

2869

CONVECÇÃO EM ESCOAMENTO LAMINAR SOBRE
CORPO SÓLIDO COM GERAÇÃO INTERNA DE CALOR

ODETE VIEIRA GONÇALVES DE SOUZA



TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PRO-
GRAMAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDE-
RAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁ-
RIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Alfonso C. J. da Silva Teller
P. de A. M.
W. G.

JULHO DE 1968

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Affonso C. S. da Silva Telles pela sua amizade, e pela dedicação com que orientou este trabalho.

Ao Professor A. L. Coimbra pelas suas palavras de estímulo.

À Comissão de Qualificação Acadêmica da COPPE por ter me concedido a prorrogação do prazo, necessária para a conclusão deste trabalho.

À Vera pela competência no serviço de datilografia.

Ao José Rubens e aos meus pais pelo incentivo que sempre me deram.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	i.
ÍNDICE	1.
I - SUMÁRIO	2.
II - INTRODUÇÃO	3.
III - TEORIA	6.
III-1 - Análise	6.
III-2 - Variáveis adimensionais	9.
III-3 - Transformação de variáveis	10.
III-4 - Solução analítica	15.
III-5 - Solução numérica	22.
IV - ANÁLISE DOS RESULTADOS	26.
V - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	34.
BIBLIOGRAFIA	39.
APÊNDICE	40.
A. Transformação de variáveis	40.
B. Solução analítica	45.
C. Programa para o computador eletrônico digital IBM- 1130, em linguagem FORTRAN	53.
D. Tabelas de Resultados	56.

SUMÁRIO

Este trabalho trata da interação entre um corpo sólido aquecido e um fluido que passa por este corpo em regime de escoamento laminar, não confinado.

São apresentados métodos, analítico e numérico, de solução das equações que regem as leis básicas de conservação de quantidade de movimento, energia e massa, para o caso de escoamento bidimensional sem dissipação viscosa de um fluido Newtoniano de propriedades físicas constantes, sobre um corpo sólido de paredes finas com fontes térmicas distribuídas ao longo do corpo.

II

INTRODUÇÃO.

Nos últimos anos tem havido um interêsse crescente nos problemas de escoamento de fluidos sôbre corpos sólidos com transferência de calor, com condições térmicas sôbre a superfície do sólido, não uniformes.

Até então era comum especificar-se "a priori" a condição térmica do corpo pela prédeterminação da temperatura superficial ou do fluxo térmico, considerados constantes de modo geral. Nestes casos a solução do problema torna-se independente das propriedades físicas do corpo em questão.

Sparrow e Lin (1) apresentaram uma análise interessante para problemas de camadas limites com fluxo de calor préestabelecido e aplicaram suas análises a escoamentos com transferência, simultânea, de calor por convecção e radiação, para o caso de escoamento laminar e turbulento sôbre placa plana.

Paul Libby (2) fez uma complementação dos trabalhos de Sparrow e Lin, achando uma solução exata para o problema quando os números de Prandtl e Lewis são unitários e quando as propriedades de transferência são simplificadas. Libby também considerou a viscosidade (μ) independente de y (coordenada cartesiana no sentido perpendicular à superfície do corpo) de modo que o campo de velocidade podia ser

descrito pela equação de Blasius (isto é, fator de forma $\lambda = 0$).

Mas na maioria dos casos que surgem na prática as distribuições de temperatura e fluxo de calor obtidas no contorno são dependentes das propriedades físicas da própria parede e de modo geral são conhecidas de antemão. Portanto, os tratamentos dados para uma superfície isotérmica ou com fluxo constante de calor (ou $\text{grad } T = 0$) fogem à realidade e se aproximam de uma condição de idealidade.

