

V BR 800 3787



**CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO ÓTIMA DE COMBUSTÍVEL QUE MAXIMIZA  
A RETIRADA DE POTÊNCIA DE UM REATOR**

**Wilson Nunes dos Santos**

<b>DISSERTAÇÃO E TESE - IEA 142 IEA - DT - 142</b>	<b>AGOSTO/1979</b>
--	--------------------

## **CONSELHO DELIBERATIVO**

### **MEMBROS**

**Klaus Reinach – Presidente**

**Roberto D'Utra Vaz**

**Helcio Modesto da Costa**

**Ivano Humbert Marchesi**

**Admer Cervellini**

### **PARTICIPANTES**

**Regina Elisabete Azevedo Boretta**

**Fábio Gori**

## **SUPERINTENDENTE**

**Rômulo Ribeiro Pieroni**

**CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO ÓTIMA DE COMBUSTÍVEL QUE MAXIMIZA  
A RETIRADA DE POTÊNCIA DE UM REATOR**

**Wilson Nunes dos Santos**

**Dissertação para obtenção do Título de "Mestre em  
Ciências e Tecnologia Nucleares" – Orientador Profa.  
Dra. Wilma Sonia Hehl de Sylos Cintra. Apre-  
sentada e defendida em 17 de março de 1978,  
na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.**

**INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA  
SÃO PAULO – BRASIL**

**INIS Categories and Descriptors**

**E21**

← **Nuclear fuels**

**Power distribution**

**Optimal control**

✓ **Power density**

✓ **Neutron diffusion equation**

✓ **Perturbation theory**

✓ **Thermal reactors**

## SUMÁRIO

	Página
<b>1 – INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 – Considerações Gerais .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 – Revisão Histórica .....</b>	<b>2</b>
<b>1.3 – Objetivo .....</b>	<b>3</b>
<b>2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....</b>	<b>3</b>
<b>2.1 – A Equação de Difusão de Nêutrons .....</b>	<b>3</b>
<b>2.2 – A Otimização de um Sistema .....</b>	<b>6</b>
<b>3 – CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO ÓTIMA DE COMBUSTÍVEL .....</b>	<b>9</b>
<b>3.1 – Formulação e Modelagem do Problema .....</b>	<b>9</b>
<b>3.2 – Condições para se Obter a Maximização .....</b>	<b>14</b>
<b>3.3 – As Variáveis de Estado .....</b>	<b>17</b>
<b>3.4 – Condição de Criticalidade .....</b>	<b>19</b>
<b>3.5 – Equações Adjuntas .....</b>	<b>20</b>
<b>3.6 – Cálculo de Potência .....</b>	<b>23</b>
<b>3.7 – Cálculo da Massa Crítica .....</b>	<b>24</b>
<b>4 – RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>25</b>
<b>5 – COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES .....</b>	<b>31</b>
<b>APÊNDICE A – ZONA SINGULAR .....</b>	<b>35</b>
<b>APÊNDICE B – MÉTODO DE PERTURBAÇÃO .....</b>	<b>39</b>
<b>APÊNDICE C – SOLUÇÃO DO PROBLEMA EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA .....</b>	<b>42</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>50</b>

# CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO ÓTIMA DE COMBUSTÍVEL QUE MAXIMIZA A RETIRADA DE POTÊNCIA DE UM REATOR

Wilson Nunes dos Santos

## RESUMO

~~A concentração de combustível e a densidade de potência, por razões tecnológicas, são sempre limitadas em um reator. Neste trabalho, aplicando as técnicas de controle ótimo, obteve-se a distribuição ótima de combustível que maximiza a retirada de potência de um reator térmico, sujeito a vínculos do tipo acima citados. O reator foi descrito pelo modelo da teoria de difusão, em quatro grupos de energia, e geometria plana.~~

Foi elaborado um programa FORTRAN, que emprega um método de perturbação para a obtenção da solução numérica do problema, uma vez que é impraticável a obtenção de solução analítica.

Resultados numéricos foram obtidos para um reator térmico moderado a água leve, não refletido, no qual o combustível fissil usado é o U-235.

## 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1 - Considerações Gerais

A otimização de um sistema tem sido de grande interesse para a Engenharia nos últimos anos.

No campo de Engenharia Nuclear, a aplicação da teoria de controle é recente.

Devido a complexidade dos problemas de reatores, inicialmente foram usadas técnicas de cálculo clássico, programação dinâmica, programação linear e procura direta, na obtenção de suas soluções.

Na solução de um problema de controle, é de grande importância a escolha do Índice de Performance.

O Índice de performance é selecionado pelo projetista do sistema, e representa a grandeza que se quer otimizar, isto é, maximizar ou minimizar.

As variáveis do problema podem ser consideradas de dois tipos: variáveis de controle e variáveis de estado. As variáveis de controle são aquelas que podem ser manipuladas diretamente, isto é, são variáveis de decisão. Como exemplo de variáveis de controle, em reatores, pode-se citar entre outras, a escolha do enriquecimento do combustível, a configuração de carregamento, e o nível de veneno.

As variáveis de estado são aquelas que definem em cada instante o estado do sistema considerado. Exemplos de variáveis de estado incluem fluxo de nêutrons, temperatura do fluido

refrigerante e potência. Um exemplo de sistema de equações de estado é o sistema de equações diferenciais em teoria de difusão de nêutrons, no modelo de multigrupo. Neste sistema, as variáveis de estado são os fluxos e a variável de controle é a concentração de combustível.

Restrições físicas restringem a região permissível de variação das variáveis de controle, surgindo então vínculos. Por exemplo, no caso da equação de difusão, em multigrupo, o controle deve ser vinculado de modo a satisfazer a criticalidade do reator.

Além dos vínculos de igualdade, há os vínculos de desigualdade, que também restringem a região permissível do controle. Por exemplo, por razões tecnológicas deve-se restringir a densidade de potência de tal maneira que esta seja menor ou igual a algum valor especificado.

## 1.2 – Revisão Histórica

A pesquisa da massa crítica mínima, visando o menor custo possível do ciclo de combustível e que permita a máxima potência térmica, é sem dúvida alguma, um importante problema de otimização nos projetos de reatores nucleares. Problemas onde se procura a massa mínima de combustível foram o objetivo de vários trabalhos, entre eles os realizados por Goertzel<sup>(11)</sup>, Hofmann e Hurwitz Jr.<sup>(17)</sup>, Devooght<sup>(6)</sup>, Shapiro<sup>(33)</sup>, Otsuka<sup>(27)</sup> e Kochurov<sup>(21)</sup>.

O problema de reatividade induzida pelo Xe-135 nos reatores de potência levou a realização de alguns trabalhos, visando o controle dessa reatividade. Programação dinâmica e cálculo variacional foram os formalismos aplicados na obtenção da solução desses problemas, como pode ser constatado nos trabalhos realizados por Stacey Jr.<sup>(34,35)</sup> em 1968 e 1969.

Recentemente, foram publicados alguns trabalhos de otimização sobre ciclo de combustível e ajuste de parâmetros de reatores. Entre eles, podem ser citados os trabalhos realizados por Bouchay, Koen e Beightler<sup>(2)</sup>, Chitkara e Weisman<sup>(4)</sup>, Motoda, Herczeg e Sesonske<sup>(25)</sup>, e Kiguchi e Kawai<sup>(20)</sup>. Sakai e Silveira<sup>(31)</sup> estudaram a otimização de geradores de vapor.

Aplicando a teoria de controle ótimo, e bem relacionados com o trabalho a ser apresentado, vários estudos de grande importância foram feitos no campo da Engenharia Nuclear.

Em 1965, Roberts e Smith Jr.<sup>(30)</sup> otimizaram o desligamento de um reator através de um fluxo programado, minimizando o tempo necessário de aplicação desse fluxo, para evitar o problema da reatividade induzida pelo xenônio após o desligamento do reator.

Goldschmidt e Quenon<sup>(14)</sup>, em 1970, determinaram a distribuição de combustível físsil que minimiza a massa crítica de um reator rápido, conhecida a potência térmica total, mas sem fixar a dimensão do núcleo do reator, porém com vínculos na densidade de potência e no enriquecimento do combustível. O problema foi resolvido para um reator tipo placa, descrito pela teoria da difusão em um grupo de energia.

Em 1972 Goldschmidt<sup>(12)</sup> encontrou a distribuição ótima de enriquecimento de combustível que minimiza a massa crítica de um reator, com uma potência total fixa, dimensão não especificada e sujeita a vínculos na densidade de potência e no enriquecimento do combustível. O modelo da teoria da difusão em dois grupos de energia foi utilizado para descrever o reator, que foi também do tipo placa infinito. O estudo foi feito para o caso de reatores térmicos, rápidos e intermediários.

Novamente Goldschmidt<sup>(13)</sup>, em 1973, encontrou a distribuição ótima de enriquecimento de combustível que minimiza o custo do ciclo de combustível de um reator rápido, sujeito a vínculo no enriquecimento, potência e densidade de potência. O reator foi descrito pelo método da teoria da difusão em um grupo de energia e geometria plana.

Em 1974 El-Bassioni e Poncalet<sup>(17)</sup> encontraram os procedimentos práticos de controle que eliminam, em tempo mínimo, as oscilações especiais do fluxo induzidas pelo xenônio num reator de potência. Tais procedimentos podem ser iniciados em qualquer tempo durante a oscilação.

Neste trabalho, aplicando o Princípio de Máximo de Pontryagin<sup>(28)</sup> pretencio-se encontrar a distribuição ótima de combustível que maximiza a retirada de potência de um reator tipo placa, infinito, sem refletor, com uma meia espessura dada. Dois vínculos são impostos: a densidade de potência máxima permitida e o máximo valor permitido da concentração de combustível. Será usado o modelo de teoria de difusão em 4 grupos de energia de nêutrons.

### 1.3 – Objetivos

O carregamento inicial de combustível em um reator depende de decisões sobre a distribuição de material físsil no cerne, em função de considerações tecnológicas ou econômicas.

O objetivo geral deste estudo é aplicar técnicas de controle ótimo à decisões desse tipo.

Objetivos específicos incluem:

- 1) A obtenção da solução do problema de um reator crítico, para o qual o índice de performance é a potência e cujos vínculos são impostos na densidade de potência e na concentração de combustível.
- 2) Apresentar resultados mais realísticos obtidos com quatro grupos de energia de nêutrons, comparados com resultados obtidos com, somente dois grupos de energia<sup>(32)</sup>.

Nas referências encontradas, o problema proposto não foi tratado; e mesmo nos trabalhos mais relacionados com este estudo, somente um ou dois grupos de energia foram considerados.

## 2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, estão expostos, de maneira resumida, os fundamentos teóricos necessários para a solução do problema proposto. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências bibliográficas<sup>(1,5,8,9,10,23,24,26)</sup>, sendo básicas as referências<sup>(6,23)</sup>.

### 2.1 – A Equação de Difusão de Nêutrons

A equação de continuidade para nêutrons monoenergéticos, deduzida a partir da conservação do número de nêutrons num volume arbitrário é:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = S(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) - \text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (2.1.1)$$

onde

$n(\vec{r}, t)$  – função distribuição de densidade de nêutrons no ponto  $\vec{r}$ , no tempo  $t$ , dada em nêutrons por  $\text{cm}^3$ .



$S(\vec{r}, t)$  – função distribuição de fontes de nêutrons. Descreve a produção de nêutrons e é dada pelo número de nêutrons emitidos por  $\text{cm}^3$  por segundo no tempo  $t$ , por fontes localizadas no ponto  $\vec{r}$ .

$\Sigma_a(\vec{r})$  – secção de choque macroscópica de absorção. Representa a probabilidade de um nêutron ser absorvido pelo meio, por unidade de comprimento de deslocamento do nêutron. A variação espacial da secção de choque foi indicada para incluir o caso mais geral.

$\phi(\vec{r}, t)$  – fluxo de nêutrons no ponto  $\vec{r}$  e no tempo  $t$ ; é dado em número de nêutrons por  $\text{cm}^2$  por segundo.

$\Sigma_a(\vec{r})\phi(\vec{r}, t)dV$  – número de nêutrons absorvidos num elemento de volume  $dV$ , localizado num ponto  $\vec{r}$ , por segundo, no tempo  $t$ .

$\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t)dV$  – termo de fuga. É igual ao número de nêutrons que escapam do elemento de volume  $dV$  localizado no ponto  $\vec{r}$ , por segundo, no tempo  $t$ . O vetor  $\vec{J}$  é chamado vetor densidade de corrente de nêutrons, de tal modo que  $\vec{J} \cdot \vec{n}$  representa o escoamento líquido de nêutrons numa área unitária perpendicular a  $\vec{n}$ , por segundo.

Quando o fluxo, a corrente e as fontes são independentes do tempo, o sistema é dito estar em estado estacionário. Este é o caso de um reator crítico, e para o qual a equação (2.1.1) pode ser escrita na forma:

$$\text{div } \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}) - S(\vec{r}) = 0 \quad (2.1.2)$$

A equação acima é chamada de equação de continuidade no estado estacionário.

O fluxo de nêutrons e a corrente podem ser relacionados entre si, se algumas condições forem impostas. Esta relação entre  $\phi$  e  $\vec{J}$  é dada pela lei de Fick. Durante muitos anos ela foi usada para descrever fenômenos de difusão em líquidos e gases. A lei de Fick é dada por:

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D(\vec{r}) \text{ grad } \phi(\vec{r}) \quad (2.1.3)$$

onde  $D(\vec{r})$  é chamado coeficiente de difusão e representa a maior ou menor difusividade do nêutrons no meio.

A lei de Fick escrita é deduzida a partir das seguintes hipóteses:

- o meio é infinito;
- o meio é uniforme, de tal maneira que as secções de choque são constantes e independentes da posição;
- não há fontes de nêutrons no meio;
- o espalhamento é isotrópico no sistema de coordenadas de laboratório;
- o fluxo de nêutrons é uma função que varia muito pouco com a posição;
- o fluxo de nêutrons não é função do tempo.

Embora essas condições não sejam, rigorosamente, obedecidas num reator, mostra-se que a lei de Fick é válida a uma distância de 2 ou 3 livres caminhos médios de fontes, interfaces e contornos<sup>(23)</sup>.

Introduzindo a lei de Fick (equação 2.1.3) na equação da continuidade, (2.1.1), obtém-se:

$$\text{div } D \text{ grad } \phi - \Sigma_a \phi + S = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

onde por simplicidade todas as variáveis independentes foram omitidas.

O coeficiente de difusão depende, na prática, somente do moderador, e portanto pode ser considerado constante no meio. Como todos os nêutrons têm a mesma energia por hipótese, e portanto a mesma velocidade  $v$ , o fluxo é dado por:

$$\phi = nv$$

Então a equação (2.1.4) toma a forma:

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.1.5)$$

Esta equação é chamada equação de difusão.

Quando o fluxo é independente do tempo, tem-se a equação de difusão para o estado estacionário. Esta é dada por:

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \quad (2.1.6)$$

As equações até aqui apresentadas são válidas para nêutrons monoenergéticos. Entretanto, num reator os nêutrons de fissão nascem com energias que variam desde aproximadamente zero até energias da ordem de 15 Mev. Uma maneira de contornar este problema é utilizar o modelo de multigrupo.

Neste modelo o espectro de energia dos nêutrons é dividido em um número qualquer de grupos de energia. Dentro de cada grupo a difusão, o espelhamento, a absorção e outras interações são descritas em termos de secções de choque e coeficientes de difusão médios, e que são as chamadas constantes de grupo. As equações de difusão resultantes, para este modelo, tem a mesma forma matemática daquela obtida para nêutrons monoenergéticos.

