_{min}$  e aplicação dos resultados para outras geometrias ou carregamentos. Por fim, é apresentado o estudo preliminar que mostra o efeito das tensões residuais no cálculo de  $J$  monotônico.

### 6.2 - Influência das tensões médias em $\Delta J_c$

De acordo com TANAKA (1983) o cálculo de  $\Delta J_c$  pela Eq.(8) só é válido quando a tensão média é nula. Isso limita a aplicação dessa equação uma vez que, em geral, as solicitações cíclicas são caracterizadas por  $R \neq -1,0$ .

Os resultados reproduzidos na Figura 9 mostram que a Eq.(8) também pode ser adotada em presença de tensão média reduzida (no exemplo considerado,  $R < 0,2$ ). Mais importante, os valores de  $J$  cíclico calculados neste trabalho em regime linear-elástico coincidem com a variação na taxa da energia liberada,  $\Delta G$ , obtida pela Eq.(10). Esta conclusão é uma importante informação do ponto de vista prático porque permite

empregar uma equação simples, a Eq.(10), para determinar  $\Delta J_c$ , qualquer que seja o valor de  $R$ .

### 6.3 - Valores de $\Delta J$ com o uso das equações da análise linear-elástica

A Figura 15 mostra que para  $R = 0,0$  os resultados calculados usando  $\Delta J$  são os mesmos que os determinados a partir de  $\Delta J_c$ . Isto é, a resposta da seção trincada é elástica mesmo que a força atuante seja maior que a carga limite. Para  $R = -1,0$  observa-se um desvio na resposta entre  $\Delta J$  e  $\Delta J_c$ , explicado pela presença de deformação plástica cíclica (que não ocorre no caso em que  $R = 0,0$ ). Ainda assim, o comportamento do material é previsto por análise linear-elástica até valores de variação da força da ordem da carga limite. Ressalte-se o interesse desta informação na avaliação de estruturas que operam em plantas nucleares, projetadas com normas que não admitem forças próximas à limite.

Além disso, note-se o aproveitamento das conclusões discutidas acima na previsão da propagação de trincas em regime elasto-plástico, porque evita-se o uso do método dos elementos finitos (mais dispendioso e demorado) nas situações em que as equações da fratura linear-elástica são disponíveis.

Uma outra constatação que pode ser derivada da Figura 15 é que no cálculo de  $\Delta J$  a tensão média resultante do carregamento aplicado (média entre as tensões máxima e mínima) tem um efeito contrário ao observado no caso linear-elástico – na análise elasto-plástica obtém-se maiores valores de  $\Delta J$  para  $R = -1,0$  do que para  $R = 0,0$ . Essa aparente inconsistência é justificada por  $\Delta J$  ser controlado pelo tamanho da zona plástica cíclica, que não ocorre neste último caso (Figura 13). Comportamento oposto é observado quando a tensão média é nula (Figura 14), onde é registrada a presença de zona plástica cíclica. Entretanto, é bom lembrar que no caso elasto-plástico a tensão média total consiste de duas

parcelas, uma devido à solicitação externa e outra causada pela deformação residual. Portanto, mesmo no caso em que  $R = -1,0$  existe uma componente média (igual a tensão residual) que governa a resposta do material.

#### 6.4 - Estimativa do Crescimento de Trincas com $\Delta J_{mon}$

O cálculo de  $\Delta J$  usando  $\Delta J_{mon}$ , o valor determinado por meio das equações aplicadas aos casos monotônicos, afeta bastante a previsão da taxa de propagação de trincas. Note-se que  $da/dN$  em regime elasto-plástico aumenta proporcionalmente com  $J$  cíclico elevado a  $m$ -ésima potência, isto é,  $\mathcal{G}\Delta J^m$ , onde  $\mathcal{G}$  e  $m$  são constantes do material (DOWLING e BEGLEY, 1976). Valores típicos de  $m$  para os metais variam entre 1,5 e 2,0 (O'DONNELL, 1988; JABLONSKI, 1989).

Observa-se na Figura 17 que  $\Delta J_{mon}$  pode alcançar valores pelo menos uma ordem de grandeza diferentes de  $\Delta J$ ; portanto, o emprego do primeiro fornece uma estimativa de propagação maior que a deste último, principalmente nas situações em que a carga é elevada. Os resultados mostram que  $\Delta J$  deve ser calculado com o procedimento proposto aqui, uma vez que a formulação considera as tensões residuais, que não são levadas em conta na estimativa de  $\Delta J_{mon}$ . Como consequência imediata conclui-se que o parâmetro  $\Delta J$  obtido como neste trabalho deve ser usado nos casos em que é necessário estender a vida de um equipamento.

