

SOBRE O MÉTODO DAS FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DE K

Carlos Alexandre de Jesus **Miranda**
Araldo Homobono Paes de Andrade
IPEN-CNEN/SP
Travessa R, 400
05508-900 - São Paulo, SP



RESUMO

Com o Método das Funções de Ponderação é possível a determinação do Fator de Intensidade de Tensões K para uma segunda configuração de carregamento, aplicada a um corpo trincado, a partir de uma solução qualquer onde sejam conhecidos o campo de deslocamentos (δ) da face da trinca e o fator K associado. Neste trabalho faz-se uma apresentação breve desta metodologia, inclusive com menção a alguns métodos aproximados que fornecem ótimos resultados, ressaltando-se a facilidade de automatizá-la via programação de computador, e mostra-se algumas aplicações da mesma a partir de casos típicos comparando-se os resultados numéricos obtidos com os resultados analíticos disponíveis.

INTRODUÇÃO

A análise de fratura e fadiga de vasos de pressão e tubulações requer o cálculo de fatores de intensidade de tensão para as trincas típicas que ocorrem em serviço, com o risco adicional do material ter sofrido fragilização. Como regra geral tais trincas são encontradas em regiões onde a distribuição de tensões é altamente não-linear. As soluções existentes são disponíveis, em geral, para distribuições de tensões uniformes ou lineares. Quando se trata com distribuições não lineares o código ASME [1] apresenta uma técnica de linearização de tensões (decomposição em duas distribuições: uma uniforme e outra linear) como aproximação para a determinação do fator de intensidade de tensões.

Em certos casos, como quando há gradientes de tensões muito elevados, esta técnica pode conduzir a erros apreciáveis. Portanto outros métodos de cálculo do fator K se tornam necessários, como o Método das Funções de Ponderação. As funções de ponderação apresentam a propriedade de serem dependentes somente da geometria.

Assim, uma vez que a função de ponderação seja conhecida para um dado tipo (geometria) de trinca, os fatores de intensidade de tensões, para quaisquer carregamentos, podem ser determinados por 'simples' integração.

PRINCÍPIO do MÉTODO

Este Método foi matematicamente estabelecido por Bueckner [2] e Rice [3], para a determinação do fator K_2 para uma segunda configuração de carregamento $\sigma_2(x)$ aplicada a um corpo trincado, a partir de uma solução qualquer, 'de referência', para o carregamento $\sigma_{ref} = \sigma_0(x)$, onde sejam conhecidos o campo de deslocamentos $\delta_{ref} = U_{ref}(a,x)$ da face da trinca e o respectivo fator K_{ref} onde:

$$K_{ref} = F(a/L) \cdot \sigma_0(x) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (1)$$

Assim, tomando-se o sistema de coordenadas indicado na figura 1 temos que:

$$K_2 = \int \sigma_2(x) h(a,x) dx \quad (2)$$

$$\text{onde } h(a,x) = (H/K_{ref}) \partial U_{ref}(a,x) / \partial a \quad (3)$$

$h(a,x)$ é a função de ponderação que só depende da geometria do corpo trincado. Sendo E o Módulo de Elasticidade do material e μ o seu Coeficiente de Poisson tem-se $H = E$ para o caso de estado plano de tensões e $H = E/(1-\mu^2)$ para o caso de estado plano de deformações.

Portanto, como se observa, das eq. (2) e (3), é necessário conhecer o campo de deslocamentos de uma dada solução 'de referência', $U_{ref}(a,x)$, produzido em uma trinca sob um carregamento genérico $\sigma_0(x)$ e o respectivo fator K_{ref} para que se obtenha a função de ponderação $h(a,x)$ e, com esta, o valor K_2 para qualquer outro carregamento $\sigma_2(x)$ aplicado sobre o mesmo corpo trincado. Esta é uma dificuldade inicial para aplicação direta deste método, uma vez que nem sempre se conhece o campo de deslocamentos da face da trinca embora se conheça o carregamento aplicado σ_{ref} e o respectivo valor de K_{ref} .