Em cálculos de multigrupo, o espectro de fissão dos nêutrons é, então, dividido em N grupos de energia, não necessariamente do mesmo tamanho. Quanto maior for o número de grupos considerados, mais preciso será o cálculo de um reator. O sistema de equações diferenciais que descreve o comportamento dos nêutrons num reator em estado estacionário, no modelo de multigrupo, é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Div} [ D_g \text{ grad } \phi_g(\vec{r}) ] - \Sigma_{ag} \phi_g(\vec{r}) - \left[ \sum_{h>g}^N \Sigma(g \rightarrow h) \right] \phi_g(\vec{r}) + \\ \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma(h \rightarrow g) \phi_h(\vec{r}) + \chi_g \sum_{h=1}^N \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h(\vec{r}) = 0 \quad g = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

A corrente líquida de nêutrons é dada por:

$$J_g(\vec{r}) = -D_g \text{grad } \phi_g(\vec{r}) \quad (2.1.8)$$

Como os coeficientes de difusão podem ser considerados constantes, isto é, não dependem da posição, o sistema (2.1.7) pode ser escrito na forma:

$$D_g \nabla^2 \phi_g(\vec{r}) - \Sigma_{ag} \phi_g(\vec{r}) - \left[ \sum_{h>g}^N \Sigma(g \rightarrow h) \right] \phi_g(\vec{r}) + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma(h \rightarrow g) \phi_h(\vec{r}) + \chi_g \sum_{h=1}^N \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h(\vec{r}) = 0 \quad g = 1, 2, \dots, N \quad (2.1.9)$$

onde

$D$  – coeficiente de difusão

$\phi$  – fluxo de nêutrons

$\Sigma_g$  – secção de choque macroscópica de absorção

$\Sigma(g \rightarrow h)$  – secção de choque macroscópica de espalhamento do grupo  $g$  para o grupo  $h$

$\chi$  – fração de nêutrons de fissão que aparece no grupo

$\nu$  – número médio de nêutrons emitidos por fissão

$\Sigma_f$  – secção de choque macroscópica de fissão

O primeiro termo de uma equação  $g$  do sistema (2.1.7) representa a fuga de nêutrons do grupo  $g$ , do reator; o segundo termo representa a absorção no grupo  $g$ ; o terceiro termo dá o número de nêutrons espalhados do grupo  $g$  para todos os outros grupos de energia mais baixa; o quarto termo é igual ao número de nêutrons espalhados para o grupo  $g$ , provenientes de todos os outros grupos de energia mais alta; o último termo é igual ao número de nêutrons de fissão produzidos no  $g$ -ésimo grupo a partir de fissões induzidas em todos os outros grupos. Está implícito no sistema (2.1.7) que não existe espalhamento de nêutrons de grupos de energia mais baixa para grupos de energia mais alta, e nem fontes externas de nêutrons.

Estes são fundamentos teóricos básicos de física de reatores utilizados neste trabalho.

## 2.2 – A Otimização de um Sistema

Otimizar um sistema significa minimizar ou maximizar a função (índice de performance, IP, selecionada no problema. As condições necessárias para se obter a otimização, seja maximização ou minimização, são praticamente as mesmas, uma vez que minimizar um IP é um problema análogo a maximizar o mesmo IP com sinal contrário. Portanto nesse trabalho, apenas, o problema de maximização de uma determinada função IP é tratado.

De modo geral, seria maximizar

$$IP = g + \int_{x_i}^{x_f} f_0 dx \quad (2.2.1)$$

onde

$$g = g(x_i, y_1(x_i), \dots, y_n(x_i), x_f, y_1(x_f), \dots, y_n(x_f)) \quad (2.2.2)$$

é uma função expressa em termos dos estados inicial e final do sistema.

$$f_0 = f_0(y, u, x)$$

sendo  $x$  a variável independente,  $u$  a variável de controle e  $y$  a variável de estado do sistema. No caso geral,  $y$  e  $u$  são vetores.

A solução do problema está sujeita aos seguintes vínculos:

– dinâmicos –

$$\dot{y}_i = f_i(y, u, x) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.3)$$

– de contorno –

$$\psi_j = \psi_j(x_i, y(x_i), x_f, y(x_f)) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.2.4)$$

– de desigualdade na variável de controle –

$$c_k(y, u, x) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (2.2.5)$$

A Hamiltoniana do problema pode ser definida como:

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \sum_{k=1}^L \mu_k c_k \quad (2.2.6)$$

onde  $\lambda_i$  e  $\mu_k$ , ambos funções de  $x$ , são os multiplicadores de Lagrange.

Se  $u$  é um controle qualquer admissível, e  $u^*$  é o controle que maximiza o IP, então a condição de Weierstrass requer que:

$$H(x, y, u^*, \lambda) \geq H(x, y, u, \lambda) \quad (2.2.7)$$

Isto significa que o controle  $u$  deve ser determinado de modo a maximizar a Hamiltoniana em cada  $x$ , durante o processo, de modo a se obter a maximização do IP.

Os multiplicadores  $\lambda_i(x)$  satisfazem as equações

$$\lambda_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (2.2.8)$$

chamadas equações adjuntas, e os multiplicadores  $\mu_k(x)$  são tais que:

$$\begin{aligned} \mu_k &= 0 & \text{se} & \quad c_k < 0 \\ \mu_k &\neq 0 & \text{se} & \quad c_k = 0 \end{aligned}$$

A equação de controle é dada por:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (2.2.9)$$

Da definição da Hamiltoniana, equação (2.2.6) conclui-se também que:

$$\dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \quad (2.2.10)$$

Introduzindo  $m$  multiplicadores constantes indeterminados, pode-se formar a função  $G$ , dada por:

$$G = g + \sum_{j=1}^m p_j \psi_j \quad (2.2.11)$$

Utilizando esse procedimento, a condição de transversalidade fornece as seguintes equações de contorno:

$$\left[ H(x_f) + \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] dx_i = 0 \quad (2.2.12)$$

$$\left[ H(x_f) - \frac{\partial G}{\partial x_f} \right] dx_f = 0 \quad (2.2.13)$$

$$\left[ \lambda_j(x_f) - \frac{\partial G}{\partial y_j(x_f)} \right] dy_j(x_f) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.14)$$

$$\left[ \lambda_j(x_f) + \frac{\partial G}{\partial y_j(x_f)} \right] dy_j(x_f) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.15)$$

O controle ótimo  $u$  a ser determinado pode estar sobre as diversas fronteiras existentes  $c_k$ , ou fora delas, bem como pode entrar e sair de uma fronteira. Entretanto, deve haver continuidade da Hamiltoniana e dos multiplicadores de Lagrange nos pontos de entrada e saída de cada uma das fronteiras.

Quando o controle  $u$  não está sobre nenhuma fronteira  $c_k$ , costuma-se dizer, nesse caso, que existe solução singular ou zona singular, e é portanto necessário determinar o arco singular do controle.

Trajétórias singulares ótimas foram estudadas por Kelley<sup>(18)</sup>, Robbins<sup>(29)</sup>, Kopp e Moyer<sup>(22)</sup>. Estes autores generalizaram a condição de Legendre-Clebsch para que um arco singular seja ótimo. O Princípio de Máximo de Pontryagin requer

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

ao longo da trajetória ótima. Esta mesma condição, que também deve ser satisfeita na trajetória singular, fornece a seguinte sequência de condições:

$$\frac{\partial H}{\partial u} \equiv \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) \equiv \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) \equiv \dots \equiv \frac{d^M}{dx^M} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0 \quad (2.2.16)$$

Se a Hamiltoniana for linear no controle,

$$\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$$

é independente de  $u$ , e portanto, estabelece relações somente entre  $y$ ,  $\lambda$  e  $x$ . Utilizando-se as equações

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

•

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

as condições dadas em (2.2.16) podem ser reduzidas em relações similares entre aquelas variáveis. Se por um valor finito de  $M$  for encontrada uma relação que envolve  $u$  explicitamente, então existe trajetória singular. Caso contrário, não existe solução singular. Além disso, para ser ótima, a zona singular precisa satisfazer a seguinte condição:

$$(-1)^K \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^{2K} \frac{\partial H}{\partial u} \right] < 0 \quad K = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.17)$$

Se  $K$  é o menor valor para o qual a desigualdade (2.2.17) é verificada,  $2K$  é a ordem de singularidade da trajetória.

A desigualdade (2.2.17) é conhecida como Critério de Robbins.

Não havendo zona singular, o controle  $u$  está sempre sobre uma das fronteiras  $c_u$ .

## 3 – CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO ÓTIMA DE COMBUSTÍVEL

### 3.1 – Formulação e Modelagem do Problema

Usando teoria de difusão, em quatro grupos de energia de nêutrons, pretende-se encontrar a distribuição ótima de combustível que maximiza a retirada de potência de um reator térmico tipo placa, de meia espessura  $a$ , infinito e sem refletor. São impostos os seguintes vínculos:

$$q(x) < Q_{\max}$$

$$N(x) < N_{\max}$$

onde

$q(x)$  é a densidade de potência e  $Q_{\max}$  o seu máximo valor permitido.

$N(x)$  é a concentração de combustível, e  $N_{\max}$  o valor máximo permitido.

O grupo de nêutrons de energia mais baixa é considerado como grupo térmico.

Neste problema, as seguintes aproximações são feitas:

- todos os nêutrons que nascem de uma fissão são liberados dentro do grupo de mais alta energia. Assim,  $\chi_1 = 1$ ,  $\chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0$ .
- as fissões são induzidas, somente, por nêutrons do grupo térmico. Portanto,  $\Sigma_{f1} = \Sigma_{f2} = \Sigma_{f3} = 0$  e, somente,  $\Sigma_{f4} \neq 0$  que será representada, simplesmente, por  $\Sigma_f$ . Analogamente  $\nu_1 \Sigma_{f1} = \nu_2 \Sigma_{f2} = \nu_3 \Sigma_{f3} = 0$  e apenas  $\nu_4 \Sigma_{f4} \neq 0$ . Então  $\nu_4$  será chamado de  $\nu$ .
- somente ocorre absorção de nêutrons térmicos. Isto significa dizer que  $\Sigma_{a1} = \Sigma_{a2} = \Sigma_{a3} = 0$  e  $\Sigma_{a4} \neq 0$ . Esta, sendo a única seção de choque de absorção considerada será representada, simplesmente, por  $\Sigma_a$ .
- não há remoção de nêutrons do grupo térmico por espalhamentos elásticos e/ou inelásticos. Deste modo  $\Sigma_{R4} = 0$ , onde  $\Sigma_{R4}$  é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo térmico. A seção de choque de remoção do grupo  $g$  no sistema (21.7) pode ser definida como:

$$\Sigma_{Rg} = \sum_{h > g} \Sigma(g \rightarrow h)$$

Estas hipóteses, que tornam o problema matemático mais simples, não implicam em alterações significativas do problema físico, como pode ser visto no Capítulo 5.

Com as considerações feitas, o sistema (2.1.7), para quatro grupos de energia e geometria plana, pode ser escrito:

$$\frac{d}{dx} \left[ D_1 \frac{d}{dx} \phi_1(x) \right] - \Sigma_{R1} \phi_1(x) + \nu \Sigma_f \phi_4(x) = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ D_2 \frac{d}{dx} \phi_2(x) \right] - \Sigma_{R2} \phi_2(x) + \Sigma(1 \rightarrow 2) \phi_1(x) = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ D_3 \frac{d}{dx} \phi_3(x) \right] - \Sigma_{R3} \phi_3(x) + \Sigma(1 \rightarrow 3) \phi_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) \phi_2(x) = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ D_4 \frac{d}{dx} \phi_4(x) \right] - \Sigma_0 \phi_4(x) + \Sigma(1 \rightarrow 4) \phi_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) \phi_2(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) \phi_3(x) = 0 \quad (3.1.4)$$

A corrente de nêutrons para cada grupo é dada por:

$$J_1(x) = -D_1 \frac{d}{dx} \phi_1(x) \quad (3.1.5)$$

$$J_2(x) = -D_2 \frac{d}{dx} \phi_2(x) \quad (3.1.6)$$

$$J_3(x) = -D_3 \frac{d}{dx} \phi_3(x) \quad (3.1.7)$$

$$J_4(x) = -D_4 \frac{d}{dx} \phi_4(x) \quad (3.1.8)$$

Combinando as equações (3.1.1) a (3.1.4) com as equações (3.1.5) a (3.1.8) obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \phi_1(x) = -\frac{1}{D_1} J_1(x) \quad (3.1.9)$$

$$\frac{d}{dx} J_1(x) = -\Sigma_{R1} \phi_1(x) + \nu \Sigma_1 \phi_4(x) \quad (3.1.10)$$

$$\frac{d}{dx} \phi_2(x) = -\frac{1}{D_2} J_2(x) \quad (3.1.11)$$

$$\frac{d}{dx} J_2(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) \phi_1(x) - \Sigma_{R2} \phi_2(x) \quad (3.1.12)$$

$$\frac{d}{dx} \phi_3(x) = -\frac{1}{D_3} J_3(x) \quad (3.1.13)$$

$$\frac{d}{dx} J_3(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) \phi_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) \phi_2(x) - \Sigma_{R3} \phi_3(x) \quad (3.1.14)$$

$$\frac{d}{dx} \phi_4(x) = -\frac{1}{D_4} J_4(x) \quad (3.1.15)$$

$$\frac{d}{dx} J_4(x) = \Sigma(1 \rightarrow 4) \phi_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) \phi_2(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) \phi_3(x) - \Sigma_0 \phi_4(x) \quad (3.1.16)$$

Os fluxos e as correntes serão representados, genericamente, por  $y_j$ , onde:



$$y_j(x) = \phi_g(x) \quad \text{quando } j = 2g - 1, \quad g = 1,2,3,4.$$

$$y_j(x) = J_g(x) \quad \text{quando } j = 2g, \quad g = 1,2,3,4.$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

As seções de choque macroscópicas de fissão e absorção podem ser escritas em função da distribuição de combustível, na forma:

$$\Sigma_f(x) = N(x) \sigma_f \quad (3.1.17)$$

$$\Sigma_a(x) = \Sigma_a^M + \Sigma_a^F = \Sigma_a^M + N(x) \sigma_a^F \quad (3.1.18)$$

sendo  $\sigma_f$  a seção de choque microscópica de fissão,  $\Sigma_a^M$  a seção de choque macroscópica de absorção do moderador e  $\sigma_a^F$  a seção de choque microscópica de absorção do combustível; são todas constantes.

Combinando as equações (3.1.9) a (3.1.16) com as equações (3.1.17) e (3.1.18), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{y}_1(x) = -\frac{1}{D_1} y_2(x) \quad (3.1.19)$$

$$\dot{y}_2(x) = -\Sigma_{R1} y_1(x) + \nu \sigma_f N(x) y_7(x) \quad (3.1.20)$$

$$\dot{y}_3(x) = -\frac{1}{D_2} y_4(x) \quad (3.1.21)$$

$$\dot{y}_4(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) y_1(x) - \Sigma_{R2} y_3(x) \quad (3.1.22)$$

$$\dot{y}_5(x) = -\frac{1}{D_3} y_6(x) \quad (3.1.23)$$

$$\dot{y}_6(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) y_2(x) - \Sigma_{R3} y_5(x) \quad (3.1.24)$$

$$\dot{y}_7(x) = -\frac{1}{D_4} y_8(x) \quad (3.1.25)$$

$$y_8(x) = \Sigma(1 \rightarrow 4) y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) y_2(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) y_3(x) - \\ - [ \Sigma_a^M + N(x) \sigma_a^F ] y_7(x) \quad (3.1.26)$$

A potência do reator é dada por:

$$P_o = 2 \int_0^a q(x) dx = 2 \int_0^a k \Sigma_f y_7(x) dx = 2 \int_0^a k \sigma_f N(x) y_7(x) dx \quad (3.1.27)$$

onde  $\sigma_f$  é dada em  $\text{cm}^2$ ,  $N(x)$  em átomos por  $\text{cm}^3$ ,  $k$  é um fator de conversão de fissões por  $\text{cm}^3$  por segundo em watts por  $\text{cm}^3$ , e  $P_o$  é dado em watts por  $\text{cm}^2$ .