## 6.5 - Geometria e carregamentos genéricos

A independência geométrica de  $J$  como um parâmetro que controla a propagação da trinca é comprovada pelos experimentos mencionados no Capítulo 2. De acordo com as referências lá citadas,  $\Delta J$  é função das condições locais como o tamanho do defeito e extensão da zona plástica. Assim, as tensões residuais (deformações plásticas cíclicas) e a energia armazenada na região da trinca dominam o cálculo de  $\Delta J$ .

Isso sugere que as informações geradas aqui serão similares às aquelas obtidas quando diferentes geometrias, materiais e solicitações forem consideradas. Pode-se admitir que a chapa com trinca passante central usada simula parte de um sólido qualquer sujeito a um carregamento generalizado (isto é força, momento ou deslocamento imposto) que provoque a abertura da trinca.

É interessante lembrar que esta tese introduz um conceito importante, que é a aplicação das correlações da fratura linear-elástica para a determinação de  $\Delta J$  mesmo em presença de plasticidade elevada. Não é seu objetivo implementar um estudo paramétrico (investigações com outras configurações, tamanhos de trinca, condições de carregamento), ficando essa tarefa para ser desenvolvida em outras pesquisas.

Análises para condições específicas devem ser realizadas se necessário. Por exemplo, neste estudo apenas o problema da força atuante foi investigado. Entretanto, ocorrem casos em que o sólido é submetido a carregamento de momento. Nessas condições, as energias que devem ser levadas em conta para determinar  $\Delta J$  são obtidas da curva momento versus rotação.

## 6.6 - Integral- $J$ para material com deformação inicial

Um dos tópicos importantes na área de fratura elasto-plástica ainda não investigado suficientemente está relacionado com o efeito das tensões residuais no cálculo de  $J$  monotônico,  $J_{res}$ . Apesar do problema não estar diretamente relacionado com os objetivos deste trabalho, a sua solução possui importância prática e, portanto, ele é abordado a seguir.

Na análise para obter  $J_{res}$  assume-se que o material foi previamente solicitado e, conseqüentemente, possui uma deformação plástica inicial. Esse estado deformado é resultante de uma evento qualquer (montagem forçada, sobrecarga), que induziu no sólido tensões residuais de compressão ou de tração. A partir da configuração deformada, e usando a metodologia já apresentada, é calculado  $J_{res}$ .

Por conveniência, no presente estudo o campo residual foi provocado por solicitações cíclicas caracterizadas por  $R = 0.0$  (campo residual de compressão) e  $R = -1.0$  (campo residual de tração). Duas variações na carga foram consideradas:  $\Delta P / P_o = 0.94$ , que produz zona plástica contida na ponta da trinca (escoamento reduzido);  $\Delta P / P_o = 1.56$ , adotada apenas para o caso em que  $R = -1.0$ , e que introduz zona plástica extensa no sólido.

Depois que o campo residual é criado são determinados valores de  $J_{res}$  para diferentes cargas monotônicas. A Eq.(16) é adotada no cálculo. Os resultados são mostrados na Figura 18 normalizados por  $J$ , os valores calculados para o material virgem (sem deformação inicial). Os dados são plotados em função da força aplicada  $P$ , que é normalizada pela carga limite  $P_o$ .

Nota-se na Figura 18 (linha contínua) que não há diferença entre  $J_{res}$  e  $J$  quando as tensões residuais trativas são reduzidas (produzidas por  $\Delta P / P_o = 0,94$ ). O mesmo não ocorre quando o campo residual de tração é gerado pelo carregamento que induz escoamento significativo ( $\Delta P / P_o = 1,56$ ). Nesse caso é observado um aumento nos valores de  $J$  calculados assumindo-se o sólido previamente deformado (linha pontilhada). Como esperado, o campo residual de compressão reduz  $J$  quando comparado com os valores determinados usando o material não-deformado originalmente (linha tracejada).

Os resultados obtidos justificam a idéia de que a definição original da integral- $J$  proposta por Rice deve ser modificada quando uma deformação inicial elevada está presente no material. Entretanto, devem ser conduzidas pesquisas suplementares para confirmar esse comportamento.