MÉTODO SIMPLIFICADO

Para contornar esta dificuldade foi proposto, por Petroski e Achenbach [4], um método simplificado de obtenção do campo de deslocamentos das faces da trinca, a partir de considerações simples tais como a auto-consistência da equação 2, que se reduzirá a uma identidade se se fizer $\sigma_2(x) = \sigma_{ref}$ (o que leva a se ter $K_2 = K_{ref}$), e uma proposta de expressão para $U_{ref}(a,x)$,

definida a partir dos seguintes critérios: 1) ser baseada em uma única incógnita envolvendo o carregamento de referência e o respectivo valor K_{ref} , 2) representar deslocamentos finitos na abertura da trinca e nulos na ponta da trinca, e 3) ser consistente para pequenas trincas. Assim, a solução aproximada, proposta em [4] tem a forma da eq.(4).

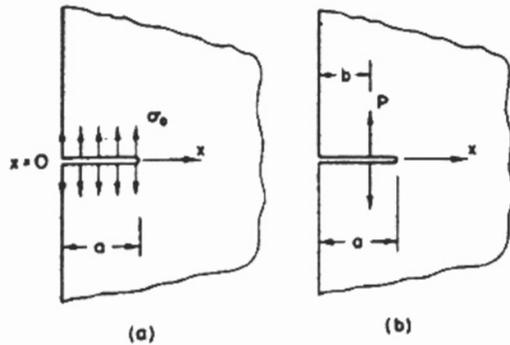


Figura 1: Esquema do Corpo Trincado

a) carga uniforme, b) carga pontual

$$U(a,x) = (\sigma_0(x)/H\sqrt{2}) \{ 4 F(a/L) \sqrt{a(a-x)} + G(a/L) \sqrt{|a-x|^3/a} \} \quad (4)$$

onde

$$G(a/L) = [I_1(a) - 4 \cdot F(a/L) \cdot \sqrt{a} \cdot I_2(a)] \cdot \sqrt{a} / I_3(a) \quad (5)$$

$$I_1(a) = \pi\sqrt{2} \cdot \sigma_0(x) \cdot \int [F(a/L)]^2 \cdot a \, da \quad (6.a)$$

$$I_2(a) = \int [\sigma_0(x) \cdot \sqrt{a-x}] \, dx \quad (6.b)$$

$$I_3(a) = \int [\sigma_0(x) \cdot (a-x)^{3/2}] \, dx \quad (6.c)$$

As integrais I_1 , I_2 e I_3 são efetuadas no intervalo $[0,a]$. O termo a/L é uma característica conhecida da trinca assim como a própria trinca a e o carregamento 'de referência' $\sigma_0(x)$ para o qual se conhece K_{ref} e, portanto, também, a expressão de $F(a/L)$ e $\sigma_2(x)$ para o qual se deseja obter K_2 .

Discussão Sobre o Método Simplificado e suas Limitações.

Há, na literatura, uma interessante discussão sobre as limitações do método apresentado acima, proposto em [4]. Inicialmente, em [5] são apresentadas conclusões errôneas sobre possíveis limitações do método encontradas, fundamentalmente, como mostrado em [6], devido a erros em algumas integrações analíticas realizadas nos exemplos utilizados. Em [7] se mostra que há restrições no método quando, por ex. a partir de soluções de referência com cargas parciais sobre a trinca, a função de ponderação obtida não é confiável.

As restrições do método ficaram mais definidas e precisas na refer. [8], a partir do estudo de diversas soluções, comparadas com resultados analíticos conhecidos, ou obtidos por outros métodos, em que o carregamento de referência aplicado apresentava gradientes abruptos em duas situações genéricas: atuando em toda a extensão da trinca e atuando parcialmente sobre a trinca.