As condições de contorno do problema são:

– os fluxos se anulam na fronteira do reator, ou seja:

$$y_1(a) = y_3(a) = y_5(a) = y_7(a) = 0 \quad (3.1.28)$$

– as correntes são nulas no centro do reator. Portanto:

$$y_2(0) = y_4(0) = y_6(0) = y_8(0) = 0 \quad (3.1.29)$$

Devido a simetria do reator em relação a  $x=0$ , todos os resultados obtidos para a região  $0 \leq x \leq a$  também são válidos em pontos simétricos para a região  $-a \leq x \leq 0$ .

Em termos de controle ótimo, o problema é formulado da seguinte maneira:

Maximizar

$$IP = P = \int_0^a k \sigma_f N(x) y_7(x) dx \quad (3.1.30)$$

sujeito aos vínculos:

– dinâmicos:

$$\dot{y}_1(x) = -\frac{1}{D_1} y_2(x) \quad (3.1.31)$$

$$\dot{y}_2(x) = -\Sigma_{R1} y_1(x) + \nu \sigma_f N(x) y_7(x) \quad (3.1.32)$$

$$\dot{y}_3(x) = -\frac{1}{D_2} y_4(x) \quad (3.1.33)$$

$$\dot{y}_4(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) y_1(x) - \Sigma_{R2} y_3(x) \quad (3.1.34)$$

$$\dot{y}_5(x) = -\frac{1}{D_3} y_6(x) \quad (3.1.35)$$

$$\dot{y}_6(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) y_3(x) - \Sigma_{R3} y_5(x) \quad (3.1.36)$$

$$\dot{y}_7(x) = -\frac{1}{D_4} y_6(x) \quad (3.1.37)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_8(x) = & \Sigma(1 \rightarrow 4) y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) y_3(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) y_5(x) - \\ & - [\Sigma_g^M + N(x) \sigma_g^F] y_7(x) \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

– de contorno:

$$\psi_1 = y_1(a) = 0 \quad (3.1.39)$$

$$\psi_2 = y_2(0) = 0 \quad (3.1.40)$$

$$\psi_3 = y_3(a) = 0 \quad (3.1.41)$$

$$\psi_4 = y_4(0) = 0 \quad (3.1.42)$$

$$\psi_5 = y_5(a) = 0 \quad (3.1.43)$$

$$\psi_6 = y_6(0) = 0 \quad (3.1.44)$$

$$\psi_7 = y_7(a) = 0 \quad (3.1.45)$$

$$\psi_8 = y_8(0) = 0 \quad (3.1.46)$$

– de desigualdade na variável de controle  $N(x)$ :

$$c_1(y_7, N) = k\sigma_f N(x) y_7(x) - Q_{max} \leq 0 \quad (3.1.47)$$

$$c_2(N) = N(x) - N_{max} \leq 0 \quad (3.1.48)$$

### 3.2 – Condições para se Obter a Maximização

A Hamiltoniana definida no capítulo anterior, equação (2.2.6) é escrita para este problema:

$$H = k\sigma_f N(x) y_7(x) + \sum_{i=1}^8 \lambda_i(x) \dot{y}_i(x) + \sum_{k=1}^2 \mu_k(x) c_k(y, N, x) \quad (3.2.1)$$

Desenvolvendo-a, e combinando com as equações (3.1.31) e (3.1.38) obtém-se:

$$\begin{aligned}
H = & k\sigma_f N(x) \gamma_7(x) - \frac{1}{D_1} \lambda_1(x) \gamma_2(x) + \lambda_2(x) [ \nu\sigma_f N(x) \gamma_7(x) - \Sigma_{R1} \gamma_1(x) ] - \\
& - \frac{1}{D_2} \lambda_3(x) \gamma_4(x) + \lambda_4(x) [ \Sigma(1 \rightarrow 2) \gamma_1(x) - \Sigma_{R2} \gamma_3(x) ] - \frac{1}{D_3} \lambda_5(x) \gamma_6(x) + \\
& + \lambda_6(x) [ \Sigma(1 \rightarrow 3) \gamma_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) \gamma_3(x) - \Sigma_{R3} \gamma_5(x) ] - \frac{1}{D_4} \lambda_7(x) \gamma_8(x) + \\
& + \lambda_8(x) \{ \Sigma(1 \rightarrow 4) \gamma_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) \gamma_3(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) \gamma_5(x) - [ \Sigma_g^M + N(x)\sigma_g^F ] \gamma_7(x) \} + \\
& + \mu_1(x) [ k\sigma_f N(x) \gamma_7(x) - Q_{max} ] + \mu_2(x) [ N(x) - N_{max} ] \tag{3.2.2}
\end{aligned}$$

Os multiplicadores  $\mu_1(x)$  e  $\mu_2(x)$  são tais que:

$$\mu_1(x) = 0 \quad \text{se} \quad c_1 = k\sigma_f N(x) \gamma_7(x) - Q_{max} < 0$$

$$\mu_1(x) = 0 \quad \text{se} \quad c_1 = k\sigma_f N(x) \gamma_7(x) - Q_{max} = 0$$

$$\mu_2(x) = 0 \quad \text{se} \quad c_2 = N(x) - N_{max} < 0$$

$$\mu_2(x) \neq 0 \quad \text{se} \quad c_2 = N(x) - N_{max} = 0$$

A condição de Weierstrass, equação (2.2.7), exige que a Hamiltoniana assim definida seja máxima em cada  $x$  durante o processo, de modo a se obter a maximização do IP.

A solução ótima da distribuição de combustível,  $N(x)$ , está compreendida por duas fronteiras de acordo com:

$$\begin{aligned}
c_1 = 0 & \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq x_1 \\
c_2 = 0 & \quad \text{para} \quad x_1 \leq x \leq a \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
c_2 = 0 & \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq x_1 \\
c_1 = 0 & \quad \text{para} \quad x_1 \leq x \leq a \tag{3.2.4}
\end{aligned}$$

onde  $x_1$  é a interface dessas duas regiões  $c_1$  e  $c_2$ ; ou ainda pode-se ter:

$$\begin{aligned}
c_1 & < 0 \\
c_2 & < 0 \tag{3.2.5}
\end{aligned}$$

No Apêndice A é mostrado que a zona singular dada por (3.2.5) não existe. A sequência ótima das duas trajetórias é dada por (3.2.3), uma vez que,  $y_1(a) = y_3(a) = y_5(a) = y_7(a) = 0$  requereria um valor infinito para  $N(\cdot)$ , em  $x = a$ , para satisfazer (3.2.4), o que é impossível por razões físicas. Fisicamente, então, determina-se que há uma zona de densidade de potência constante, seguida por uma zona de distribuição uniforme de combustível.

Em princípio, poderia se pensar, também, na possibilidade da existência de regiões alternadas com  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ . Isto entretanto implicaria em descontinuidades na distribuição de combustível  $N(x)$ , o que acarretaria descontinuidade na Hamiltoniana,  $H$ . Como  $H$  deve ser contínua, conclui-se que existem, somente, essas duas regiões, e na sequência indicada.

A Hamiltoniana pode, então, ser escrita para cada uma das duas zonas:

Para  $0 \leq x \leq x_1$

$$\begin{aligned}
 H_1 = & k\sigma_f N(x) y_7(x) - \frac{1}{D_1} \lambda_1(x) y_2(x) + \lambda_2(x) [\nu\sigma_f N(x) y_7(x) - \Sigma_{R1} y_1(x)] - \\
 & - \frac{1}{D_2} \lambda_3(x) y_4(x) + \lambda_4(x) [\Sigma(1 \rightarrow 2) y_1(x) - \Sigma_{R2} y_3(x)] - \frac{1}{D_3} \lambda_5(x) y_6(x) + \\
 & + \lambda_6(x) [\Sigma(1 \rightarrow 3) y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) y_3(x) - \Sigma_{R3} y_5(x)] - \frac{1}{D_4} \lambda_7(x) y_8(x) + \\
 & + \lambda_8(x) \{ \Sigma(1 \rightarrow 4) y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) y_3(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) y_5(x) - [\Sigma_0^M + N(x)\sigma_0^F] y_7(x) \} + \\
 & + \mu_1(x) [k\sigma_f N(x) y_7(x) - Q_{max}] \tag{3.2.6}
 \end{aligned}$$

Para  $x_1 \leq x \leq a$

$$\begin{aligned}
 H_2 = & k\sigma_f N(x) y_7(x) - \frac{1}{D_1} \lambda_1(x) y_2(x) + \lambda_2(x) [\nu\sigma_f N(x) y_7(x) - \Sigma_{R1} y_1(x)] - \\
 & - \frac{1}{D_2} \lambda_3(x) y_4(x) + \lambda_4(x) [\Sigma(1 \rightarrow 2) y_1(x) - \Sigma_{R2} y_3(x)] - \frac{1}{D_3} \lambda_5(x) y_6(x) + \\
 & + \lambda_6(x) [\Sigma(1 \rightarrow 3) y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) y_3(x) - \Sigma_{R3} y_5(x)] - \frac{1}{D_4} \lambda_7(x) y_8(x) + \\
 & + \lambda_8(x) \{ \Sigma(1 \rightarrow 4) y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) y_3(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) y_5(x) - [\Sigma_0^M + N(x)\sigma_0^F] y_7(x) \} + \\
 & + \mu_2(x) [N(x) - N_{max}] \tag{3.2.7}
 \end{aligned}$$

Introduzindo, agora, a equação de controle, equação (2.2.9), obtém-se:

Para  $0 \leq x \leq x_1$

$$\frac{\partial H_1}{\partial N} = 0 = k\sigma_f \gamma_7(x) + \nu\sigma_f \lambda_2(x) \gamma_7(x) - \sigma_a^F \lambda_0(x) \gamma_7(x) + k\sigma_f \mu_1(x) \gamma_7(x) \quad (3.2.8)$$

e portanto:

$$\mu_1(x) = \frac{\sigma_a^F}{k\sigma_f} \lambda_0(x) - \frac{\nu}{k} \lambda_2(x) - 1 \quad (3.2.9)$$

Da equação (3.2.3) tira-se:

$$N(x) = \frac{Q_{max}}{k\sigma_f \gamma_7(x)} \quad (3.2.10)$$

Para  $x_1 < x < a$

$$\frac{\partial H_2}{\partial N} = 0 = k\sigma_f \gamma_7(x) + \nu\sigma_f \lambda_2(x) \gamma_7(x) - \sigma_a^F \lambda_0(x) \gamma_7(x) + \mu_2(x) \quad (3.2.11)$$

e portanto:

$$\mu_2(x) = \gamma_7(x) [ \sigma_a^F \lambda_0(x) - \nu\sigma_f \lambda_2(x) - k\sigma_f ] \quad (3.2.12)$$

A equação (3.2.3) fornece a relação:

$$N(x) = N_{max} \quad (3.2.13)$$

Ficam, assim, determinados os multiplicadores  $\mu_1(x)$  e  $\mu_2(x)$  e a distribuição de combustível  $N(x)$  para cada uma das zonas do reator.

### 3.3 – As Variáveis de Estado

Uma vez determinada a distribuição ótima de combustível, pode-se escrever o sistema de estado para cada uma das zonas do reator.

Para  $0 < x < x_1$

$$\dot{y}_{1c}(x) = -\frac{1}{D_1} y_{2c}(x) \quad (3.3.1)$$

$$\dot{y}_{2c}(x) = -\sum_{R1} y_{1c}(x) + \frac{\nu}{k} Q_{max} \quad (3.3.2)$$

$$\dot{y}_{3c}(x) = -\frac{1}{D_2} y_{4c}(x) \quad (3.3.3)$$

$$\dot{y}_{4c}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) y_{1c}(x) - \Sigma_{R2} y_{3c}(x) \quad (3.3.4)$$

$$\dot{y}_{5c}(x) = -\frac{1}{D_3} y_{6c}(x) \quad (3.3.5)$$

$$\dot{y}_{6c}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) y_{1c}(x) + X(2 \rightarrow 3) y_{3c}(x) - \Sigma_{R3} y_{5c}(x) \quad (3.3.6)$$

$$\dot{y}_{7c}(x) = -\frac{1}{D_4} y_{8c}(x) \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{8c}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 4) y_{1c}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) y_{3c}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) y_{5c}(x) - \\ - \Sigma_{\theta}^M y_{7c}(x) - \frac{Q_{\max} \sigma_{\theta}^F}{k \sigma_f} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Para  $x_1 < x < \theta$

$$\dot{y}_{1E}(x) = -\frac{1}{D_1} y_{2E}(x) \quad (3.3.9)$$

$$\dot{y}_{2E}(x) = -\Sigma_{R1} y_{1E}(x) + \nu \sigma_f N_{\max} y_{7E}(x) \quad (3.3.10)$$

$$\dot{y}_{3E}(x) = -\frac{1}{D_2} y_{4E}(x) \quad (3.3.11)$$

$$\dot{y}_{4E}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) y_{1E}(x) - \Sigma_{R2} y_{3E}(x) \quad (3.3.12)$$

$$\dot{y}_{5E}(x) = -\frac{1}{D_3} y_{6E}(x) \quad (3.3.13)$$

$$\dot{y}_{6E}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) y_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) y_{3E}(x) - \Sigma_{R3} y_{5E}(x) \quad (3.3.14)$$

$$\dot{y}_{7E}(x) = -\frac{1}{D_4} y_{8E}(x) \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{8E}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 4) y_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) y_{3E}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) y_{5E}(x) - \\ - [\Sigma_{\theta}^M + N_{\max} \sigma_{\theta}^F] y_{7E}(x) \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Os subscritos c e E indicam as zonas central e externa, respectivamente.

As condições de contorno para os dois sistemas de equações diferenciais são dadas pelas condições:

-- de aumento de fluxos e correntes, na fronteira e no centro do reator, respectivamente, ou seja:

$$\psi_j = y_j(a) = 0 \quad , \quad \text{para } j = 1,3,5,7 \quad (3.3.17)$$

$$\psi_j = y_j(0) = 0 \quad , \quad \text{para } j = 2,4,6,8 \quad (3.3.18)$$

-- de continuidade dos fluxos e das correntes na interface das duas zonas, ou seja:

$$y_{iC}(x_1) = y_{iE}(x_1) \quad i = 1,2,\dots,8 \quad (3.3.19)$$

Um método numérico será empregado para a obtenção da solução do problema, uma vez que a determinação de soluções analíticas para tais sistemas é quase impraticável devido ao grande número de equações diferenciais.

### 3.4 – Condição de Criticalidade

Como já foi estabelecido, anteriormente, a Hamiltoniana deve ser contínua ao longo da trajetória ótima. A mesma condição é imposta aos multiplicadores  $\lambda(x)$ . Portanto  $\lambda(x)$  e  $H(x, y, N, \lambda)$  devem ser contínuos em  $x = x_1$ . Pela condição de contorno (3.3.19), sabe-se que as variáveis de estado  $y(x)$  são contínuas na interface. Conclui-se, portanto, que para ser assegurada a continuidade da função Hamiltoniana, a distribuição de combustível,  $N(x)$ , deve ser contínua em  $x = x_1$ . Matematicamente, esta condição é escrita:

$$N_c(x_1) = N_E(x_1) \quad (3.4.1)$$

Pelas equações (3.2.10) e (3.2.13) tem-se que:

$$N_c(x) = \frac{Q_{max}}{k \sigma_1 \gamma_{7c}(x)} \quad (3.4.2)$$

e

$$N_E(x) = N_{max} \quad (3.4.3)$$

Combinando as equações (3.4.1), (3.4.2) e (3.4.3) conclui-se que:



$$N_{\max} = \frac{Q_{\max}}{k \sigma_f \gamma_{7c}(x_1)} \quad (3.4.4)$$

A equação (3.4.4) é a condição de criticalidade de um reator.

Os sistemas de equações diferenciais acoplados e a condição de criticalidade fornecem as condições necessárias para se determinar a posição da interface  $x_1$ , os fluxos e as correntes no reator.