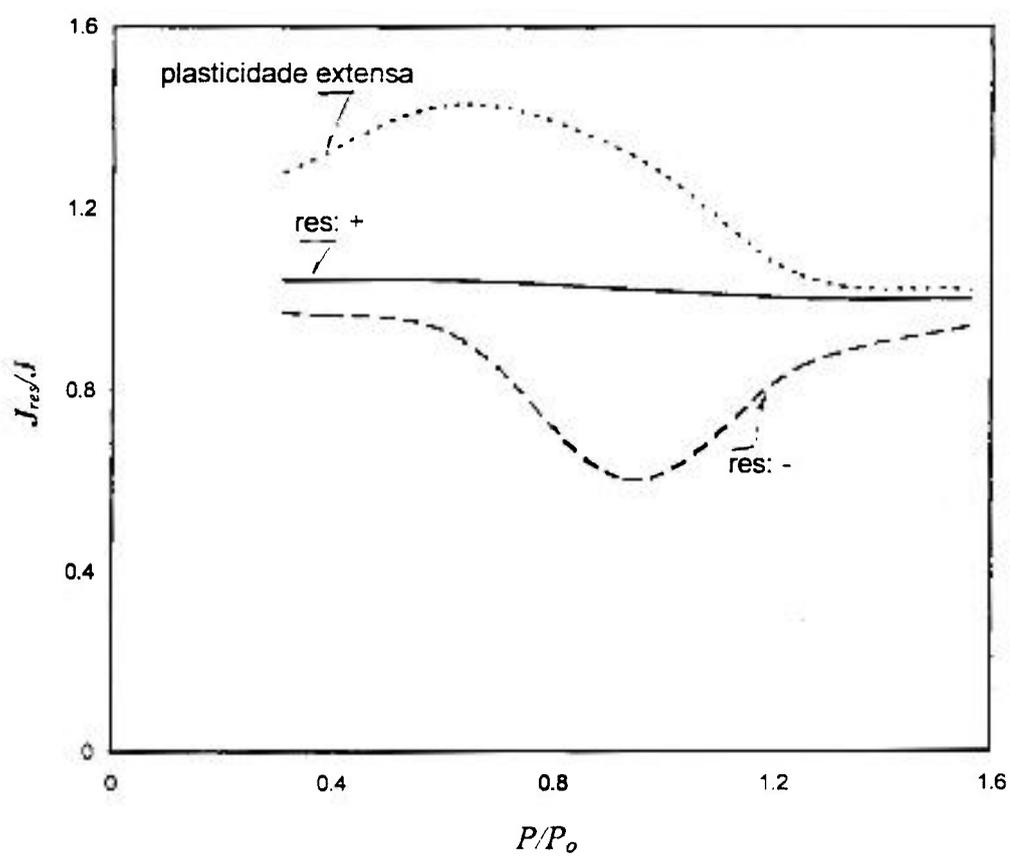


Figura 18 - Efeito do campo residual no cálculo de  $J$   
res: + tensão residual trativa  
res: - tensão residual compressiva

## 7 FUTURAS PESQUISAS - SUGESTÕES

O trabalho apresenta os resultados de uma primeira contribuição para a previsão de fadiga em regime elasto-plástico. Contudo, existem limitações na metodologia e muito ainda deve ser examinado para a quantificação de  $\Delta J$ . Como exemplo segue uma lista de pesquisas que podem ser desenvolvidas na área.

a) Carregamentos cíclicos com  $R > 0.0$  - as análises realizadas consideraram dois tipos de solicitações:  $R = 0.0$  e  $-1.0$ . A razão para a escolha desse dois valores é a sua utilização nos testes de fadiga, em geral realizados usando-se carregamentos com essas características. Como componentes em operação podem estar sujeitos a eventos cíclicos com  $R > 0,0$ , é recomendável estender os estudos para outros valores de  $R$ .

b) Carga aplicada em termos de deslocamento prescrito - essa consideração assegura que o deslocamento no sólido trincado é uniforme, e representa melhor que a força aplicada os efeitos da temperatura. A principal fonte de fadiga em componentes operando em plantas nucleares é a expansão térmica, que produz tensões controladas pela deformação imposta.

c) Efeito do fechamento da trinca - a presença de plasticidade elevada está geralmente relacionada com o fechamento da trinca. A metodologia de análise se torna mais realista quando esse efeito é incluído no cálculo de  $\Delta J$ .

d) Comportamento cíclico do material - nos estudos realizados não foi assumido no modelo a possibilidade do material endurecer ou amolecer com solicitações cíclicas. Como esse comportamento ocorre na prática, é importante investigar se a sua consideração altera as conclusões obtidas.