Ficou demonstrado por Niu, em [8], que o gradiente do carregamento de referência $\sigma_0(x)$ tem pouca, ou nenhuma, importância na precisão da função de ponderação obtida. O fator determinante é a extensão em que a trinca está submetida ao carregamento, quando este é do tipo monotonicamente crescente, i.é.: cresce da extremidade da trinca ($x=0$) para a sua ponta ($x=a$).

Niu [8] sugere que a ocasional falha do método simplificado, proposto por Petroski e Achenbach em [4] pode ser devido ao fato de que a condição de auto-consistência da equação (2) pode não ser suficiente para, por si só, determinar os deslocamentos da face da trinca, em alguns casos.

Da discussão havida em torno das limitações deste método aproximado, para a obtenção das funções de ponderação, fica claro que a solução de referência deve atender as seguintes condições quanto ao carregamento aplicado:

- 1ª - deve agir sobre toda a extensão da trinca e
- 2ª - variar monotonicamente ao longo da trinca
- 3ª - sendo do tipo monotonicamente crescente não deverá apresentar fortes gradientes.

GENERALIZAÇÃO do MÉTODO SIMPLIFICADO

Através de diversos trabalhos, resumidos em [9] e [10], foi mostrado que as funções de ponderação podem ser expressas, de forma melhor aproximada, e generalizada, como séries de potências com expoentes z_i inteiros ou com expoentes fracionários ($z_i=0,1,2,3,4,5,\dots$ ou $z_i=0,1/2,1,3/2,2,5/2,\dots$ respectivamente para $i=0, 1, 2, 3, 4,\dots$) da forma apresentada na eq. (7) onde o número de termos varia com a geometria em análise (para se ter uma boa precisão) mas é possível obter resultados acurados usando-se apenas 3 termos na série de expoentes fracionários, como mostrado, através de diversos exemplos, na refer. [9].

$$h(x,a) = (2/\sqrt{[2\pi(a-x)]}) \sum M_i \cdot (1-x/a)^{z_i}, \quad M_0 = 1 \quad (7)$$

Assim a função de ponderação pode ser obtida sem o conhecimento do campo de deslocamentos das faces da trinca. Para isto, porém, se necessita conhecer 3 parâmetros M_1 , M_2 e M_3 e, portanto, são necessárias 3 soluções de referência K_{ref1} , K_{ref2} e K_{ref3} associadas aos respectivos carregamentos σ_{ref1} , σ_{ref2} e σ_{ref3} . Estes 3 parâmetros são calculados a partir da solução do sistema de 3 equações obtido ao se substituir a expressão (7), com 3 termos, na eq. (2) para cada uma das soluções de referência.

Considerando-se determinadas propriedades do campo de deslocamentos da superfície da trinca e, conseqüentemente, da curvatura da superfície da trinca, é possível estabelecer uma condição adicional que reduz o número de soluções de referência para somente duas [10], [13].

Uso de Elementos Finitos. É possível obter as funções de ponderação, de forma aproximada, através do uso de programas de análise estrutural baseados no método de elementos finitos, com o uso de técnicas específicas [11], [14].

APLICAÇÃO do MÉTODO

Como exemplo de aplicação do Método das Funções de Ponderação para o cálculo do Fator de Intensidade de Tensões K , associado a um novo carregamento aplicado em uma dada configuração de trinca, a partir de uma solução (de referência) conhecida, foi desenvolvido um programa simples, em linguagem FORTRAN, onde optou-se por realizar as integrações numéricas pela chamada Regra de Simpson. Serão apresentados resultados utilizando-se a geometria e carregamentos da figura 1 - trinca na borda de um semi-plano infinito.

Como solução de referência adotou-se o carregamento constante (uniforme) - figura 1.a. Para este caso tem-se que $K_{ref} = 1.1215\sigma_0\sqrt{\pi a}$ e, portanto, $F(a/L) = 1.1215$. Assim, considerando $a = 10$ e $\sigma_0=1$, tem-se que $K_{ref} = 6.2829$.

A função de ponderação $h(a,x)$ para esta geometria, considerando o método aproximado descrito acima, e proposto em [4], é mostrada na eq. (8).