### 3.5 – Equações Adjuntas

O sistema adjunto é dado por:

$$\dot{\lambda}_i(x) = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (3.5.1)$$

Para cada zona do reator tem-se:

Para  $0 \leq x < x_1$

$$\dot{\lambda}_{1c}(x) = \Sigma_{R1} \lambda_{2c}(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_{4c}(x) - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_{6c}(x) - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_{8c}(x) \quad (3.5.2)$$

$$\dot{\lambda}_{2c}(x) = \frac{1}{D_1} \lambda_{1c}(x) \quad (3.5.3)$$

$$\dot{\lambda}_{3c}(x) = \Sigma_{R2} \lambda_{4c}(x) - \Sigma(2 \rightarrow 3) \lambda_{6c}(x) - \Sigma(2 \rightarrow 4) \lambda_{8c}(x) \quad (3.5.4)$$

$$\dot{\lambda}_{4c}(x) = \frac{1}{D_2} \lambda_{3c}(x) \quad (3.5.5)$$

$$\dot{\lambda}_{5c}(x) = \Sigma_{R3} \lambda_{6c}(x) - \Sigma(3 \rightarrow 4) \lambda_{8c}(x) \quad (3.5.6)$$

$$\dot{\lambda}_{6c}(x) = \frac{1}{D_3} \lambda_{5c}(x) \quad (3.5.7)$$

$$\dot{\lambda}_{7c}(x) = \Sigma_{R4} \lambda_{8c}(x) \quad (3.5.8)$$

$$\dot{\lambda}_{8c}(x) = \frac{1}{D_4} \lambda_{7c}(x) \quad (3.5.9)$$

Para  $x_1 \leq x \leq a$

$$\dot{\lambda}_{1E}(x) = \sum_{R1} \lambda_{2E}(x) - \sum(1 \rightarrow 2) \lambda_{4E}(x) - \sum(1 \rightarrow 3) \lambda_{6E}(x) - \sum(1 \rightarrow 4) \lambda_{8E}(x) \quad (3.5.10)$$

$$\dot{\lambda}_{2E}(x) = \frac{1}{D_1} \lambda_{1E}(x) \quad (3.5.11)$$

$$\dot{\lambda}_{3E}(x) = \sum_{R2} \lambda_{4E}(x) - \sum(2 \rightarrow 3) \lambda_{6E}(x) - \sum(2 \rightarrow 4) \lambda_{8E}(x) \quad (3.5.12)$$

$$\dot{\lambda}_{4E}(x) = \frac{1}{D_2} \lambda_{3E}(x) \quad (3.5.13)$$

$$\dot{\lambda}_{5E}(x) = \sum_{R3} \lambda_{6E}(x) - \sum(3 \rightarrow 4) \lambda_{8E}(x) \quad (3.5.14)$$

$$\dot{\lambda}_{6E}(x) = \frac{1}{D_3} \lambda_{5E}(x) \quad (3.5.15)$$

$$\dot{\lambda}_{7E}(x) = -\nu \sigma_f N_{max} \lambda_{2E}(x) + [ \sum_a^M + N_{max} \sigma_a^F ] \lambda_{8E}(x) - k \sigma_f N_{max} \quad (3.5.16)$$

$$\dot{\lambda}_{8E}(x) = \frac{1}{D_4} \lambda_{7E}(x) \quad (3.5.17)$$

As condições de contorno para os dois sistemas de equações diferenciais acoplados são dadas pela condição de transversalidade e pela imposição da continuidade das equações adjuntas na interface,  $x = x_1$ .

A equação (2.2.11) é reescrita aqui:

$$G = g + \sum_{j=1}^m p_j \psi_j \quad (3.5.18)$$

Para este problema tem-se  $g = 0$ , e portanto:

$$G = p_1 y_1(a) + p_2 y_2(0) + p_3 y_3(a) + p_4 y_4(0) + p_5 y_5(a) + p_6 y_6(0) + \\ + p_7 y_7(a) + p_8 y_8(0) \quad (3.5.19)$$

A equação (2.2.14) é reescrita na forma:

$$\left[ \lambda_j(x_j) - \frac{\partial G}{\partial y_j}(x_j) \right] dy_j(x_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad (3.5.20)$$

sendo  $x_j = 0$

Então, tem-se:

– para  $j = 1, 3, 5, 7$

$$[\lambda_j(0) - 0] dy_j(0) = 0 \quad (3.5.21)$$

Como os fluxos  $y_j(0)$ , ( $j = 1, 3, 5, 7$ ), são livres, ou seja, não tem valor especificado,  $dy_j(0) \neq 0$ , concluindo-se, portanto, que as equações dadas por (3.5.21) são satisfeitas somente se:

$$\lambda_j(0) = 0 \quad j = 1, 3, 5, 7 \quad (3.5.22)$$

– para  $j = 2, 4, 6, 8$

$$[\lambda_j(0) - p_j] dy_j(0) = 0 \quad (3.5.23)$$

Como as correntes  $y_j(0) = 0$ , ( $j = 2, 4, 6, 8$ ), ou seja, são valores especificados,  $dy_j(0) = 0$ , e portanto, nada se conclui a respeito de  $\lambda_j(0)$ .

A equação (2.2.15) é reescrita na forma

$$\left[ \lambda_j(x_j) + \frac{\partial G}{\partial y_j}(x_j) \right] dy_j(x_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad (3.5.24)$$

sendo  $x_j = a$ .

Então, tem-se:

– para  $j = 1, 3, 5, 7$

$$[\lambda_j(a) + p_j] dy_j(a) = 0 \quad (3.5.25)$$

Como os fluxos  $y_j(a) = 0$ , ( $j = 1, 3, 5, 7$ ), ou seja, são valores especificados,  $dy_j(a) = 0$ , e portanto, nada se conclui a respeito de  $\lambda_j(a)$ .

– para  $j = 2, 4, 6, 8$

$$[\lambda_j(a) + 0] dy_j(a) = 0 \quad (3.5.26)$$

Como as correntes  $y_j(a)$ , ( $j = 2, 4, 6, 8$ ), são livres, ou seja, não tem valor especificado,  $dy_j(a) \neq 0$ , concluindo-se, portanto, que as equações dadas por (3.5.26) são satisfeitas somente se:

$$\lambda_j(a) = 0 \quad j = 2, 4, 6, 8 \quad (3.5.27)$$

Resumindo, tem-se dois sistemas de equações diferenciais acoplados, cada um com 8 equações. Portanto, são necessárias 16 condições de contorno. Estas são dadas por:

-- 8 condições de continuidade das equações adjuntas em  $x = x_1$ , ou seja:

$$\lambda_{iC}(x_1) = \lambda_{iE}(x_1) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (3.5.28)$$

-- 4 condições iniciais e 4 condições finais, dadas, respectivamente, pelas equações (3.5.22) e (3.5.27), ou seja:

$$\lambda_j(0) = 0 \quad , \quad \text{para } j = 1, 3, 5, 7 \quad (3.5.29)$$

e

$$\lambda_j(a) = 0 \quad , \quad \text{para } j = 2, 4, 6, 8 \quad (3.5.30)$$

O propósito da discussão acima é mostrar a existência das equações adjuntas para o problema considerado e indicar como as soluções dos sistemas podem ser obtidas. A existência das equações adjuntas deve ser demonstrada para mostrar que a solução completa do problema de controle foi obtida.

Assim como no caso dos sistemas de estado em cada zona, os sistemas adjuntos contêm, também, um número grande de equações diferenciais, que por conveniência, devem ser resolvidos numericamente.

Neste trabalho não são apresentadas as soluções dos sistemas adjuntos, uma vez que a solução do problema proposto é independente das equações adjuntas.

### 3.6 – Cálculo da Potência

Para um reator tipo placa, infinito, a potência é calculada por unidade de área. Esta, como já foi visto, é dada em watts/cm<sup>2</sup>, por:

$$P_o = 2 \int_0^a k\sigma_f N(x) \gamma_T(x) dx \quad (3.6.1)$$

Havendo duas zonas distintas no reator, a equação (3.6.1) toma a forma:

$$P_o = 2 \left\{ \int_0^{x_1} k\sigma_f N_C(x) \gamma_{TC}(x) dx + \int_{x_1}^a k\sigma_f N_E(x) \gamma_{TE}(x) dx \right\} \quad (3.6.2)$$

Combinando as equações (3.6.2), (3.4.2) e (3.4.3), e fazendo algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$P_o = 2 \left\{ Q_{max} \int_0^{x_1} dx + k\sigma_f N_{max} \int_{x_1}^a \gamma_{TE}(x) dx \right\}$$

e finalmente:

$$P_0 = 2 \{ Q_{\max} \cdot x_1 + k\sigma_f N_{\max} I_p \} \quad (3.6.3)$$

onde

$$I_p = \int_{x_1}^a \gamma_{7E}(x) dx$$

O valor de  $I_p$  é obtido através da integração numérica.

### 3.7 – Cálculo da Massa Crítica

Da mesma maneira que para o caso da potência, o cálculo da massa crítica é feito por unidade de área. É dada por:

$$M = 2 \int_0^a N(x) dx \quad (3.7.1)$$

onde  $M$  é a massa crítica em átomos de U-235 por  $cm^2$ .

Devido a existência das duas zonas no reator, a equação (3.7.1) é escrita na forma:

$$M = 2 \left\{ \int_0^{x_1} N_c(x) dx + \int_{x_1}^a N_E(x) dx \right\} \quad (3.7.2)$$

Substituindo as equações (3.4.2) e (3.4.3) na equação (3.7.2) obtém-se:

$$M = 2 \left\{ \int_0^{x_1} \frac{Q_{\max}}{k\sigma_f \gamma_{7c}(x)} dx + \int_{x_1}^a N_{\max} dx \right\} \quad (3.7.3)$$

Integrando a equação (3.7.3), chega-se à equação:

$$M = 2 \left\{ N_{\max}(a - x_1) + \frac{Q_{\max}}{k\sigma_f} I_{mc} \right\} \quad (3.7.4)$$

onde

$$I_{mc} = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\gamma_{7c}(x)}$$

O valor de  $I_{mc}$  é obtido por integração numérica.

Para se obter a massa crítica em gramas, que será chamada de  $M_c$ , basta aplicar a lei de Avogadro, resultando:

$$M_c = \frac{M(\text{U-235}) \times M}{N_A} \quad (3.7.5)$$

onde

$M(\text{U-235})$  é a massa atômica do U-235 e  $N_A$  é o número de Avogadro.

#### 4 – RESULTADOS NUMÉRICOS

Para ilustrar a técnica discutida, considerou-se um reator térmico moderado a água leve, de meia espessura igual a 30 cm. Como valores máximos permissíveis para a densidade de potência e concentração de combustível foram fixados respectivamente,  $Q_{\max} = 60 \text{ watts/cm}^3$  e  $N_{\max} = 4,4485 \times 10^{19} \text{ at/cm}^3$ .

As seções de choque e constantes de grupo para o reator considerado foram geradas pelo código de computação XSDRN<sup>(15)</sup>. O meio foi considerado infinito e tomado à temperatura ambiente de 294,6°K. Os coeficientes de difusão foram calculados através da expressão que leva em conta o espalhamento anisotrópico.

$$D = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}}$$

onde  $\Sigma_{tr}$  é a seção de choque macroscópica de transporte.

A Tabela IV.1 apresenta as energias de corte dos grupos, seções de choque e constantes de grupo para o reator considerado, e a Tabela IV.2 apresenta a matriz de espalhamento.

Os sistemas de equações diferenciais das variáveis de estado foram resolvidos numericamente pelo Método de Perturbação<sup>(3)</sup>. A posição da interface  $x_1$  foi localizada pela condição de criticalidade, equação (3.4.4). O esquema geral desse método é apresentado no Apêndice B. Foi obtida a solução numérica das variáveis de estado em intervalos de 0,1 cm e o menor erro por passo que se conseguiu fixar no programa foi de  $10^9$ . Para se chegar à condição de convergência exigida no programa foram necessárias 49 interações; o tempo de computação foi de 15 minutos de CPU.

Os cálculos foram feitos com dupla precisão no computador IBM/370 Modelo 155, do Instituto de Energia Atômica, São Paulo, sendo o programa escrito em linguagem FORTRAN IV-G.

A posição da interface  $x_1$  foi localizada em 16,40 cm.

As Tabelas IV.3 e IV.4 apresentam os fluxos e correntes calculados ponto a ponto.

É importante observar na Tabela IV.3, que o zero matemático, condição física de convergência dos fluxos na fronteira do reator ( $x = 30 \text{ cm}$ ) foi cruzado pelos quatro fluxos. Os fluxos  $y_3$  e  $y_7$  o fizeram entre 29,9 cm e 30 cm. Verificou-se, também, que os fluxos  $y_1$  e  $y_5$  cruzam o zero matemático entre 30 cm e 30,1 cm. O fluxo  $y_1$  passa de  $0,541362 \times 10^8$  em 30 cm para  $-0,426579 \times 10^{12}$  em 30,1 cm e o fluxo  $y_5$  passa de  $0,230885 \times 10^9$  em 30 cm para  $-0,233535 \times 10^{12}$  em 30,1 cm.

Tabela IV.1

Energias de Corte, Secções de Choque e Constantes de Grupo

grupo	1	2	3	4
Int. da Energia	15MeV – 87KeV	87KeV – 7KeV	7KeV – 1eV	1eV – ~ 0 eV
$\sigma_f(\text{cm}^2)$	0	0	0	$0,443493 \times 10^{-21}$
$\sigma_a^F(\text{cm}^2)$	0	0	0	$0,521371 \times 10^{-21}$
$\nu$	2,63531	2,44508	2,44200	2,44200
$\Sigma_a^M(\text{cm}^{-1})$	0	0	0	0,01759
D(cm)	1,46833	0,68664	0,55737	0,11435
$\Sigma_R(\text{cm}^{-1})$	0,08625	0,41710	0,15148	0

Tabela IV.2

Matriz de Espalhamento\*

Grupos	Para 1	Para 2	Para 3	Para 4
1	0	0,07928	0,00696	0,000001
2	0	0	0,41704	0,00006
3	0	0	0	0,15148
4	0	0	0	0

\*  $\Sigma(g \rightarrow h)$  – expressas em  $\text{cm}^{-1}$ .