## 8 CONCLUSÕES

Esta pesquisa é elaborada com o objetivo de estabelecer um critério para o uso da integral- $J$  em presença de carregamentos cíclicos. O valor de  $\Delta J$  é obtido por meio de análise por elementos finitos combinada com uma técnica numérica proposta aqui. Os estudos são realizados usando-se um programa computacional disponível comercialmente e outro especificamente elaborado pelo autor. A investigação é conduzida numa chapa com trinca passante central sujeita a uma força aplicada na direção perpendicular ao plano da trinca.

O trabalho possui características tecnológicas que tornam o emprego dos resultados bastante atraentes na prática da engenharia, principalmente na análise de pequenas trincas, quando a teoria da fratura linear-elástica não é válida (limiar de fadiga na curva  $da / dN - \Delta K$ ). Esta tese apresenta uma abordagem conceitual para o cálculo de  $\Delta J$ , com conclusões aplicadas às configurações que possam ser simuladas como a considerada aqui.

Em regime linear-elástico a tensão média, representada pelo parâmetro  $R$ , afeta sensivelmente o cálculo de  $\Delta J$ . Os resultados reproduzidos na Figura 9 mostram que a expressão usualmente empregada para a condição de escoamento restrito, Eq.(8), é limitada aos casos em que a tensão média é nula ou baixa ( $R < 0,2$  no exemplo estudado). As análises realizadas comprovam que para maiores valores  $R$  é melhor computar  $\Delta J_c$  com a equação que fornece a variação na taxa de energia liberada, Eq.(10).

Os resultados da análise elasto-plástica fornecem duas contribuições inéditas e de grande importância para o estudo da propagação de trincas e cuja aplicação permite estender a vida útil de equipamentos em operação:

- Os dados plotados na Figura 15 indicam que a resposta da seção trincada é elástica para  $R = 0,0$ , mesmo com variação na força aplicada maior que a carga limite. O comportamento também é elástico para  $R = -1,0$ . Todavia, observa-se que nesse caso ocorre resposta plástica para valores menores de  $\Delta P$ . Ainda assim, pode-se usar as correlações da mecânica da fratura linear-elástica para obter  $\Delta J$  mesmo quando as solicitações cíclicas são elevadas.

- A Figura 17 mostra que o emprego das expressões para solicitações monotônicas para calcular  $\Delta J$ , uma prática comum na indústria quando se deseja estimar a propagação de trincas, é bastante conservador. A determinação de  $\Delta J$  por meio das correlações da mecânica da fratura linear-elástica prevê resultados mais realísticos, mesmo em presença de extensas zonas plásticas. Quando o comportamento cíclico plástico torna-se importante, o valor  $\Delta J_{mon}$  obtido das condições monotônicas é muito maior que  $\Delta J$  como calculado neste trabalho. Por isso, este último deve ser usado para estimar a taxa de crescimento de trinca.



```

*14x,'Dados relativos ao laço de carregamento final')
WRITE (3,3)
3  FORMAT(/,16x,' Desl. a',9x,'Desl. a+da',7x,'Força',/)

do i=1,numpt
  WRITE (3,5) XA(I),XADA(I),FX(I)
5  FORMAT (10X,2(E15.5,3X),3X,F8.1)
end do

WRITE (3,8)
8  FORMAT (///,17x,'Curva Força-Deslocamento (novos eixos) ',/)
WRITE (3,10)
10 FORMAT(/,16x,' Desl. a',9x,'Desl. a+da',7x,'Força',/)

do i=1,numpt

  XAOFF(I) = XA(I) + OFF1a
  XADAOFF(I) = XADA(I) + OFF1b
  FXOFF(I) = FX(I) + OFF2

  WRITE (3,16) XAOFF(I),XADAOFF(I),FXOFF(I)
16  FORMAT (10X,2(E15.5,3X),3X,F8.1)

end do

CALL INTEGRAL (ND1,NTERMS,NUMPT,XAOFF,FXOFF,UA)

CALL INTEGRAL (ND1,NTERMS,NUMPT,XADAOFF,FXOFF,UADA)

c  Ua e Uada são as energias de deformação (strain energy) para os casos
c  em que o carregamento é do tipo deslocamento imposto.

      ! Energia complementar trinca a+da
Ucada = -(Uada-FXOFF(NUMPT)*XADAOFF(NUMPT))

      ! Energia complementar trinca a
Uca = - (Ua - FXOFF(NUMPT)*XAOFF(NUMPT))

DeltaUc = (Ucada - Uca)          ! Energia complementar
Deltaa = 0.005*trinca          ! Extensão virtual da trinca (0.5%a)
                                   ! Área da trinca: tk*2*Deltaa

zJcic = DeltaUc/(tk*2*Deltaa)   ! J cíclico

WRITE (3,20) trinca,width,tk,fx(numpt),fx(1)
20  FORMAT (//,9X,'Metade do tamanho da trinca:',f7.3,/,
*9x,'Metade da largura da placa: ',f7.3,/,
*9x,'Espessura da placa: ',f7.3,/,
*9x,'Força máxima aplicada: ',f9.1/,
*9x,'Força mínima aplicada: ',f9.1)      !É o primeiro ponto da curva de
                                           !carregamento final.

WRITE (3,30) Uca,Ucada
30  FORMAT(/,9X,'Energia complementar:',/
*,11X,'Trinca: a:',E15.5,3x,'Trinca: a+da:',E15.5)
WRITE (3,40) zJcic
40  FORMAT (/,9X,'J cíclico:',E15.5

END

SUBROUTINE INTEGRAL (ND1,NTERMS,NUMPT,X,FX,AINT)
REAL X(ND1),FX(ND1)
REAL A,B,C,D,GQ

C  -----
C  VALOR INICIAL DA INTEGRAL