Caso 1: Como teste do programa desenvolvido, inicialmente fez-se $\sigma_2 = \sigma_0$ o que implica que se deve obter $K_2 = 6.2829$. (A unidade usual de K é [tensão] $\cdot\sqrt{[comprimento]}$). Para efeito dos exemplos apresentados basta adotar um sistema coerente de unidades, como o Sistema Internacional - SI).

$$h(a,x) = (1/1.5860\sqrt{\pi a}) [2.2430(a/a-x)^{1/2} + 0.2458 (a-x/a)^{3/2} + 1.5056 (a-x/a)^{5/2}] \quad (8)$$

A tabela 1 mostra os resultados obtidos, para vários números de pontos de integração e considerando a solução analítica para a função de ponderação $h(a,x)$ (integração da equação (2)) e considerando a solução numérica aproximada através das equações (4), (5) e (6). Observe-se, a partir dos resultados da tabela 1, que o procedimento de integração adotado é suficiente para atingir bons níveis de convergência no valor de K_2 desejado. Com 500+500 passos de integração o resultado ($K_{2num} = 6.2792$) já convergiu para o valor desejado com menos de 1% de erro.

Convergência: Observa-se que a equação (1) resultante do processo, a ser integrada para a obtenção de K_2 tem termos do tipo $1/\sqrt{(a-x)}$ e $1/\sqrt{(a^2-x^2)}$, devidos a função de peso, que são fortemente não-lineares com tendência a divergir quando $x \rightarrow a$. Isto faz com que se deva ter um grande número de passos (ou pontos) na integração numérica das equações.

A refer. [12] apresenta uma alternativa para este problema, baseada na divisão do intervalo de integração em dois sub-intervalos (de 0 até $(1-\epsilon)a$ e de $(1-\epsilon)a$ até a) e, a partir da análise da equação (1), no abandono de uma de suas partes quando da integração no segundo intervalo. No presente trabalho optou-se por se trabalhar com dois sub-intervalos (de

0 até $0.9a$ e de $0.9a$ até a) usando no segundo intervalo um passo de integração 10 vezes menor que no primeiro, i.e.: usando-se o mesmo número de passos de integração nos dois sub-intervalos.

Caso 2: Como segundo teste de aplicação do método e do programa desenvolvido obteve-se o fator de intensidade de tensões para o carregamento apresentado na figura 1.b, carga concentrada sobre as faces da trinca, distante b da borda $x=0$ da mesma. Para efeito do processo de integração numérica o carregamento foi considerado atuando sobre um comprimento da e foram analisadas duas situações, para $b=0.5a$: a) $da = 0.01a$ e $\sigma = 100$ e b) $da = 0.001a$ e $\sigma = 1000$, de forma que se tenha sempre $P = \sigma \cdot da = 10$.

Para esta configuração de carregamento, $\sigma_2(x) = P \cdot \delta(x-b)$, onde $\delta(x-b)=1$ para $x=b$ e $\delta(x-b)=0$ para $x \neq b$. Considerando a função de ponderação associada - eq. (8) - tem-se K expresso pela eq. (9). Considerando $P = 1.0$, $a = 10$ e $b = 5$ temos, para este caso, $K = 4.864$. A expressão (9) é diferente daquela apresentada em [4] embora sejam equivalentes, apresentando resultados idênticos.

Na tabela 2 são apresentados os resultados deste caso 2, nas duas situações descritas. Alguns resultados parciais apresentados na tabela 1 não aparecem na tabela 2 onde K_{2an} é obtido a partir da integração numérica, eq. (2), da expressão analítica da função de ponderação e K_{2num} é o resultado da integração (eq. 2) a partir das expressões (4), (5) e (6).

$$K = (2P/\sqrt{\pi a}) [0.7071 (a/(a-b))^{1/2} + 0.0775 (a-b/a)^{3/2} + 0.4747 ((a-b)/a)^{1/2}] \quad (9)$$

