



# I Congresso Geral de Energia Nuclear

Rio de Janeiro, 17 e 20 de Março de 1986

ANAIS - PROCEEDINGS

## COMPARAÇÃO ENTRE ELEMENTOS DE PLACA TRIANGULARES BASEADOS NA TEORIA DE MINDLIN

— Miguel Mattar Neto  
Diretoria de Pesquisas de Reatores  
COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR - SP

— Paulo de Mattos Pimenta  
Departamento de Estruturas e Fundações  
EPUSP

### Sumário

Neste trabalho são mostrados três elementos de placa triangulares com 9 graus de liberdade. Eles são baseados na teoria das placas de Mindlin que requer somente continuidade  $C^0$  para as funções de interpolação do campo de deslocamentos. São apresentadas suas formulações e os resultados das soluções de alguns problemas estáticos. Mostra-se que os elementos são bastante semelhantes, além de simples e eficientes, podendo ser utilizados economicamente na solução de problemas transitórios não lineares da tecnologia de reatores nucleares.

### Abstract

This paper presents three triangular plate elements with 9 degrees of freedom. They are based on Mindlin plate theory which requires only  $C^0$  continuity for the interpolation functions of the displacement field. Their formulations and the results of some static problems are presented. It is shown that the elements are very similar, while simple and efficient, and they can be used in the solution of non linear transient problems of nuclear reactor technology economically.

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresenta-se 3 elementos de placa triangulares com 3 nós e 3 graus de liberdade por nó, como mostrado na Figura 1, com formulações desenvolvidas a partir do método dos deslocamentos utilizando a teoria das placas com deformações por cisalhamento (Teoria das Placas de Mindlin) /1/. Os elementos foram deduzidos com esta teoria porque ela requer somente continuidade  $C^0$  para as funções de interpolação do campo de deslocamentos enquanto a teoria clássica de Kirchhoff requer continuidade  $C^1$ . Assim é possível a formulação dos elementos de forma explícita com economia de tempo e memória de computador que são fatores muito importantes em análises de problemas transitórios não lineares. A aplicação destes elementos de placa pode ser ampliada para a montagem de elementos de casca facetados obtidos na superposição de um elemento de placa com um elemento em estado pleno de tensão. Estes elementos simples de placa/casca tem uma aplicação muito grande no desenvolvimento da tecnologia de reatores nucleares desde que se mostrem eficientes.

A teoria das placas de Mindlin /1/ tem como expressão para energia potencial de um elemento

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \underline{\kappa}^T \underline{D}_f \underline{\kappa} \, dA + \frac{1}{2} \int_A \underline{\gamma}^T \underline{D}_c \underline{\gamma} \, dA - \int_A w p \, dA \quad (1)$$

onde

$$\underline{\kappa} = \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{bmatrix}; \quad \underline{\gamma} = \begin{bmatrix} w_{,x} + \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{bmatrix}; \quad \underline{D}_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix};$$

$$\underline{D}_c = \frac{Eh\psi}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

e com referência à Figura 1,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  são as rotações das seções,  $w$  é o deslocamento transversal da superfície média da placa,  $p$  é pressão,  $h$  é a espessura e  $A$  é a área da superfície média da placa.  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $\psi$  é o fator de correção da distribuição do cisalhamento ao longo da espessura (adotado como 5/6). Os índices  $f$  e  $c$  são relativos à flexão e cisalhamento.

Chamando  $\underline{u}^T = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}\}$  os deslocamentos nodais do elemento monta-se, conforme as hipóteses adotadas para ele, as relações deformações-deslocamentos:

$$\underline{\kappa} = \underline{B}_f \underline{u}; \quad \underline{\gamma} = \underline{B}_c \underline{u} \quad (3)$$

A matriz de rigidez do elemento é determinada a partir das equações (1) e (3):

$$\underline{K} = \underline{K}_f + \underline{K}_c = \int_A \underline{B}_f^T \underline{D}_f \underline{B}_f \, dA + \int_A \underline{B}_c^T \underline{D}_c \underline{B}_c \, dA \quad (4)$$

## 2. OS ELEMENTOS ESTUDADOS

Mostra-se, a seguir, as hipóteses básicas para a formulação dos três elementos estudados neste trabalho chamados  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ . O elemento  $T_1$  foi desenvolvido em /2/, e o  $T_2$  e  $T_3$  com procedimentos análogos aos descritos em /3/ e /4/, respectivamente, para elementos quadrangulares de 4 nós e 12 graus de liberdade.