Tabela IV.3

## Fluxos\*

x(cm)	$\gamma_1$ (Grupo 1)	$\gamma_3$ (Grupo 2)	$\gamma_5$ (Grupo 3)	$\gamma_7$ (Grupo 4)
0	$0,527570 \times 10^{14}$	$0,100225 \times 10^{14}$	$0,299724 \times 10^{14}$	$0,132038 \times 10^{15}$
2,00	$0,527258 \times 10^{14}$	$0,100159 \times 10^{14}$	$0,299477 \times 10^{14}$	$0,131738 \times 10^{15}$
4,00	$0,526250 \times 10^{14}$	$0,999469 \times 10^{13}$	$0,298680 \times 10^{14}$	$0,130782 \times 10^{15}$
6,00	$0,524302 \times 10^{14}$	$0,995372 \times 10^{13}$	$0,297149 \times 10^{14}$	$0,129005 \times 10^{15}$
8,00	$0,520950 \times 10^{14}$	$0,988321 \times 10^{13}$	$0,294538 \times 10^{14}$	$0,126125 \times 10^{15}$
10,00	$0,515388 \times 10^{14}$	$0,976639 \times 10^{13}$	$0,290278 \times 10^{14}$	$0,121759 \times 10^{15}$
12,00	$0,506286 \times 10^{14}$	$0,957582 \times 10^{13}$	$0,283511 \times 10^{14}$	$0,115495 \times 10^{15}$
14,00	$0,491461 \times 10^{14}$	$0,926846 \times 10^{13}$	$0,273042 \times 10^{14}$	$0,107103 \times 10^{15}$
16,00	$0,467363 \times 10^{14}$	$0,878313 \times 10^{13}$	$0,257473 \times 10^{14}$	$0,970533 \times 10^{14}$
16,40	$0,460975 \times 10^{14}$	$0,865879 \times 10^{13}$	$0,253635 \times 10^{14}$	$0,949911 \times 10^{14}$
---	---	---	---	---
16,40	$0,460975 \times 10^{14}$	$0,865879 \times 10^{13}$	$0,253635 \times 10^{14}$	$0,949911 \times 10^{14}$
18,00	$0,429324 \times 10^{14}$	$0,806116 \times 10^{13}$	$0,235681 \times 10^{14}$	$0,868749 \times 10^{14}$
20,00	$0,377997 \times 10^{14}$	$0,710038 \times 10^{13}$	$0,207459 \times 10^{14}$	$0,758875 \times 10^{14}$
22,00	$0,315851 \times 10^{14}$	$0,593467 \times 10^{13}$	$0,173405 \times 10^{14}$	$0,632682 \times 10^{14}$
24,00	$0,244885 \times 10^{14}$	$0,460178 \times 10^{13}$	$0,134477 \times 10^{14}$	$0,490239 \times 10^{14}$
26,00	$0,167125 \times 10^{14}$	$0,314066 \times 10^{13}$	$0,917877 \times 10^{13}$	$0,334525 \times 10^{14}$
28,00	$0,847355 \times 10^{13}$	$0,159238 \times 10^{13}$	$0,465413 \times 10^{13}$	$0,169606 \times 10^{14}$
28,50	$0,636806 \times 10^{13}$	$0,119669 \times 10^{13}$	$0,349774 \times 10^{13}$	$0,127461 \times 10^{14}$
29,00	$0,425153 \times 10^{13}$	$0,798918 \times 10^{12}$	$0,233527 \times 10^{13}$	$0,850944 \times 10^{13}$
29,50	$0,212764 \times 10^{13}$	$0,399752 \times 10^{12}$	$0,116876 \times 10^{13}$	$0,425797 \times 10^{13}$
29,60	$0,170230 \times 10^{13}$	$0,319812 \times 10^{12}$	$0,935145 \times 10^{12}$	$0,340654 \times 10^{13}$
29,70	$0,127684 \times 10^{13}$	$0,239849 \times 10^{12}$	$0,701472 \times 10^{12}$	$0,255488 \times 10^{13}$
29,80	$0,851293 \times 10^{12}$	$0,159868 \times 10^{12}$	$0,467751 \times 10^{12}$	$0,170302 \times 10^{13}$
29,90	$0,425688 \times 10^{12}$	$0,798764 \times 10^{11}$	$0,233998 \times 10^{12}$	$0,851050 \times 10^{12}$
30,00	$0,541362 \times 10^9$	$-0,121891 \times 10^9$	$0,230685 \times 10^9$	$-0,990556 \times 10^9$

\* Expressos em  $n/cm^2 \text{ seg.}$



Tabela IV.4

Correntes\*

x(cm)	$y_2$ (Grupo 1)	$y_4$ (Grupo 2)	$y_6$ (Grupo 3)	$y_8$ (Grupo 4)
0	0,0	0,0	0,0	0,0
2,00	$0,466011 \times 10^{11}$	$0,458525 \times 10^{10}$	$0,140005 \times 10^{11}$	$0,348659 \times 10^{11}$
4,00	$0,104368 \times 10^{12}$	$0,102684 \times 10^{11}$	$0,312523 \times 10^{11}$	$0,759916 \times 10^{11}$
6,00	$0,187140 \times 10^{12}$	$0,184084 \times 10^{11}$	$0,556650 \times 10^{11}$	$0,129910 \times 10^{12}$
8,00	$0,314750 \times 10^{12}$	$0,309423 \times 10^{11}$	$0,924864 \times 10^{11}$	$0,203119 \times 10^{12}$
10,00	$0,517773 \times 10^{12}$	$0,508112 \times 10^{11}$	$0,148887 \times 10^{12}$	$0,300231 \times 10^{12}$
12,00	$0,844853 \times 10^{12}$	$0,824801 \times 10^{11}$	$0,233910 \times 10^{12}$	$0,418752 \times 10^{12}$
14,00	$0,137435 \times 10^{13}$	$0,132133 \times 10^{12}$	$0,356277 \times 10^{12}$	$0,537306 \times 10^{12}$
16,00	$0,223315 \times 10^{13}$	$0,204993 \times 10^{12}$	$0,517125 \times 10^{12}$	$0,592483 \times 10^{12}$
16,40	$0,246067 \times 10^{13}$	$0,221987 \times 10^{12}$	$0,552714 \times 10^{12}$	$0,585137 \times 10^{12}$
---	---	---	---	---
16,40	$0,246067 \times 10^{13}$	$0,221987 \times 10^{12}$	$0,552714 \times 10^{12}$	$0,585137 \times 10^{12}$
18,00	$0,331736 \times 10^{13}$	$0,290454 \times 10^{12}$	$0,698315 \times 10^{12}$	$0,590477 \times 10^{12}$
20,00	$0,419071 \times 10^{13}$	$0,367175 \times 10^{12}$	$0,871677 \times 10^{12}$	$0,672548 \times 10^{12}$
22,00	$0,491044 \times 10^{13}$	$0,431089 \times 10^{12}$	$0,102186 \times 10^{13}$	$0,769958 \times 10^{12}$
24,00	$0,548516 \times 10^{13}$	$0,481904 \times 10^{12}$	$0,114270 \times 10^{13}$	$0,855897 \times 10^{12}$
26,00	$0,590617 \times 10^{13}$	$0,519005 \times 10^{12}$	$0,123108 \times 10^{13}$	$0,920767 \times 10^{12}$
28,00	$0,616336 \times 10^{13}$	$0,541645 \times 10^{12}$	$0,128494 \times 10^{13}$	$0,960765 \times 10^{12}$
28,50	$0,620116 \times 10^{13}$	$0,544976 \times 10^{12}$	$0,129284 \times 10^{13}$	$0,966664 \times 10^{12}$
29,00	$0,622820 \times 10^{13}$	$0,547365 \times 10^{12}$	$0,129849 \times 10^{13}$	$0,970894 \times 10^{12}$
29,50	$0,624444 \times 10^{13}$	$0,548809 \times 10^{12}$	$0,130186 \times 10^{13}$	$0,973447 \times 10^{12}$
29,60	$0,624638 \times 10^{13}$	$0,548984 \times 10^{12}$	$0,130226 \times 10^{13}$	$0,973756 \times 10^{12}$
29,70	$0,624790 \times 10^{13}$	$0,549122 \times 10^{12}$	$0,130257 \times 10^{13}$	$0,973999 \times 10^{12}$
29,80	$0,624898 \times 10^{13}$	$0,549222 \times 10^{12}$	$0,130279 \times 10^{13}$	$0,974174 \times 10^{12}$
29,90	$0,624962 \times 10^{13}$	$0,549284 \times 10^{12}$	$0,130292 \times 10^{13}$	$0,974282 \times 10^{12}$
30,00	$0,624983 \times 10^{13}$	$0,549308 \times 10^{12}$	$0,130296 \times 10^{13}$	$0,974323 \times 10^{12}$

\* Expressões em  $n/cm^2 \text{ seg}$ .

A distribuição ótima de combustível, calculada através das equações (3.2.10) e (3.2.13) é apresentada na Tabela IV.5 e é também mostrada pela Figura 4.1.

Tabela IV.5

## Distribuição Ótima de Combustível

x(cm)	N(x) (at/cm <sup>2</sup> x 10 <sup>20</sup> )
0	0,319776
1,00	0,319955
2,00	0,320504
3,00	0,321453
4,00	0,322847
5,00	0,324762
6,00	0,327294
7,00	0,330574
8,00	0,334768
9,00	0,340082
10,00	0,346772
11,00	0,355149
12,00	0,365579
13,00	0,378471
14,00	0,394224
15,00	0,413117
16,00	0,435045
16,40	0,444850
---	---
16,40	
a	0,444850
30,00	

As integrais  $I_p$  e  $I_{mc}$  foram calculadas com dupla precisão pela subrotina DOSF da SSP<sup>(18)</sup>. Esta subrotina integra uma função tabelada em pontos equidistantes. Nesta subrotina a regra de Simpson juntamente com a regra dos 3/8 de Newton, ou uma combinação dessas duas regras é usada<sup>(18)</sup>. O erro de truncamento local é da ordem de  $h^5$  em todos os casos com mais de 3 pontos, sendo  $h$  o passo de integração. A função a ser integrada deve ser contínua e diferenciável devendo existir as derivadas até terceira ou quarta ordem, dependendo da regra usada. Os valores finais obtidos para a potência e a massa crítica foram:

$$P_0 = 2,8665 \text{ Kwatts/cm}^2$$

$$M_0 = 0,92045 \text{ g/cm}^2.$$

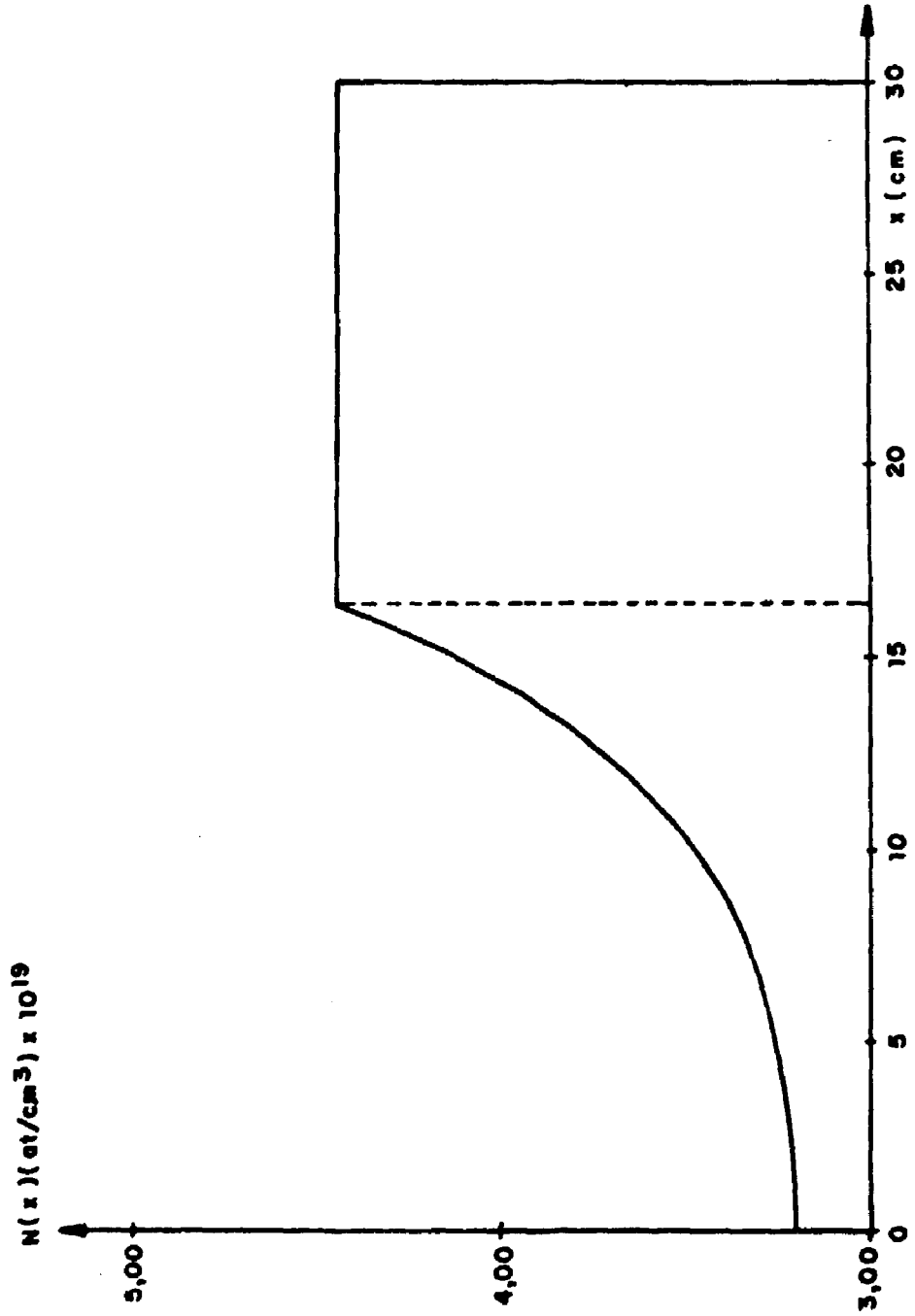


Figura 4.1 - Distribuição Especial de Combustível no Corno do Reator

## 5 – COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES

A distribuição ótima de combustível que maximiza a retirada de potência de um reator, sujeita aos vínculos impostos, foi encontrada aplicando-se os formalismos de controle ótimo à teoria de reatores.

Algumas simplificações de caráter físico foram feitas na formulação e modelagem do problema, visando simplificar as equações matemáticas resultantes da aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin. Essas hipóteses não invalidam o problema proposto, como se pode ver pela discussão abaixo.

A primeira delas, foi a de que todos os nêutrons de fissão são liberados dentro do grupo de mais alta energia, ou seja,  $\chi_1 = 1$  e  $\chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0$ . O código de computação XSDRN forneceu os dados que são apresentados nas Tabelas V.1 V.2, V.3 e V.4.

Tabela V.1

Valores Obtidos para  $\chi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

$\chi_1$	$\chi_2$	$\chi_3$	$\chi_4$
0,989593	0,010406	0,0	0,0

Conclui-se, portanto, que a hipótese feita é bastante razoável, uma vez que  $\chi_2$  é apenas 1,05% de  $\chi_1$  e  $\chi_3$  e  $\chi_4$  são, realmente, iguais a zero.

Na segunda simplificação feita considerou-se que, somente nêutrons do grupo térmico induzem fissões. A Tabela V.2 apresenta as secções de choque de fissão obtidas.

Tabela V.2

Secções de Choque Microscópicas de Fissão\*

$\sigma_{f1}$	$\sigma_{f2}$	$\sigma_{f3}$	$\sigma_{f4}$
1,26432	2,44491	24,8998	443,493

\* Expressas em barn ( $= 10^{-24} \text{ cm}^2$ )

Pela tabela acima pode-se observar que a probabilidade de fissão nos grupos rápidos é desprezível comparada com a probabilidade de fissão no grupo térmico.

A Tabela V.3 fornece as secções de choque de absorção dos grupos rápidos e térmico, para o U-235, Hidrogênio e Oxigênio.

Comparando-se os valores da Tabela V.3 observa-se que para o U-235 e Hidrogênio, as secções de choque de absorção dos grupos rápidos são desprezíveis comparadas com as do grupo térmico. Somente para o Oxigênio isto não é verdade. Entretanto, as secções de choque de absorção do Oxigênio são muito menores que as do U-235 e Hidrogênio. Conclui-se, portanto, que a terceira hipótese feita também é razoável.

Tabela V.3

Secções de Choque Microscópicas de Absorção\*

Grupo	Elemento		
	U-235	H	O
1	1,38901	0,0	$9,37849 \times 10^{-3}$
2	3,34558	$1,76122 \times 10^{-4}$	0,0
3	40,0882	$1,15795 \times 10^{-2}$	$1,76152 \times 10^{-6}$
4	521,371	0,263563	$1,41308 \times 10^{-4}$

\* Expressas em barn.

Finalmente, foi considerado que não há espalhamento de nêutrons do grupo térmico para os grupos de energias mais altas. A Tabela V.4 mostra as secções de choque de transferência do grupo térmico para os demais grupos, para o U-235, Hidrogênio e Oxigênio.

Tabela V.4

Secções de Choque Microscópicas de Transferência\*

Elemento	$\sigma(4 \rightarrow 1)$	$\sigma(4 \rightarrow 2)$	$\sigma(4 \rightarrow 3)$
U-235	0,0	0,0	$8,403 \times 10^{-8}$
H	0,0	0,0	$9,585 \times 10^{-5}$
O	0,0	0,0	$5,430 \times 10^{-5}$

\* Expressas em barn.