Tabela 1: Resultados e Convergência da Solução de K_2 para $\sigma_2 = \sigma_{ref} = \text{Constante}$

NP1	11	21	51	101	201	301	501	1001	2001	5001	10001
dx	0.90	0.45	0.180	0.090	0.045	0.030	0.0180	0.009	0.0045	0.0018	0.0009
INT1	279.4045	279.4045	-	-	-	-	-	-	-	-	-
INT2	21.0007	21.0531	21.0746	21.0793	21.0811	21.0814	21.0816	21.0818	-	-	-
INT3	126.5051	126.4936	126.4914	126.4912	126.4911	-	-	-	-	-	-
G(a,1)	-0.4627	-0.4814	-0.4890	-0.4906	-0.4913	-0.4914	-0.4915	-	-	-0.4916	-
hh1	4.6822	4.6633	4.6564	4.6549	4.6544	4.6543	4.6542	-	-	4.6541	-
hh2	1.5861	1.5977	1.6103	1.6169	1.6209	1.6232	1.6249	1.6269	1.6284	1.6296	1.6303
K2num	6.2683	6.2610	6.2667	6.2719	6.2754	6.2775	6.2792	6.2811	6.2825	6.2838	6.2844
K2an	14.3234	10.2389	7.8149	7.0209	6.6325	6.5063	6.4079	6.3374	6.3048	6.2877	6.2832
K2an (2)	14.2954	10.2238	7.8088	7.0170	6.6310	N.A.	6.4073	6.3371	6.3046	6.2876	6.2831

K_{2an} (2)	6.2815	6.2809	6.2809
(2 fases)	(20001)	(50001)	(100001)

NP1 = número de pontos de integração no primeiro intervalo [0,0.9a]

dx = $0.9a/(NP1-1)$

G(a,1), INT1, INT2, INT3 = respectivamente equações 5, 6.a, 6.b, 6.c

hh1 e hh2 = resultado da integral (eq. 2) no 1º e no 2º sub-intervalo, respectivamente

K2an = K_2 obtido a partir da expressão analítica da função de ponderação

K2an (2) = idem K_2 , com integração em duas fases ou sub-intervalos

Para K2an usou-se um número de pontos de integração $N_{pan} = 10 \cdot NP1$

$K_{2num} = hh1 + hh2$

Tabela 2: Resultados para o Caso 2 (Carga Concentrada)
(NPI: número de pontos de integração; N.C.: não calculado)

NPI	CASO 1		CASO 2	
	K _{num}	K _{an}	K _{num}	K _{an}
501	4.0862	4.5394	N.C.	N.C.
1001	4.9619	4.8650	2.9187	3.2424
2001	4.8153	4.8640	N.C.	N.C.
5001	4.8444	4.8639	4.0856	4.5393
10001	4.8736	4.8637	4.9611	4.8637
20001	4.8589	4.8637	N.C.	N.C.
50001	4.8618	4.8636	4.8442	4.8636
100001	4.8647	4.8636	4.8734	4.8636
200001	N.C.	N.C.	4.8588	4.8636
500001	N.C.	N.C.	4.8617	4.8636
	da=0.01a	α = 100	da=0.001a	α = 1000

CONCLUSÕES

O Método das Funções de Ponderação, de Bueckner e Rice, [2] e [3], para a obtenção do Fator Intensidade de Tensões K_2 para um segundo carregamento a partir de uma dada solução prévia (K_{ref} - 'de referência') foi apresentado juntamente com um procedimento aproximado, sugerido por Petroski e Achenbach, [4], para a obtenção do campo de deslocamentos das faces da trinca. As limitações do método aproximado, citadas em [5], [6], [7] e [8], são poucas e facilmente contornadas. Assim a sua utilização é de amplo uso para a obtenção da referidas Funções de Ponderação.

O Método de Bueckner associado a aproximação sugerida por Petroski-Achenbach, é simples o suficiente para permitir a sua programação de forma fácil e imediata, devendo-se ter atenção ao fato de que as funções a serem integradas tem termos fortemente não-lineares, com singularidade em $x=a$, na ponta da trinca.