```

```

C -----
  AINT=0.

  DO 30 I=1, NUMPT-1

C-----
C  CONSTANTES DE INTEGRACAO: A,B
C  VALORES DA FUNCAO NESSES PONTOS: C,D
C-----

  A=X(I)
  B=X(I+1)
  C=FX(I)
  D=FX(I+1)

  CALL GAUSSQ(A,B,C,D,NTERMS,GQ)

  PRINT'(/)'
  PRINT 20,A,B,GQ
20  FORMAT(E15.5,2X,E15.5,2X,E15.5)

  AINT = AINT + GQ

30  CONTINUE

C  PRINT'(/)'
C  PRINT 40, AINT
C 40  FORMAT ('ENERGIA POTENCIAL:',F15.7///)

  END

  SUBROUTINE GAUSSQ(A,B,C,D,NTERMS,GQ)

C -----
C  INPUT: A,B    ~ INTERVAL [A,B] OVER WHICH FUNCTION IS TO BE INTEGRATED
C           NTERMS ~ NUMBER OF TERMS TO BE USED

C  OUTPUT:GQ    ~ THE VALUE OF THE INTEGRAL BETWEEN [A,B]

C  LOCAL VARIABLES:  BPLUSA:  (B+A)/2
C                   BLESSA:  (B-A)/2
C                   T:       THE VECTOR OF T-VALUES IN [-1,1]
C                   W:       THE VECTOR OF WEIGHTS
C -----

  REAL A,B,C,D,T(4),W(4),BPLUSA,BLESSA,SUM,GQ
  INTEGER NTERMS,I,J

  IF(NTERMS.EQ.2) THEN
    T(1) = -0.5773502691
    T(2) = -T(1)
    W(1) = 1.0
    W(2) = 1.0
  ELSE IF(NTERMS.EQ.3) THEN
    T(1) = -0.7745966691
    T(2) = 0.0
    T(3) = -T(1)
    W(1) = 0.55555555556
    W(2) = 0.88888888889
    W(3) = W(1)
  ELSE IF(NTERMS.EQ.4) THEN
    T(1) = -0.8611363115
    T(2) = -0.3399810435
    T(3) = -T(2)
    T(4) = -T(1)
    W(1) = 0.3478548451
    W(2) = 0.6521451549
    W(3) = W(2)
    W(4) = W(1)
  END IF

```

```
C COMPUTE INTEGRAL FROM ABOVE VALUE. O VALOR DE F(BLESSA*T(I)+BPLUSA) E
C OBTIDO POR MEIO DE INTERPOLACAO LINEAR USANDO OS VALORES DA FUNCAO EM
C A E B.
C -----
```

```
      BLESSA = (B-A)/2.0
      BPLUSA = (B+A)/2.0
      SUM=0.0
      DO 10 I=1, NTERMS
         X = BLESSA*T(I)+BPLUSA
         F=((X-A)/(B-A))*(D-C) - C
         SUM = SUM + W(I)*F
10      CONTINUE

      GQ = BLESSA*SUM

      END
```