Conclui-se, portanto, que as secções de choque de transferência do grupo térmico são muito pequenas quando comparadas com as demais secções de choque envolvidas no problema, e portanto podem ser desprezadas. Fica, assim, demonstrado que a quarta, e última hipótese feita também é válida.

Os resultados obtidos, para a aplicação numérica proposta estão discutidos abaixo, e as conclusões finais foram tiradas.

As Tabelas IV.3 e IV.4 mostram os valores numéricos dos fluxos e correntes calculados através do método de perturbação. Como já foi dito, o erro por passo na integração foi menor ou igual a  $10^9$ . Observando-se a Tabela IV.3, pode-se notar que, próximo à fronteira  $x = a$ , os valores obtidos para os fluxos são da ordem de grandeza do erro cometido. Isto tornaria questionável a validade desses resultados. Entretanto, é de se esperar que o comportamento dos fluxos apresentados nessa tabela, seja o correto, uma vez que os fluxos devem ser achatados em quase todo o reator devido aos vínculos impostos, e próximo à fronteira devem cair rapidamente por causa da condição de contorno de anulamento dos fluxos na fronteira do reator.

Esses argumentos físicos são comprovados matematicamente, para o caso de dois grupos de energia, onde as soluções analíticas podem ser obtidas com relativa facilidade. O desenvolvimento teórico e os resultados para dois grupos são apresentados no Apêndice C.

O ideal seria obter soluções analíticas para os quatro grupos de energia considerados. Entretanto, devido ao grande número de equações de estado e equações adjuntas que aparecem, é praticamente inviável a obtenção dessas soluções. Daí a escolha de um método numérico.

Pode parecer desnecessário se ter resolvido o problema em dois grupos de energia, uma vez que, para quatro grupos a solução numérica foi obtida. Entretanto, a concordância entre os resultados numéricos obtidos através das soluções analíticas, e os resultados numéricos obtidos com o uso do método de perturbação, para dois grupos de energia, assegura dois fatos importantes:

- 1) O método de perturbação é adequado;
- 2) O comportamento dos fluxos próximo à fronteira  $x = a$ , (Tabela IV.3), onde os valores obtidos pelo método numérico é da ordem de grandeza do erro cometido, é comprovado analiticamente.

Neste ponto do trabalho, cabe um comentário importante.

Do ponto de vista da teoria de reatores, quanto maior o número de grupos de energia dos nêutrons, melhores são os resultados obtidos. Convém, entretanto, mencionar, que a teoria de um grupo já dá uma idéia, embora grosseira, do comportamento das funções que regem a população de nêutrons no reator. A escolha de quatro grupos de energia para este trabalho, deve-se ao fato de que esse número já fornece resultados bastante satisfatórios. Para justificar esta afirmação, pode-se dizer que alguns PWR (Pressurized Water Reactor) foram calculados com quatro grupos. Outro argumento é que existem códigos de computador para cálculo de reatores, internacionalmente utilizados, como por exemplo o Hammer, que consideram quatro grupos de energia.

A Tabela V.5 apresenta os resultados obtidos para a posição da interface, potência e massa crítica, com dois grupos de energia, e que podem ser comparados entre si.

**Tabela V.5**  
Interface, Potência e Massa Crítica

Nº de Grupos	2 grupos de energia de		4 grupos de energia de
	nêutrons		nêutrons
	Solução Analítica	Solução Numérica	Solução Numérica
$x_1$ (cm)	17,94	18,00	16,40
$P_0$ (Kw/cm <sup>2</sup> )	2,947	2,947	2,867
$M_c$ (g/cm <sup>2</sup> )	0,86	0,90	0,92

É importante notar que os objetivos propostos no início deste trabalho foram atingidos.

Como objetivo geral, mostrou-se mais uma vez, a viabilidade da aplicação da teoria de controle ótimo à teoria de reatores.

Como objetivos específicos, pode-se dizer que:

- 1) Obteve-se a solução do problema proposto, isto é, determinou-se a distribuição ótima de combustível que maximiza a retirada de potência de um reator, sujeita a vínculos na densidade de potência e na concentração de combustível.
- 2) Foram obtidos os resultados do problema com quatro grupos de energia de nêutrons, resultados estes, mais precisos do que aqueles que se obteve com, somente, dois grupos de energia<sup>(32)</sup>.

Um fato importante que deve ser, novamente citado, é que, em toda literatura consultada, os problemas de reatores onde controle ótimo foi aplicado, foram resolvidos com um número máximo de dois grupos de energia.

Finalmente, algumas sugestões são deixadas aqui para trabalhos futuros.

Uma delas seria considerar, ainda para um reator não refletido, uma geometria tridimensional finita. Neste caso estaria se resolvendo um problema mais realístico. Uma outra seria introduzir um refletor. Neste caso estaria se resolvendo um problema real, que poderia ser aplicado aos PWR, linha de reatores adotada pelo Brasil. Uma terceira sugestão seria limitar a um valor máximo permissível a soma dos fluxos num reator. Este é um problema de interesse, pois com a introdução e retirada das barras de controle, o fluxo rápido varia, podendo haver picos de fluxo e danificar os elementos combustíveis.

## APÊNDICE A – ZONA SINGULAR

Como já foi dito no Capítulo 2, haverá zona singular, somente se for possível obter o controle  $N(x)$  explicitamente, através das equações (2.2.16), e além disso, se for verificado o critério de Robbins, dado pela inequação (2.2.17). Estas expressões são reescritas abaixo:

$$\frac{\partial H}{\partial N} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = \dots = \frac{d^M}{dx^M} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] \neq 0 \quad (\text{A-1})$$

e

$$(-1)^K \frac{\partial}{\partial N} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^{2K} \frac{\partial H}{\partial N} \right] < 0 \quad (\text{A-2})$$

Lembrando-se que, se houver solução singular,  $\mu_1(x) = \mu_2(x) = 0$  nesta zona, então a equação (3.2.2) que define a Hamiltoniana geral do problema toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} H = & k\sigma_f(x) \gamma_7(x) - \frac{1}{D_1} \lambda_1(x) \gamma_2(x) + \lambda_2(x) [ \nu\sigma_f N(x) \gamma_7(x) - \Sigma_{R1} \gamma_1(x) ] - \\ & - \frac{1}{D_2} \lambda_3(x) \gamma_4(x) + \lambda_4(x) [ \Sigma(1 \rightarrow 2) \gamma_1(x) - \Sigma_{R2} \gamma_3(x) ] - \frac{1}{D_3} \lambda_5(x) \gamma_6(x) + \\ & + \lambda_6(x) [ \Sigma(1 \rightarrow 3) \gamma_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) \gamma_3(x) - \Sigma_{R3} \gamma_5(x) ] - \frac{1}{D_4} \lambda_7(x) \gamma_8(x) + \\ & + \lambda_8(x) [ \Sigma(1 \rightarrow 4) \gamma_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) \gamma_3(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) \gamma_5(x) - \\ & - [ \Sigma_s^M + N(x) \sigma_s^F ] \gamma_7(x) ] \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Então tem-se:

$$\frac{\partial H}{\partial N} = 0 = \gamma_7(x) [ k\sigma_f + \nu\sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_s^F \lambda_8(x) ] \quad (\text{A-4})$$

Sendo  $\gamma_7(x)$  o fluxo térmico, sabe-se que

$$\gamma_7(x) \neq 0. \quad (\text{A-5})$$

para qualquer  $x \neq s$ , e como a igualdade (A-4) deve ser verificada para todos os valores de  $x$ , conclui-se que

$$[ k\sigma_f + \nu\sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_s^F \lambda_8(x) ] = 0 \quad (\text{A-6})$$



$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \frac{d}{dx} \gamma_7(x) [k\sigma_f + \nu\sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_8^F \lambda_8(x)] + \\ + \gamma_7(x) \frac{d}{dx} [k\sigma_f + \nu\sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_8^F \lambda_8(x)]$$

Lembrando que  $\dot{\gamma}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}$  e  $\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , e levando em consideração a equação

(A-6), a equação acima toma a forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \gamma_7(x) \left[ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \lambda_1(x) - \frac{\sigma_8^F}{D_4} \lambda_7(x) \right] \quad (A-7)$$

Pela relação (A-5) conclui-se que

$$\left[ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \lambda_1(x) - \frac{\sigma_8^F}{D_4} \lambda_7(x) \right] = 0 \quad (A-8)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \frac{d}{dx} \gamma_7(x) \left[ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \lambda_1(x) - \frac{\sigma_8^F}{D_4} \lambda_7(x) \right] + \\ + \gamma_7(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \lambda_1(x) - \frac{\sigma_8^F}{D_4} \lambda_7(x) \right]$$

Considerando a igualdade (A-8) e efetuando as derivadas, a equação acima é escrita na seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \gamma_7(x) \left\{ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f [ \Sigma_{R1} \lambda_2(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_4(x) - \right. \\ \left. - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_6(x) - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_8(x) ] - \frac{\sigma_8^F}{D_4} [ -k\sigma_f N(x) - \nu\sigma_f \lambda_2(x) N(x) + \right. \\ \left. + \sigma_8^F \lambda_8(x) N(x) ] \right\} = \gamma_7(x) \left\{ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f [ \Sigma_{R1} \lambda_2(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_4(x) - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_6(x) - \right. \\ \left. - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_8(x) ] + \frac{\sigma_8^F}{D_4} N(x) [ k\sigma_f + \nu\sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_8^F \lambda_8(x) ] \right\} \quad (A-9)$$

Combinando-se as equações (A-9) e (A-8) obtém-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \gamma_7(x) \left\{ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \left[ \Sigma_{R1} \lambda_2(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_4(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_6(x) - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_8(x) \right] \right\} \quad (A-10)$$

Quando se combina a relação (A-5) com a equação (A-10), conclui-se que.

$$\frac{\nu}{D_1} \sigma_f \left[ \Sigma_{R1} \lambda_2(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_4(x) - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_6(x) - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_8(x) \right] = 0 \quad (A-11)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \frac{d}{dx} \gamma_7(x) \left\{ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \left[ \Sigma_{R1} \lambda_2(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_4(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_6(x) - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_8(x) \right] \right\} + \gamma_7(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \left[ \Sigma_{R1} \lambda_2(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_4(x) - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_6(x) - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_8(x) \right] \right\}$$

Considerando a igualdade (A-11) e efetuando as derivadas, a equação acima é escrita na forma:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \gamma_7(x) \left\{ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \left[ \frac{\Sigma_{R1}}{D_1} \lambda_1(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 2)}{D_2} \lambda_3(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 3)}{D_3} \lambda_5(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 4)}{D_4} \lambda_7(x) \right] \right\} \quad (A-12)$$

Pela relação (A-5) conclui-se que:

$$\frac{\nu}{D_1} \sigma_f \left[ \frac{\Sigma_{R1}}{D_1} \lambda_1(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 2)}{D_2} \lambda_3(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 3)}{D_3} \lambda_5(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 4)}{D_4} \lambda_7(x) \right] = 0 \quad (A-13)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \frac{d}{dx} \gamma_7(x) \left\{ \frac{\Sigma_{R1}}{D_1} \lambda_1(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 2)}{D_2} \lambda_3(x) - \right. \\ \left. - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 3)}{D_3} \lambda_5(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 4)}{D_4} \lambda_7(x) \right\} + \gamma_7(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \left[ \frac{\Sigma_{R1}}{D_1} \lambda_1(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 2)}{D_2} \lambda_3(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 3)}{D_3} \lambda_5(x) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 4)}{D_4} \lambda_7(x) \right] \right\}$$

Considerando a igualdade (A-13) e efetuando as derivadas obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4}{dx^4} \left[ \frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \nu_T(x) \left\{ \frac{\nu}{D_1} \sigma_f \left[ \frac{\Sigma_{R1}}{D_1} (\Sigma_{R1} \lambda_2(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_4(x) - \right. \right. \\
 - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_6(x) - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_8(x)) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 2)}{D_2} (\Sigma_{R2} \lambda_4(x) - \Sigma(2 \rightarrow 3) \lambda_6(x) - \\
 - \Sigma(2 \rightarrow 4) \lambda_8(x)) - \frac{\Sigma(1 \rightarrow 3)}{D_3} (\Sigma_{R3} \lambda_6(x) - \Sigma(3 \rightarrow 4) \lambda_8(x)) + \\
 \left. \left. + \frac{\Sigma(1 \rightarrow 4)}{D_4} N(x) (k \sigma_f + \nu \sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_0^F \lambda_8(x)) \right] \right\} \quad (A-14)
 \end{aligned}$$

Analogamente ao que aconteceu na equação (A-9), o termo que contém  $N(x)$  explicitamente na equação (A-14) é multiplicado por um termo nulo, conforme mostra a equação (A-8).

Assim, sucessivamente, pode-se verificar aplicando a condição dada por (A-1), que não é possível encontrar nenhuma equação na qual o controle  $N(x)$  apareça explicitamente, o que mostra, portanto, que não existe zona singular.

## APÊNDICE B – MÉTODO DE PERTURBAÇÃO

O método de perturbação é um dos métodos numéricos usados para se resolver um sistema de  $n$  equações diferenciais quando se conhece  $m$  condições iniciais e  $(n - m)$  condições finais do sistema. Essa situação é bastante comum no tratamento de problemas de controle.

No trabalho que foi apresentado, aparecem dois sistemas de equações diferenciais acoplados, com 8 equações cada um. Tem-se 4 condições iniciais.

$$y_{2c}(0) = y_{4c}(0) = y_{6c}(0) = y_{8c}(0) = 0 \quad ,$$

4 condições finais

$$y_{1E}(a) = y_{3E}(a) = y_{5E}(a) = y_{7E}(a) = 0 \quad ,$$

e 8 condições de continuidade na interface localizada numa posição  $x = x_1$ , cujo valor não é conhecido. Por essa razão mais uma equação torna-se necessária. Entretanto a equação (3.4.4) resolvida simultaneamente com os sistemas acoplados permite determinar o valor desconhecido,  $x_1$ , da posição da interface.

A integração numérica foi feita com a subrotina DRKGS, da SSP em dupla precisão. Foram necessárias algumas modificações que a adaptaram ao problema que foi resolvido. O método utilizado pela DRKGS é o método de Runge-Kutta de quarta ordem. O erro por passo é controlável, e a integração foi feita com um erro menor ou igual a  $10^9$ .

Inicia-se o processo integrando o sistema

$$\dot{y}_c(x) = f(y, N)$$

desde  $x=0$  até o valor de  $x$  tal que o fluxo térmico,  $y_{7c}(x)$ , satisfaça a condição de criticalidade, equação (3.4.4), com uma determinada precisão pré-estabelecida. Isto corresponde à localização da posição da interface. Localizada a interface, os valores finais da integração em  $x = x_1$  são tomados como valores iniciais para a integração até  $x = a$ , do sistema dado por

$$\dot{y}_E(x) = g(y, N)$$

Como era de se esperar, devido aos vínculos impostos, a variação dos fluxos em quase todo o reator é muito pequena. Todavia, a ausência de refletor faz com que próximo ao contorno  $x = a$ , os fluxos caiam abruptamente devido a condição de contorno de anulamento dos fluxos na fronteira do cerne do reator.

O critério de convergência foi tomado como sendo:

$$y_{1E}(a) = y_{3E}(a) = y_{5E}(a) = y_{7E}(a) \leq 10^9$$

Será apresentado a seguir o algoritmo do método citado.

1º Passo -- Atribui-se valores iniciais arbitrários para  $y_{1c}(0)$ ,  $y_{3c}(0)$ ,  $y_{5c}(0)$  e  $y_{7c}(0)$ . Com esses valores e mais as 4 condições iniciais conhecidas, é feita a integração de  $x=0$  até  $x=a$ . Obtém-se assim a trajetória nominal que fornece em  $x=a$  os valores  $y_{1F0}$ ,  $y_{2F0}$ , ...,  $y_{8F0}$ .