Para o elemento  $T_1$  as funções de interpolação são lineares de modo que os deslocamentos  $\underline{a}^T = \{ w \ \theta_x \ \theta_y \}$  no elemento são dados por :

$$w = \sum_{i=1}^3 L_i w_i; \theta_x = \sum_{i=1}^3 L_i \theta_{xi}; \theta_y = \sum_{i=1}^3 L_i \theta_{yi} \quad (5)$$

onde  $L_i$  são as coordenadas naturais do triângulo e  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, i = 1, 2, 3$ , são os deslocamentos nodais. É feita a decomposição dos deslocamentos nodais  $\underline{u}$  em um modo de flexão  $\underline{u}_f$  e um de cisalhamento  $\underline{u}_c$ , que contribuirão para a energia de deformação por flexão e por cisalhamento, respectivamente. Na separação obtêm dois operadores lineares  $\underline{P}_f$  e  $\underline{P}_c$  tais que :

$$\underline{u}_f = \underline{P}_f \underline{u}; \underline{u}_c = \underline{P}_c \underline{u}; \underline{K}_f = \underline{B}_f \underline{P}_f \underline{u} = \underline{B}_{ff} \underline{u}; \underline{K}_c = \underline{B}_c \underline{P}_c \underline{u} = \underline{B}_{cc} \underline{u} \quad (6)$$

Substituindo em (4)  $\underline{B}_{ff}$  e  $\underline{B}_{cc}$  de (6) por  $\underline{B}_f$  e  $\underline{B}_c$ , respectivamente, obtém-se a matriz de rigidez. Como  $\underline{B}_{ff}, \underline{B}_{cc}, \underline{D}_f$  e  $\underline{D}_c$  são matrizes com termos constantes a integração de  $\underline{K}$  com um ponto é exata.

No elemento  $T_2$ ,  $w$  inicialmente tem variação quadrática considerando os deslocamentos nodais dos vértices e no meio dos lados para fazer a interpolação. As rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  variam linearmente como em (5). Para se chegar à configuração de 3 nós e 9 graus de liberdade é feita a hipótese que a deformação por cisalhamento ao longo dos lados é constante. A matriz  $\underline{B}_f$  resultante, tem somente termos constantes e a matriz  $\underline{K}_f$  obtida com um ponto de integração é exata. A matriz  $\underline{B}_c$ , no entanto, tem termos lineares em  $L_i$  e pode-se seguir dois caminhos  $\underline{T}$  para a integração de  $\underline{K}$ : (a) integração reduzida e seletiva /5/; (b) integração exata com o artifício descrito em /6/.

No elemento  $T_3$  o campo de deslocamentos tem variação linear em (5) mas deformações por cisalhamento não são dadas como em (2). Em cada lado do elemento, define-se uma deformação por cisalhamento localizada em seu ponto médio e com direção paralela a ele, que é função dos deslocamentos dos nós que o formam. Por meio de considerações geométricas determina-se, então, o vetor de deformações por cisalhamento em cada nó e também no elemento com um esquema de interpolação linear. Da mesma forma que para o elemento  $T_2$ ,  $\underline{B}_f$  é uma matriz de termos constantes e  $\underline{B}_c$  tem termos lineares em  $L_i$ , sendo, portanto, válidos os mesmos comentários feitos acima para a montagem de  $\underline{K}_f$  e  $\underline{K}_c$ .

### 3. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Os elementos  $T_1, T_2$  e  $T_3$  foram utilizados na análise de uma placa quadrada de espessura constante  $h=0,04m$ , de lado  $a=8m$  e de material com  $E=300000 \text{ KN/m}^2$  e  $\nu=0,3$ , variando de condições de vinculação e de carregamento. Foram feitos 4 exemplos: (1) simplesmente apoiada nas bordas com carga concentrada no centro ( $P=0,4KN$ ); (2) engastada nas bordas com carga concentrada no centro ( $P=0,4KN$ ); (3) simplesmente apoiada nas bordas com carga distribuída uniformemente ( $P=-6,25 \text{ N/m}^2$ ); (4) engastada com carga distribuída uniformemente ( $P=-6,25 \text{ N/m}^2$ ). Pela simetria modelou-se somente 1/4 da placa com malhas uniformes de  $2N \times 2N$  elementos sendo  $N$  o número de quadros em cada direção formados por 2 triângulos retângulos com a diagonal indo da esquerda para a direita de modo ascendente. Os resultados obtidos com um computador Cyber 175/750 estão na Tabela 1.