## APÊNDICE 2 - Qualificação do programa fonte

São apresentados três exemplos para a qualificação do programa que calcula  $J$  e  $\Delta J$ . Nos dois primeiros é verificada a implementação da solução numérica empregada. Para esse fim são usados exemplos disponíveis na literatura, sendo os resultados comparados com os fornecidos pelo programa desenvolvido neste trabalho. No outro exemplo é verificada a adequação da sua interface com o ANSYS. Nesse caso um exemplo para o cálculo de  $J$  em regime linear-elástico é utilizado.

Exemplo 1: Calcular a integral da função definida pelos pontos:

$x$	$f(x)$
1.0	1,543
1,1	1,668
1.2	1,811
1.3	1,971
1.4	2,151
1.5	2,352
1.6	2,577
1,7	2,828
1.8	3,107

Solução de GERALD e WHEATLEY (1989): 1,7683 (Exercício nº 30, seção 4.8)

Solução do programa: 1.7683

Erro: 0

Exemplo 2: Seja a relação tensão versus deformação representada pela lei de Ramberg-Osgood e definida pelos pontos:

$\varepsilon$	$\sigma$ (MPa)
0,0000	0,00
0,0020	400,00
0,0056	413,80
0,0081	448,28
0,0115	482,76
0,0232	551,72

De acordo com DOWLING (1977), a energia de deformação  $U$  por unidade de comprimento pode ser obtida pela expressão

$$U = \frac{\sigma_o^2}{2E} + \frac{\sigma_{max} \varepsilon_p}{s+1}$$

onde  $\varepsilon_p = \varepsilon_{max} - \varepsilon_o$ . Os valores máximos da tensão e da deformação na curva são, respectivamente,  $\sigma_{max}$  e  $\varepsilon_{max}$ . A deformação de referência é  $\varepsilon_o = \sigma_o / E$  e  $s$  é uma constante do material. Para o aço A 533B tem-se que:  $\sigma_o = 400$  MPa,  $E = 200$  GPa,  $s = 0,165^1$ . Assim,

$$U = 10441 \text{ kN/m}^2$$

Solução de DOWLING (1977): 10441 kN/m<sup>2</sup>

Solução do programa: 10578 kN/m<sup>2</sup>

Erro = 1,3%

<sup>1</sup> Para que a constante  $s$  seja igual a 0,165, a tensão e o módulo de elasticidade na expressão para  $U$  devem ser no sistema inglês (kpsi).

Exemplo 3: Análise linear-elástica para o cálculo de  $J$  de uma placa com trinca passante central. A resposta monotônica e cíclica são iguais se a tensão aplicada (ou a sua variação) são iguais a 34,5 MPa. As características geométricas são indicadas na Tabela 1 e as propriedades elásticas são  $E = 207$  GPa e  $\nu = 0.3$ .

As quantidades  $J$  (ou  $\Delta J$ ) são obtidas a partir de  $K$  (ou  $\Delta K$ ) usando a equação [ver Eq.(4) ou (8)]:

$$J_e = \frac{K^2(1-\nu^2)}{E} \quad \text{ou} \quad \Delta J_e = \frac{\Delta K^2(1-\nu^2)}{E}$$

De acordo com ANDERSON (1995), para a configuração em estudo tem-se:  $K = 1,02\sigma\sqrt{\pi a}$  (ou  $\Delta K = 1,02\Delta\sigma\sqrt{\pi a}$ ). Substituindo-se os respectivos valores obtém-se:

$$J_e = \Delta J_e = 0,434 \text{ kJ/m}^2$$

Solução de ANDERSON (1995): 0,434 kJ/m<sup>2</sup>

Solução do programa: 0,430 kJ/m<sup>2</sup>

Erro = 1%

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL SUGAIR, F.H. Explicit  $J$ -integral Expressions for Low-Cyclic Fatigue Modeling of Plane Stress Crack Problems. *Engng. Fracture Mech.*, v.43, n. 3, p.313-320, 1992.
- AINSWORTH, R.A. The Assessment of Defects in Structures of Strain Hardening Material. *Engng. Fracture Mech.*, v.19, p.633, 1982.
- ANDERSON, T.L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. 2 ed. Boca Raton, Fl.: CRC, 1995.
- ANSYS. *ANSYS Finite Element Code Users' Manual*. Revision 5.0. Houston, PA.: Swanson Analysis Systems, 1995.
- ASME Boiler and Pressure Vessel Code*. American Society of Mechanical Engineers, New York, N.Y., 1992.
- BANKS-SILLS, L.; Y. VOLPERT. Application of the Cyclic  $J$ -Integral to Fatigue Crack Propagation of Al 2024-T351. *Engng. Fracture Mech.*, v.40, p.355-370, 1991.
- BARSOUM, R.S. On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. *Int. J. for Num. Meth in Engineering*, v.10, p.25-37, 1976.
- CHOW, C.L.; T.J. LU. Cyclic  $J$ -Integral in Relation to Fatigue Crack Initiation and Propagation. *Engng. Fracture Mech.*, v.39, p.1-20, 1991.
- DE LORENZI, H.G. On the Energy Release Rate and the  $J$ -Integral for 3-D Crack Configuration. *Int. J. Fracture*, v.19, p.183-193, 1982.
- DE LORENZI, H.G. Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method. *Engng. Fracture Mech.*, v.21, p.129-143, 1985.
- DOWLING, N.E.; J.A. BEGLEY. Fatigue Crack Growth During Gross Plasticity and the  $J$ -Integral. *ASTM STP 590*, American Society for Testing and Materials, p.82-103, 1976.
- DOWLING, N.E. Geometric Effects and the  $J$ -integral Approach to Elastic-Plastic Fatigue Crack Growth. *ASTM STP 601*, American Society for Testing and Materials, p.19-32, 1976.
- DOWLING, N.E. Crack Growth During Low-Cycle Fatigue of Smooth Axial Specimens. *ASTM STP 637*, American Society for Testing and Materials, p.97-121, 1977.
- DUGDALE, D.S. Yielding in Steel Sheets Containing Slits. *J. of the Mech. Phys. of Solids*, v.8, p. 100-104, 1960.

- ELBER, W. Fatigue Crack Closure Under Cyclic Tension. *Engng. Fracture Mech.* v.2, p.37-45, 1971.
- EL HADDAD, M.H.; E B. MUKHERJEE. Elastic-Plastic Fracture Mechanics Analysis of Fatigue Crack Growth. *ASTM STP 803, American Society for Testing and Materials*, p.689-707, 1983.
- EPRI. *Ductile Fracture Handbook*. NP-6301-D Research Project, prepared by A. Zahoor for Novetech Corporation and Electric Power Research Institute, 1989.
- ESHELBY, J.D. The Force on an Elastic Singularity. *Phil. Trans. Royal Soc.* A244, p. 87-112, 1951.
- GERALD, C.F.; P.O. WHEATLEY. *Applied Numerical Analysis*. 4 ed. Addison Wesley, 1989.
- GRIFFITH, A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions*, Series A, v.221, p.163-198, 1920.
- HUTCHINSON, J.W. Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material. *J. of Mech. Phys. of Solids*, v.16, p.13-31, 1968.
- IRWIN, G.R. Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Transversing a Plate. *J. of App. Mech.*, v.24, p.361-364, 1957.
- JABLONSKI, D.A. An Experimental Study of the Validity of a Delta J Criterion for Fatigue Crack Growth. *ASTM STP 995, American Society for Testing and Materials*, v.1, p.361-387, 1989.
- KANNINEN M.F. ; C. H. POPELAR. *Advanced Fracture Mechanics*. New York, N.Y.: Oxford University, 1985.
- LAMBA, H.S. The *J*-Integral Applied to Cyclic Loading. *Engng. Fracture Mech.* v. 7, p.693-703, 1975.
- LIAW, P.K.; A. SAXENA; J.S. PERRIN. Life Extension Technology for Steam Piping System-II, Development of Life Prediction Methodology. *Engng. Fracture Mech.* v.45, p.787-798, 1993.
- MANESCHY, E.; W. J. O'DONNELL; T. P. O'DONNELL. *J*-integral for Cyclic Loading. ASME PRESSURE VESSELS AND PIPING CONFERENCE, July 26-30, 1998, San Diego, Calif., *Proceedings ...* 1998. PVP-V.374, p.277-287.
- MATTAR NETTO, M.; E. MANESCHY; A. H. PAES DE ANDRADE. Fracture Mechanics and Fatigue Evaluation of Nuclear Reactor Components. SMiRT 13 PRE-CONFERENCE SEMINAR, August 9-11, 1995, Rio de Janeiro RJ, Brazil. *Transactions ...*, 1995, p. 179-190.