Foram apresentados dois exemplos de aplicação da programação desenvolvida para o caso de trinca em um semi-plano infinito tendo, como solução de referência, a distribuição uniforme de tensões na face da trinca.

NOTA: Este trabalho é uma versão ligeiramente modificada do trabalho indicado na refer. [15].

BIBLIOGRAFIA

- [1] ASME Boiler and Pressure vessel Code, Section XI. "Rules for Inservice Inspection of nuclear power Plants Components", 1992 Edition.
- [2] Bueckner, H. F., "A Novel Principle for the Computation of Stress Intensity Factors", Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik, ZAMM 50, 9, pp. 529-546, 1970.
- [3] Rice, J., "Some Remarks on Elastic Crack-Tip Stress Fields", Int. J. Solids Structures, 8, pp. 751-758, 1972.
- [4] Petroski, H. J., Achenbach, J. D., "Computation of the Weight Function From a Stress Intensity Factor", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 10, pp. 257-266, 1978.
- [5] Görner, F., Mattheck, C., Morawietz, P., Munz, D., "Limitations of the Petroski-Achenbach Crack Opening Displacement Approximation for the Calculation of Weight Functions", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 22, pp. 269-277, 1985.
- [6] Niu, X., Glinka, G., "On the 'Limitations of the Petroski-Achenbach Crack Opening Displacement Approximation for

the Calculation of Weight Functions' - Do They Really Exist?", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 26, pp. 701-706, 1987.

[7] Fett, T., "Limitations of the Petroski-Achenbach Procedure Demonstrated for a Simple Load Case", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 29, pp. 713-716, 1988.

[8] Niu, X., "Some requirements on the Reference Loading With Large Stress Gradient for the Calculation of Weight Functions Using the Petroski-Achenbach Method", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 36, pp. 167-172, 1990.

[9] Glinka, G., Shen, G., "Universal Features of Weight Functions for Cracks in Mode I", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 40, n. 6, pp. 1135-1146, 1991.

[10] Shen, G., Glinka, G., "Determination of Weight Functions from References Stress intensity Factors", Theoretical and Applied Fracture mechanics, Vol. 15, pp. 237-245, 1991.

[11] Mu, R., Reddy, D. V., "Stress Intensity Factors and Weight Functions for Semi-Elliptical Cracks Using Finite Element Alternating Method", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 48, n. 1, pp. 305-323, 1994.

[12] Wu, X. R., "Approximate Weigh Functions for Center and Edge cracks in Finite Bodies", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 20, n. 1, pp. 35-49, 1984.

[13] Liebster, T. D., Glinka, G., Burns, D. J., Mett, S. R., "Calculating Stress Intensity Factors for Internal Circumferential Cracks by Using Weight Functions", Pressure vessel and Piping Conference (PVP), Vol. 281, pp. 1-6, 1994.

[14] Labbens, R., Pellisier-Tanon, A., Heliot, J., "Practical Method for Calculating Stress-Intensity Factors Through Weight Functions", Mechanics of Crack Growth, pp. 368-384

[15] Miranda, Carlos A. J., Andrade, Arnaldo H. P., "Sobre o Método das Funções de Ponderação na Determinação de K", VI CGEN - Congresso Geral de Energia Nuclear, 1996.

SUMMARY

One can predict the behavior of a cracked body of a brittle material by the well established Linear-Elastic Fracture Mechanics. For this, one needs to know only the parameter Stress Intensity Factor K produced by the loading which, for each material, depends on the geometry and the loading itself. The Weight Function Method is used to get the K value for a second load configuration, applied over a cracked body, from which we know the displacements field (δ) in the crack surface and the K factor itself. In this work this methodology will be presented along with some approximated methods that produces good results and its easiness to be automat-d. It will be applied for some typical cases and the obtained numerical results will be compared with the analytical ones.