Pelos resultados apresentados e pela comparação das matrizes de rigidez obtidas com várias configurações de triângulos nota-se que os valores gerados com os elementos  $T_2$  e  $T_3$  são idênticos, e que eles, tendo a integração reduzida no cisalhamento com ponto de integração no centróide, geram valores idênticos aos de  $T_1$ . A equivalência entre  $T_2$  e  $T_3$  se explica pela hipótese admitida, em ambos, que a deformação por cisalhamento na direção dos lados do elemento é constante. Como  $T_1$  tem deformação por cisalhamento constante e  $T_2$  e  $T_3$  distribuição

linear desta deformação a outra equivalência ocorre porque a integração reduzida feita gera matrizes de rigidez iguais.

Os resultados obtidos com  $T_2$  e  $T_3$  com integração reduzida e  $T_1$  são bons com as malhas mais refinadas sendo que a qualidade dos resultados é a simplicidade destes elementos com formulação explícita indicam que em análises de problemas transitórios não lineares eles podem levar vantagem sobre elementos de ordem superior em termos de custos de computador e facilidade de aplicação.

#### 4. BIBLIOGRAFIA

- /1/ MINDLIN, R.D.. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic, elastic plates. In: ASME J. Appl. Mech., 18:31-38, 1951.
- /2/ BELYTSCHKO, T.; STOLARSKI, H.; CARPENTER, N.. A  $C^0$  triangular plate element with one point quadrature. In: Numerical Methods in Engineering, 20: 787-802, 1984.
- /3/ TESSLER, A. HUGUES, T.J.R.. An improved treatment of transverse shear in the Mindlin - type four - node quadrilateral element. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 39: 311-335, 1983.
- /4/ HUGUES, T.J.R.; TEZDUYAR, T E.. Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. In: ASME J. Appl. Mech., 48: 587-596, 1981
- /5/ HUGUES, T.J.R.; COHEN, M.; HAROUN, M.. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. In: Nuclear Engineering and Design, 46: 203-222, 1978.
- /6/ JOSEPH, K.T.; RAO, K.S.. A fast algorithm for triangular plate bending element. In: Numerical Methods in Engineering, 14: 1100-1104, 1979.

Figura 1 : Elemento Triangular de Placa com 3 nós e 9 graus de liberdade

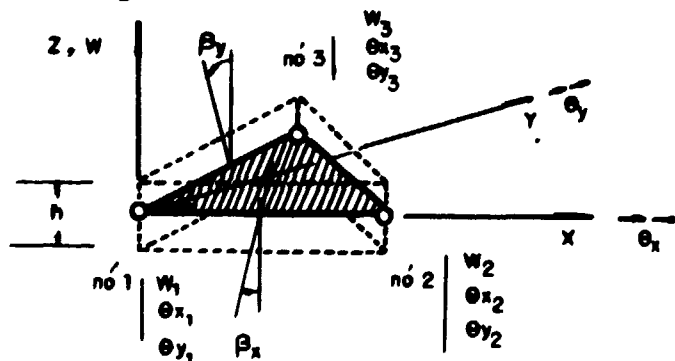


Tabela 1 : Deslocamentos do centro da placa

Elemento	h	Ex. 1		Ex. 2		Ex. 3		Ex. 4	
		w(a)	w/b	w(a)	w/b	w(a)	w/b	w(a)	w/b
$T_1$	2	0,1363	0,007	0,0010	0,020	0,0522	0,003	0,0005	0,027
	4	0,1337	0,022	0,0418	0,513	0,0579	0,979	0,0103	0,361
$T_2^{(*)}$	6	0,1022	0,763	0,0096	0,836	0,0505	0,990	0,0163	0,000
	8	0,1053	0,979	0,0716	0,070	0,0500	0,995	0,0166	0,910
$T_3^{(*)}$	10	0,1000	0,900	0,0763	0,911	0,0500	0,990	0,0172	0,933
	2	0,0070	0,041	0,0002	0,003	0,0031	0,052	0,0001	0,006
$T_2, T_3$	4	0,0716	0,433	0,0010	0,067	0,0303	0,513	0,0017	0,093
	6	0,1301	0,770	0,0353	0,433	0,0400	0,072	0,0112	0,013
	8	0,1326	0,900	0,0500	0,075	0,0550	0,966	0,0100	0,071
	10	0,1007	0,951	0,0001	0,011	0,0570	0,977	0,0105	0,902

Obs: (\*) Integração reduzida no elemento com ponto de integração no centro.  
 \* - Deslocamento do centro de placa obtido com elementos finitos  
 \* - Deslocamento do centro de placa obtido analiticamente