2º Passo -- A seguir é determinada a matriz de transição  $\theta[0,a]$ . Esta pode ser obtida de duas maneiras:

1ª) diferenciação numérica direta

2ª) determinação de soluções unitárias para as equações de perturbação linear.

O primeiro método foi escolhido neste caso. Uma pequena perturbação  $\Delta_1$  é dada em  $y_{1c}(0)$ , ou seja, como o valor  $y_{1c}(0) + \Delta_1$  e os demais valores  $y_{3c}(0)$ ,  $y_{5c}(0)$ ,  $y_{7c}(0)$  inicialmente atribuídos, repete-se o primeiro passo, obtendo-se  $y_{1F1}$ ,  $y_{2F1}$ , ...,  $y_{8F1}$ . Repetindo-se esse procedimento para  $y_{3c}(0)$ ,  $y_{5c}(0)$  e  $y_{7c}(0)$ , onde são provocadas perturbações  $\Delta_3$ ,  $\Delta_5$  e  $\Delta_7$ , respectivamente, são obtidos os elementos da matriz  $\theta[0,a]$ .

$$\theta[0,a] = \begin{bmatrix} \frac{y_{1F1} - y_{1F0}}{\Delta_1} & \frac{y_{1F2} - y_{1F0}}{\Delta_3} & \frac{y_{1F3} - y_{1F0}}{\Delta_5} & \frac{y_{1F4} - y_{1F0}}{\Delta_7} \\ \frac{y_{3F1} - y_{3F0}}{\Delta_1} & \frac{y_{3F2} - y_{3F0}}{\Delta_3} & \frac{y_{3F3} - y_{3F0}}{\Delta_5} & \frac{y_{3F4} - y_{3F0}}{\Delta_7} \\ \frac{y_{5F1} - y_{5F0}}{\Delta_1} & \frac{y_{5F2} - y_{5F0}}{\Delta_3} & \frac{y_{5F3} - y_{5F0}}{\Delta_5} & \frac{y_{5F4} - y_{5F0}}{\Delta_7} \\ \frac{y_{7F1} - y_{7F0}}{\Delta_1} & \frac{y_{7F2} - y_{7F0}}{\Delta_3} & \frac{y_{7F3} - y_{7F0}}{\Delta_5} & \frac{y_{7F4} - y_{7F0}}{\Delta_7} \end{bmatrix} \quad (B-1)$$

3º Passo -- Em seguida é montado o sistema

$$\theta[0,a] \times \delta y(0) = \delta y(a) \quad (B-2)$$

que deve ser resolvido para  $\delta y(0)$ , onde:

$\theta[0,a]$  é dada por (B-1)

$$[\delta y(a)]^T = [\delta y_1(a) \delta y_3(a) \delta y_5(a) \delta y_7(a)] \quad (B-3)$$

$$[\delta y(0)]^T = [\delta y_1(0) \delta y_3(0) \delta y_5(0) \delta y_7(0)] \quad (B-4)$$

O vetor  $\delta y(a)$  é escolhido de tal maneira que traga a próxima solução mais perto dos valores desejados para  $y(a)$ . Por exemplo, pode-se escolher:

$$\delta y(a) = -\epsilon [ v_{c_0}(a) - y(a) ] \quad (B-5)$$

onde

$$[ y_{F0}(a) ]^T = [ y_{1F0} \ y_{3F0} \ y_{5F0} \ y_{7F0} ] \quad (B-6)$$

$$[ y(a) ]^T = [ y_{1E}(a) \ y_{3E}(a) \ y_{5E}(a) \ y_{7E}(a) ] \quad (B-7)$$

ou seja, o vetor  $y(a)$  é formado pelas condições de contorno finais, e no problema resolvido é dado por:

$$[ y(a) ]^T = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]$$

O número  $\epsilon$  é um fator de convergência, que pertence ao intervalo  $0 < \epsilon \leq 1$ . Durante a execução do programa, pode-se trabalhar com  $\epsilon$  fixo, ou fazê-lo variar dentro do intervalo citado. Neste trabalho,  $\epsilon$  foi mantido fixo e igual a 0,5.

4º Passo – Tendo sido encontrado o vetor  $\delta y(0)$ , os novos valores iniciais a serem atribuídos são dados por:

$$y_{1c}(0) = y_{1c}(0)_{\text{anterior}} + \delta y_1(0)$$

$$y_{3c}(0) = y_{3c}(0)_{\text{anterior}} + \delta y_3(0)$$

$$y_{5c}(0) = y_{5c}(0)_{\text{anterior}} + \delta y_5(0)$$

$$y_{7c}(0) = y_{7c}(0)_{\text{anterior}} + \delta y_7(0)$$

Repete-se, então, o procedimento do primeiro ao quarto passo, até ser obtida a convergência desejada.

## APÊNDICE C – SOLUÇÃO DO PROBLEMA EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA

O objetivo deste apêndice é testar se o método numérico escolhido, isto é, o Método de Perturbação descrito no apêndice B, é o método adequado para a resolução do problema.

Este teste pode ser feito através da comparação entre os resultados numéricos obtidos por soluções analíticas e os resultados numéricos obtidos pelo método de perturbação.

O que justifica este teste é a possível incerteza no comportamento dos fluxos nas proximidades da fronteira do reator, onde seus valores são da ordem de grandeza do erro cometido.

Para dois grupos de energia este teste pode ser feito sem grandes dificuldades matemáticas, pois nesse caso, o número de equações diferenciais que aparece é suficientemente pequeno, para que se possa obter as soluções analíticas. Entretanto, as conclusões que se tira usando dois grupos de energia são válidas qualquer que seja o número de grupos em que o espectro de energia de nêutrons é dividido. A única diferença, é que quanto maior o número de grupos tomado mais precisos são os resultados obtidos.

Este apêndice contém, portanto, os resultados numéricos que se quer comparar e as conclusões a que se chega. Contém, também, uma apresentação resumida do desenvolvimento do problema e o procedimento para se determinar analiticamente, a distribuição de combustível, as equações de fluxo e correntes, e a posição  $x_1$  da interface.

As hipóteses físicas e o desenvolvimento matemático para a formulação e modelagem do problema são análogos aos feitos no capítulo 3.

O sistema de estado que se obtém, equivalente ao sistema de equações (3.1.19) e (3.1.26), é dado por:

$$\dot{y}_1(x) = -\frac{1}{D_1} y_2(x) \quad (C-1)$$

$$\dot{y}_2(x) = -\Sigma_R y_1(x) + \nu \sigma_f N(x) y_2(x) \quad (C-2)$$

$$\dot{y}_3(x) = -\frac{1}{D_2} y_4(x) \quad (C-3)$$

$$\dot{y}_4(x) = \Sigma_R y_1(x) - [\Sigma_a^M + N(x) \sigma_a^F] y_3(x) \quad (C-4)$$

As condições de contorno são:

- os fluxos se anulam na fronteira do reator, isto é:

$$y_1(a) = y_3(a) = 0 \quad (C-5)$$

- as correntes são nulas no centro do reator, isto é:

$$y_2(0) = y_4(0) = 0 \quad (C-6)$$

A potência  $P_o$ , que se deseja maximizar, pode ser escrita:

$$P_o = 2 \int_0^a q(x) dx \text{ watts/cm}^2 \quad (C-7)$$

onde

$$q(x) = k\sigma_f N(x) y_3(x) \text{ watts/cm}^3 \quad (C-8)$$

sendo  $q(x)$  a densidade de potência.

Os vínculos impostos são:

– Dinâmicos:

As variáveis de estado  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), devem satisfazer (C-1) a (C-4).

– De contorno:

As variáveis de estado  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), devem satisfazer (C-5) e (C-6).

– De desigualdade na variável de controle  $N(x)$ :

$$c_1(y_3, N) = k\sigma_f N(x) y_3(x) - Q_{max} \leq 0 \quad (C-9)$$

$$c_2(N) = N(x) - N_{max} \leq 0 \quad (C-10)$$

O princípio de Máximo de Pontryagin fornece as condições necessárias para se obter a otimização. E, através de um desenvolvimento análogo ao feito no capítulo 3, chega-se a mesma conclusão de que, existe uma zona de densidade de potência constante seguida por uma zona de distribuição uniforme de combustível.

Os sistemas de equações diferenciais e a distribuição ótima de combustível em cada uma dessas zonas, cuja interface está em  $x = x_1$ , podem ser escritos:

Para  $0 \leq x \leq x_1$

$$\dot{y}_{1c}(x) = -\frac{1}{D_1} y_{2c}(x) \quad (C-11)$$

$$\dot{y}_{2c}(x) = \frac{\nu}{k} Q_{max} - \sum_R y_{1c}(x) \quad (C-12)$$



$$\dot{y}_{3c}(x) = -\frac{1}{D_2} y_{4c}(x) \quad (C-13)$$

$$\dot{y}_{4c}(x) = \sum_R y_{1c}(x) - \sum_a^M y_{3c}(x) - \frac{Q_{\max} \sigma_a^F}{k \sigma_f} \quad (C-14)$$

e

$$N_c(x) = \frac{Q_{\max}}{k \sigma_f y_{3c}(x)} \quad (C-15)$$

Para  $x_1 < x < a$ 

$$\dot{y}_{1E}(x) = -\frac{1}{D_1} y_{2E}(x) \quad (C-16)$$

$$\dot{y}_{2E}(x) = \nu \sigma_f N_{\max} y_{3E}(x) - \sum_R y_{1E}(x) \quad (C-17)$$

$$\dot{y}_{3E}(x) = -\frac{1}{D_2} y_{4E}(x) \quad (C-18)$$

$$y_{4E}(x) = \sum_R y_{1E}(x) - [\sum_a^M + N_{\max} \sigma_a^F] y_{3E}(x) \quad (C-19)$$

e

$$N_E(x) = N_{\max} \quad (C-20)$$

As soluções analíticas desses sistemas são:

Para  $0 \leq x \leq x_1$ 

$$y_{1c}(x) = B_1 \cosh(w_1 x) + A_1 \quad (C-21)$$

$$y_{2c}(x) = -A_2 B_1 \sinh(w_1 x) \quad (C-22)$$

$$y_{3c}(x) = A_3 B_1 \cosh(w_1 x) - A_4 B_2 \cosh(w_2 x) + A_5 \quad (C-23)$$

$$y_{4c}(x) = A_6 B_1 \sinh(w_1 x) + B_2 \sinh(w_2 x) \quad (C-24)$$

Para  $x_1 \leq x \leq a$

$$y_{1E}(x) = B_3 \sin [w_3(a-x)] + B_4 \sinh [w_4(a-x)] \quad (C-25)$$

$$y_{2E}(x) = M_1 B_3 \cos [w_3(a-x)] + M_2 B_4 \cosh [w_4(a-x)] \quad (C-26)$$

$$y_{3E}(x) = M_3 B_3 \sin [w_3(a-x)] + M_4 B_4 \sinh [w_4(a-x)] \quad (C-27)$$

$$y_{4E}(x) = M_5 B_3 \cos [w_3(a-x)] + M_6 B_4 \cosh [w_4(a-x)] \quad (C-28)$$

As constantes  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  são constantes a serem determinadas através da continuidade dos  $y_i$  na interface  $x = x_1$ , enquanto que as demais são conhecidas e resultam de agrupamentos de seções de choque e constantes do reator.

É importante notar que o valor  $x_1$  da interface não é ainda conhecido.

Entretanto, usando os mesmos argumentos apresentados no capítulo 3, conclui-se que, para se assegurar a continuidade da Hamiltoniana na interface, a distribuição de combustível,  $N(x)$ , deve ser contínua em  $x = x_1$ . Ou seja:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(x_1 + \epsilon) = N_{max} \quad (C-29)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(x_1 - \epsilon) = N_{max} \quad (C-30)$$

Para se resolver o limite da equação (C-30) usa-se a distribuição de combustível obtida para a zona interna, eq. (C-15).

Então:

$$\frac{Q_{max}}{k \sigma_f y_{3c}(x_1)} = N_{max} \quad (C-31)$$

onde  $y_{3c}(x)$  foi determinada analiticamente, eq. (C-23).

Através de um processo iterativo que combine as equações (C-21) e (C-24) com as equações (C-25) e (C-28), através da continuidade dos  $y_i$  na interface, mais a equação (C-31), ficam determinadas as constantes arbitrárias  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  e a posição  $x_1$  da interface.

A mesma discussão feita no capítulo 3, a respeito das equações adjuntas obtidas através de

$$\lambda_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (C-32)$$

é válida aqui.

Tendo  $y_{3c}(x)$  e  $N(x)$ , quer através da solução analítica quer através do método de perturbação, pode-se calcular a potência e a massa crítica do reator através de:

$$P_n = 2 \int_0^a k \sigma_f N(x) y_3(x) dx \quad (C-33)$$

e

$$M = 2 \int_0^a N(x) dx \quad (C-34)$$

O reator considerado para a aplicação numérica, em dois grupos, é exatamente o mesmo que o considerado para quatro grupos. Conseqüentemente, os dados de entrada são também,  $a = 30$  cm,  $Q_{max} = 60$  watts/cm<sup>3</sup> e  $N_{max} = 4,485 \times 10^{19}$  at/cm<sup>3</sup>.

Para dois grupos de energia, o espectro de nêutrons foi dividido nos dois intervalos:

grupo rápido            15 MeV – 1 eV

grupo térmico         1 eV – ~ eV

A Tabela C-1 mostra as seções de choque e as constantes do reator obtidas pelo XSDRN com 2 grupos de energia:

Tabela C.1

Seções de Choque e Constantes do Reator

$\sigma_f$	$0,443493 \times 10^{-21}$ cm <sup>2</sup>	$\Sigma(1 \rightarrow 2)$	$0,04876$ cm <sup>-1</sup>
$\sigma_0^F$	$0,521371 \times 10^{-21}$ cm <sup>2</sup>	$\Sigma_{R1}$	$0,04876$ cm <sup>-1</sup>
$\nu$	2,44200	$D_1$	0,88962 cm
$\Sigma_0^M$	$0,01759$ cm <sup>-1</sup>	$D_2$	0,11435 cm

As Tabelas C-2 e C-3 apresentam os resultados numéricos dos fluxos e das correntes obtidos através da solução analítica e do método de perturbação.

Pela análise dessas tabelas, conclui-se que o método numérico escolhido fornece resultados bastante satisfatórios, o que garante sua utilização na obtenção da solução do problema com 4 grupos de energia.

Ainda neste apêndice é interessante apresentar, a título de comparação, a Tabela C-4 que mostra os resultados numéricos de distribuição ótima de combustível e a Tabela C-5 que mostra a posição da interface, potência e massa crítica.

Este apêndice C, além de mostrar que o Método de Perturbação é adequado à solução numérica do problema, tem a vantagem adicional de apresentar resultados preliminares, uma vez que, com dois grupos de energia já se tem uma boa idéia do comportamento da solução.