MICROSOFT. *Microsoft FORTRAN PowerStation 4.0*. Microsoft Corporation, 1995.

MIURA N.; T. FUJIOKA; K. KASHIMA; K. MIYAZAKI; S. KANNO; M. ISHIWATA; N. GOTOH. Application of Cyclic  $J$ -Integral to Low Cycle Fatigue Crack Growth of Japanese Carbon Steel Pipe. LBB IN REACTOR PIPING AND VESSELS. October 9-11, 1995, Lyon, France, *Transactions ...*, 1995, p. 259-266.

MIURA N., K.; KASHIMA, K.; MIYAZAKI; S. KANNO. Evaluation of Crack Growth Behavior for Through-Wall-Cracked Pipe Subjected to Cyclic Loading with Large-Scale - Yielding - Consideration of Intermediate Stress Ratio. SMiRT 14, August 17-22, 1997, Lyon, France, *Transactions ...*, 1997. p. 143-150.

O'DONNELL, T.P; K.R.RAJAGOPAL. On Crack Closure and  $S-N$  Fatigue Life. ASME PRESSURE VESSELS AND PIPING CONFERENCE, June 19-23, 1994, Minneapolis Minn., *Proceedings ...*, 1994. PVP-V.286, p.69-80.

O'DONNELL, W.J.; J. POROWSKI; N. IRVINE; B. TOMKINS; D. JONES; T.P. O'DONNELL. Methods for Evaluating the Cyclic Life of Nuclear Components Including Reactor Water Environments Effects. ASME PRESSURE VESSELS AND PIPING CONFERENCE, [S.I], *Proceedings ...*, 1992. PVP-V.238, p.157-174.

O'DONNELL, W.J. Synthesis of  $S-N$  and  $da/dN$  Life Evaluation Technologies. ASME PRESSURE VESSELS AND PIPING CONFERENCE, June 19-23, 1988, Pittsburgh, Pa., *Proceedings ...*, 1988, No.88-PVP-V.10, pp.1-15.

PARIS, P.C.; F. ERDOGAN. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. *J. of Basic Engineering*, v.85, p.528-534, 1960.

PARKS, D.M. The Virtual Crack Extension Method for Nonlinear Material Behavior. *Computer Meth. in Appl. Mech. and Engineering*, v.12, pp.353-364, 1977.

RAMBERG, W.; W.R. OSGOOD. Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters. NACA TN 402, *National Advisory Committee for Aeronautics*, 1943.

RICE, J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *J. of App. Mech.*, v.35, p.379-386. 1968a.

RICE, J.R. Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture. *Treatise on Fracture*, v.2, Edited by H. Liebowitz, p.191-311, 1968b.

RICE, J.R.; G.F. ROSENGREN. Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material. *J. of Mech. Phys. of Solids*, v.16, p.1-12. 1968.

RITCHIE, R.O. Why Ductile Fracture Mechanics?. *J. of Engng. Mat. and Tech.*, v.105, p.1-7, 1983.

ROOKE, D.P.; D.J. CARTWRIGHT. Compendium of Stress Intensity Factors. *Her Majesty's Stationery Office*. London, 1976.

SOLECKI, J.S. *Fracture Mechanics*. Houston, Pa.: Swanson Analysis Systems, 1989.

SHIH C.F.; J.W. HUTCHINSON. Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems. *J. of Engng. Mat. and Tech.*, 98(4), p.289-295, 1976.

TADA, H. ; P.C. PARIS ; G. IRWIN. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Missouri, Mo.: Del Research Corporation, 1973.

TANAKA, K. The Cyclic  $J$ -Integral as a Criterion for Fatigue Crack Growth. *Int. J. Fracture*, v.22, p.91-104, 1983.

TANAKA, K.; T. HOSHIDE; M. NAKATA. Elastic-Plastic Crack Propagation Under High Cyclic Stresses. *ASTM STP 803, American Society for Testing and Materials*, p. II-708-II-722, 1983.

TANAKA, K.; Y. NAKAI. Propagation and Non-Propagation of Short Fatigue Cracks at Sharp Notch. *Fatigue of Engng. Mat. and Struct.*, v.6, p.316-327, 1983.

YAGAWA, G. Three-Dimensional Fully Plastic Solutions for Semi-Elliptical Surface Cracks. *Int. J. of Press. Vessel and Piping*, 53, p.457-510, 1993.