Tabela C.2

Fluxos\*

x(cm)	Grupo 1		Grupo 2	
	y <sub>1</sub> (Analítico)	y <sub>1</sub> (Numérico)	y <sub>3</sub> (Analítico)	y <sub>3</sub> (Numérico)
0	0,933407 x 10 <sup>14</sup>	0,933409 x 10 <sup>14</sup>	0,132960 x 10 <sup>15</sup>	0,132961 x 10 <sup>15</sup>
2,00	0,932916 x 10 <sup>14</sup>	0,932917 x 10 <sup>14</sup>	0,132762 x 10 <sup>15</sup>	0,132763 x 10 <sup>15</sup>
4,00	0,931333 x 10 <sup>14</sup>	0,931334 x 10 <sup>14</sup>	0,132129 x 10 <sup>15</sup>	0,132130 x 10 <sup>15</sup>
6,00	0,928305 x 10 <sup>14</sup>	0,928306 x 10 <sup>14</sup>	0,130939 x 10 <sup>15</sup>	0,130940 x 10 <sup>15</sup>
8,00	0,923154 x 10 <sup>14</sup>	0,923156 x 10 <sup>14</sup>	0,128977 x 10 <sup>15</sup>	0,128978 x 10 <sup>15</sup>
10,00	0,914733 x 10 <sup>14</sup>	0,914736 x 10 <sup>14</sup>	0,125912 x 10 <sup>15</sup>	0,125914 x 10 <sup>15</sup>
12,00	0,901159 x 10 <sup>14</sup>	0,901163 x 10 <sup>14</sup>	0,121298 x 10 <sup>15</sup>	0,121301 x 10 <sup>15</sup>
14,00	0,879403 x 10 <sup>14</sup>	0,879409 x 10 <sup>14</sup>	0,114629 x 10 <sup>15</sup>	0,114632 x 10 <sup>15</sup>
16,00	0,844606 x 10 <sup>14</sup>	0,844616 x 10 <sup>14</sup>	0,105561 x 10 <sup>15</sup>	0,105565 x 10 <sup>15</sup>
17,94	0,792442 x 10 <sup>14</sup>	—	0,951449 x 10 <sup>14</sup>	—
18,00	—	0,789015 x 10 <sup>14</sup>	—	0,945841 x 10 <sup>14</sup>
---	---	---	---	---
17,94	0,792442 x 10 <sup>14</sup>	—	0,951449 x 10 <sup>14</sup>	—
18,00	—	0,789015 x 10 <sup>14</sup>	—	0,945841 x 10 <sup>14</sup>
20,00	0,704693 x 10 <sup>14</sup>	0,704706 x 10 <sup>14</sup>	0,829703 x 10 <sup>14</sup>	0,829711 x 10 <sup>14</sup>
22,00	0,595006 x 10 <sup>14</sup>	0,595018 x 10 <sup>14</sup>	0,696761 x 10 <sup>14</sup>	0,696771 x 10 <sup>14</sup>
24,00	0,464839 x 10 <sup>14</sup>	0,464847 x 10 <sup>14</sup>	0,543407 x 10 <sup>14</sup>	0,543415 x 10 <sup>14</sup>
26,00	0,318896 x 10 <sup>14</sup>	0,318901 x 10 <sup>14</sup>	0,372590 x 10 <sup>14</sup>	0,372596 x 10 <sup>14</sup>
28,00	0,162183 x 10 <sup>14</sup>	0,162185 x 10 <sup>14</sup>	0,189456 x 10 <sup>14</sup>	0,189461 x 10 <sup>14</sup>
28,50	0,121938 x 10 <sup>14</sup>	0,121939 x 10 <sup>14</sup>	0,142440 x 10 <sup>14</sup>	0,142446 x 10 <sup>14</sup>
29,00	0,814351 x 10 <sup>13</sup>	0,814357 x 10 <sup>13</sup>	0,951263 x 10 <sup>13</sup>	0,951323 x 10 <sup>13</sup>
29,50	0,407606 x 10 <sup>13</sup>	0,407603 x 10 <sup>13</sup>	0,476131 x 10 <sup>13</sup>	0,476202 x 10 <sup>13</sup>
29,60	0,326126 x 10 <sup>13</sup>	0,326121 x 10 <sup>13</sup>	0,380953 x 10 <sup>13</sup>	0,381026 x 10 <sup>13</sup>
29,70	0,244619 x 10 <sup>13</sup>	0,244612 x 10 <sup>13</sup>	0,285742 x 10 <sup>13</sup>	0,285819 x 10 <sup>13</sup>
29,80	0,163091 x 10 <sup>13</sup>	0,163082 x 10 <sup>13</sup>	0,190508 x 10 <sup>13</sup>	0,190569 x 10 <sup>13</sup>
29,90	0,815488 x 10 <sup>12</sup>	0,815377 x 10 <sup>12</sup>	0,952581 x 10 <sup>12</sup>	0,953424 x 10 <sup>12</sup>
30,00	0,0	-0,131700 x 10 <sup>9</sup>	0,0	0,884364 x 10 <sup>9</sup>

\* Expressos em n/cm<sup>2</sup> seg.

Tabela C.3

Correntes\*

x(cm)	Grupo 1		Grupo 2	
	$y_1$ (Analítico)	$y_2$ (Numérico)	$y_4$ (Analítico)	$y_4$ (Numérico)
0	0,0	0,0	0,0	0,0
2,00	$0,444897 \times 10^{11}$	$0,444849 \times 10^{11}$	$0,230329 \times 10^{11}$	$0,230308 \times 10^{11}$
4,00	$0,989127 \times 10^{11}$	$0,989021 \times 10^{11}$	$0,505321 \times 10^{11}$	$0,505278 \times 10^{11}$
6,00	$0,175420 \times 10^{12}$	$0,175402 \times 10^{12}$	$0,875233 \times 10^{11}$	$0,875163 \times 10^{11}$
8,00	$0,291095 \times 10^{12}$	$0,291064 \times 10^{12}$	$0,139992 \times 10^{12}$	$0,139982 \times 10^{12}$
10,00	$0,471764 \times 10^{12}$	$0,471715 \times 10^{12}$	$0,214748 \times 10^{12}$	$0,214736 \times 10^{12}$
12,00	$0,757765 \times 10^{12}$	$0,757687 \times 10^{12}$	$0,317770 \times 10^{12}$	$0,317758 \times 10^{12}$
14,00	$0,121296 \times 10^{13}$	$0,121283 \times 10^{13}$	$0,448603 \times 10^{12}$	$0,448602 \times 10^{12}$
16,00	$0,193897 \times 10^{13}$	$0,193877 \times 10^{13}$	$0,585069 \times 10^{12}$	$0,585104 \times 10^{12}$
17,94	$0,302619 \times 10^{13}$	—	$0,646485 \times 10^{12}$	—
18,00	—	$0,309760 \times 10^{13}$	—	$0,645177 \times 10^{12}$
---	---	---	---	---
17,94	$0,302619 \times 10^{13}$	—	$0,646485 \times 10^{12}$	—
18,00	—	$0,309760 \times 10^{13}$	—	$0,645177 \times 10^{12}$
20,00	$0,435398 \times 10^{13}$	$0,435406 \times 10^{13}$	$0,702966 \times 10^{12}$	$0,702952 \times 10^{12}$
22,00	$0,536874 \times 10^{13}$	$0,536882 \times 10^{13}$	$0,819481 \times 10^{12}$	$0,819489 \times 10^{12}$
24,00	$0,617671 \times 10^{13}$	$0,617678 \times 10^{13}$	$0,930975 \times 10^{12}$	$0,930989 \times 10^{12}$
26,00	$0,676958 \times 10^{13}$	$0,676966 \times 10^{13}$	$0,101730 \times 10^{13}$	$0,101732 \times 10^{13}$
28,00	$0,713257 \times 10^{13}$	$0,713267 \times 10^{13}$	$0,107108 \times 10^{13}$	$0,107108 \times 10^{13}$
28,50	$0,718599 \times 10^{13}$	$0,718610 \times 10^{13}$	$0,107903 \times 10^{13}$	$0,107902 \times 10^{13}$
29,00	$0,722422 \times 10^{13}$	$0,722434 \times 10^{13}$	$0,108472 \times 10^{13}$	$0,108471 \times 10^{13}$
29,50	$0,724719 \times 10^{13}$	$0,724732 \times 10^{13}$	$0,108815 \times 10^{13}$	$0,108812 \times 10^{13}$
29,60	$0,724994 \times 10^{13}$	$0,725008 \times 10^{13}$	$0,108856 \times 10^{13}$	$0,108853 \times 10^{13}$
29,70	$0,725209 \times 10^{13}$	$0,725223 \times 10^{13}$	$0,108888 \times 10^{13}$	$0,108884 \times 10^{13}$
29,80	$0,725362 \times 10^{13}$	$0,725377 \times 10^{13}$	$0,108911 \times 10^{13}$	$0,108907 \times 10^{13}$
29,90	$0,725454 \times 10^{13}$	$0,725469 \times 10^{13}$	$0,108924 \times 10^{13}$	$0,108920 \times 10^{13}$
30,00	$0,725485 \times 10^{13}$	$0,725500 \times 10^{13}$	$0,108929 \times 10^{13}$	$0,108924 \times 10^{13}$

\* Expressas em  $n/cm^2$  seg.

**Tabela C.4**  
Distribuição Ótima de Combustível

x(cm)	N(x) (at/cm <sup>3</sup> x 10 <sup>20</sup> )	
	Analítico	Numérico
0	0,317559	0,317556
1,00	0,317676	0,317673
2,00	0,318032	0,318030
3,00	0,318649	0,318647
4,00	0,319556	0,319553
5,00	0,320806	0,320801
6,00	0,322460	0,322458
7,00	0,324609	0,324604
8,00	0,327365	0,327363
9,00	0,330880	0,330875
10,00	0,335334	0,335329
11,00	0,340972	0,340967
12,00	0,348090	0,348081
13,00	0,357059	0,357050
14,00	0,368341	0,368332
15,00	0,382461	0,382448
16,00	0,399983	0,399968
17,00	0,421337	0,421316
17,94	0,444850	-
18,00	-	0,444850
---	---	---
17,94/18,00		
s	0,444850	0,444850
30,00		

**Tabela C.5**  
Interface, Potência e Massa Crítica

	Solução Analítica	Solução Numérica
$x_1$ (cm)	17,94	18,00
$P_0$ (Kw/cm <sup>2</sup> )	2,947	2,947
$M_c$ (g/cm <sup>2</sup> )	0,86	0,90

## ABSTRACT

~~For technical reasons, in nuclear reactors, both fuel concentration and power density always have some kind of restriction. In this work, using optimal control techniques, the optimum fuel distribution — which maximizes the power output of a thermal reactor — is obtained. The nuclear reactor is described by a diffusion theory model with four energy groups and by assuming plane geometry.~~

Since the analytical solution is impracticable, by using a perturbation method, a FORTRAN program was written, in order to obtain the numerical solution.

Numerical results, for a thermal reactor light water moderated, non reflected, are shown. The fissible fuel material considered is Uranium-235. (auth.)

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS\*

1. BERKOVITZ, L. D. *Optimal control theory*. New York, N. Y., Springer, 1974.
2. BOUCHEY, G. D.; KOEN, B. V.; BEIGHTLER, C. S. Optimization of nuclear materials safeguards sampling systems by dynamic programming. *Nucl. Technol.*, 12:18-25, 1971.
3. BRYSON JR., A. E. & HO, Y. C. *Applied optimal control*. New York, N. Y., Wiley, 1975.
4. CHITKARA, K. & WEISMAN, J. An equilibrium approach to optimal in-core fuel management for pressurized water reactors. *Nucl. Technol.*, 24:33-49, 1974.
5. CITRON, S. J. *Elements of optimal control*. New York, N. Y., Rinehart and Winston, 1969.
6. DEVOOGHT, J. Restricted minimum critical mass. *Nucl. Sci. Engng*, 5:190-4, 1959.
7. EL-BASSIONI, A. A. & PONCELET, C. G. Minimal time control of spatial xenon oscillations in nuclear power reactors. *Nucl. Sci. Engng*, 54:166-76, 1974.
8. GELFAND, I. M. & FOMIN, S. V. *Calculus of variations*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1963.
9. GLASSTONE, S. & EDLUND, M. C. *The elements of nuclear reactor theory*. New York, N. Y., Van Nostrand, 1952.
10. GLASSTONE, S. & SESONSKE, A. *Nuclear reactor engineering*. New York, N. Y., Van Nostrand, 1967.
11. GOERTZEL, G. Minimum critical mass and flat flux. *J. nucl. Energy*, 2:193-201, 1956.
12. GOLDSCHMIDT, P. Minimum critical mass in intermediate reactors subject to constraints on power density and enrichment. *Nucl. Sci. Engng*, 49:263-73, 1972.
13. GOLDSCHMIDT, P. Optimal fuel enrichment distribution in fast reactors. *Nucl. Sci. Engng*, 50:153-63, 1973.

(\*) As referências bibliográficas relativas a documentos localizados pelo IEA foram revistas e enquadradas na NB-66 da ABNT.

14. GOLDSCHMIDT, P. & QUENON, J. Minimum critical mass in fast reactors with boulder density. *Nucl. Sci. Engng*, 39:311-9, 1970.
15. GREENE, N. M. & CRAVEN, C. N. *XSDRN: a discrete ordinates spectral averaging code*. Oak Ridge, Tenn., Oak Ridge National Lab., July 1969. (ORNL-TM-2500).
16. HILDEBRAND, F. B. *Introduction to numerical analysis*. New York, N. Y., McGraw-Hill, 1956.
17. HOFMANN, P. L. & HURWITZ JR, H. Application of minimum loading conditions to enriched lattices. *Nucl. Sci. Engng*, 2:461-8, 1957.
18. INTERNATIONAL BUSINESS MACHINE CORP. *System/360 – Scientific subroutine package. Version III – Programmer's manual*. New York, N. Y., 1968. (Program n9 360 A-CM-03X; GH 20-0205-4).
19. KELLEY, H. J. A second variation test for singular extremals. *AIAA J.* 2:1380-2, 1964.
20. KIGUCHI, T. & KAWAI, T. A method for optimum determination of adjustable parameters in the boiling water reactor core simulator using operating data on flux distribution. *Nucl. Technol.*, 27:315-26, 1975.
21. KOCHUROV, B. P. Masse critique minimale pour une concentration limitée d'uranium. *Énergie Atom.*, 20(3):68-76, mar. 1966.
22. KOPP, R. E. & MOYER, A. G. Necessary conditions for singular extremals. *AIAA J.*, 3:1439-44, 1965.
23. LAMARSH, J. R. *Introduction to nuclear reactor theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
24. LEITMANN, G. *Optimization techniques with applications to aerospace systems*. New York, N. Y., Academic, 1962.
25. MOTODA, H.; HERCZEG, J.; SESONSKE, A. Optimization of refueling schedule for light-water reactors. *Nucl. Technol.*, 25:477-96, 1975.
26. MURRAY, R. L. *Nuclear reactor physics*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1957.
27. OTSUKA, M. Fuel-importance function and minimum critical mass. *Nucl. Sci. Engng*, 18:514-7, 1964.
28. PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII, V. G.; GAMKRELIDZE, R. V.; MISHCHENKO, E. F. *The mathematical theory of optimal processes*. Oxford, Pergamon, 1964.
29. ROBBINS, H. M. A generalized Legendre-Clebsch condition for the singular cases of optimal control. *IBM J1 Res. Dev.*, 11:361-72, 1967.
30. ROBERTS, J. J. & SMITH JR, H. P. Time optimal solution to the reactivity-xenon shutdown problem. *Nucl. Sci. Engng*, 22:470-8, 1965.
31. SAKAI, M. & SILVARES, O. M. *Projeto de geradores de vapor para aplicações nucleares utilizando técnicas de otimização*. [Trabalho a ser apresentado ao IV COBEM' Florianópolis, Dezembro 1977].
32. SANTOS, W. N. dos & CINTRA, W. H. *Maximização da potência de um reator*. [Trabalho a ser apresentado ao IV COBEM, Florianópolis, Dezembro 1977].



33. SHAPIRO, M. M. Minimum critical mass invariable density and epithermal reactors. *Nucl. Sci. Engng*, 10:150-62, 1961.
34. STACEY, JR, W. M. Control of xenon spatial oscillations. *Nucl. Sci. Engng*, 38:229-43, 1969.
35. STACEY, JR., W. M. Optimal control of xenon-power spatial transients. *Nucl. Sci. Engng*, 33:14, 1968.



**INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA**  
**Caixa Postal, 11049 – Pinheiros**  
**CEP 05508**  
**01000 – São Paulo – SP**

**Telefone: 211-6011**  
**Endereço Telegráfico – IEATOMICA**  
**Telex – 011-23592 IENA BR**