Zeev Roten (3) considerou o caso de um escoamento laminar bidimensional de um fluido Newtoniano, incompressível e de propriedades físicas constantes, sobre uma parede muito fina na direção normal ao escoamento (de modo que as variações de temperatura nesta direção possam ser desprezadas). Considerou também que esta parede possuía em um certo trecho, fontes térmicas distribuídas, de intensidade constante, perdendo calor para o fluido não confinado. No entanto, a taxa de transferência de calor foi considerada como conhecida através da solução das equações da camada limite dada por Lighthill (4). A solução dada por Zeev Roten possui portanto o inconveniente de, por ter sido usada a solução de Lighthill, não ser boa para o fator de forma igual a zero. Além disso, a análise é incompleta, pois não gera a taxa de transferência e o campo da temperatura é dado em função da taxa de cisalhamento na parede, que é desconhecida. Deste modo, a interação entre o corpo aquecido e o fluido continua ignorada.

No presente trabalho consideraremos as referidas interações pela solução simultânea da equação da quantidade de movimento, das equações da energia para fluido e corpo, acopladas na superfície

pelas condições limite. Estas especificam a continuidade nos campos de temperatura e fluxo térmico.

A temperatura do corpo pode ser considerada como sendo função somente de x se fazemos as mesmas considerações que Zeev Roten, isto é, que a espessura da parede é suficientemente pequena, de tal modo que as variações de temperatura do corpo na direção normal ao escoamento possam ser desprezadas.

Consideraremos o corpo isolado em suas extremidades $x=0$ e $x=l$. Seguiremos o desenvolvimento dado pelo Meksyn (5) e introduziremos as variáveis adimensionais análogas àquelas por ele usadas.

III.

TEORIAIII-1) Análise

Consideremos um corpo sólido de paredes finas, de tal modo que possam ser desprezadas as variações de temperatura no sentido transversal à superfície, com geração interna de calor. Sobre este corpo temos o escoamento em regime laminar de um fluido Newtoniano, incompressível e de propriedades físicas constantes.

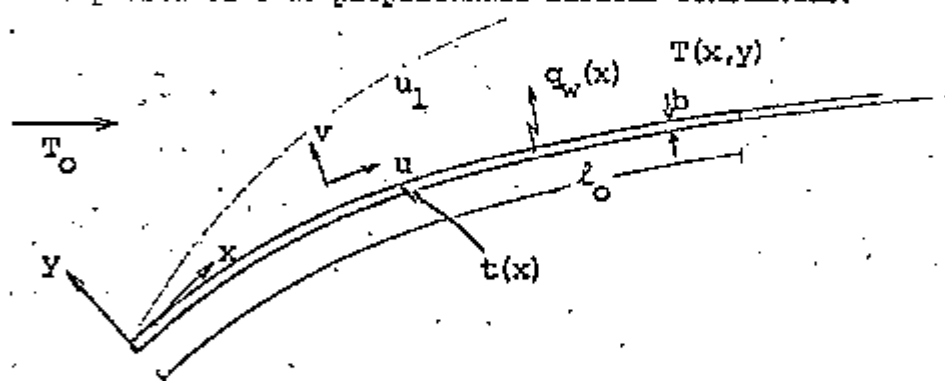


Fig. 1 - Camada limite sobre corpo sólido

Sendo:

- U_0 - velocidade do fluido, a ser determinada, tomada como parâmetro.
- b - espessura da parede do corpo sólido
- $q_w(x)$ - fluxo térmico na parede
- x - coordenada cartesiana ao longo da superfície do corpo

- y - coordenada cartesiana perpendicular à superfície do corpo
 u - componente da velocidade dentro da camada limite no sentido de x
 v - componente da velocidade dentro da camada limite no sentido de y
 u_1 - velocidade no limite da camada limite no sentido de x
 $T(x,y)$ - campo de temperatura do fluido dentro da camada limite
 $t(x)$ - campo de temperatura no corpo sólido
 T_0 - temperatura de entrada do fluido

O problema de escoamento bidimensional com transferência de calor e quantidade de movimento é regido pelas leis básicas de conservação de quantidade de movimento, energia e massa. Considerando-se escoamento em camada limite, com propriedades físicas constantes e sem dissipação de calor, estas leis são expressas pelas equações

Campo de velocidade:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \frac{du_1}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.b)$$

Campo de temperatura no fluido:

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_F \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2)$$

onde:

ρ - densidade do fluido

C_p - calor específico do fluido

k_F - condutividade térmica do fluido

Campo de temperatura no corpo:

$$k_s b \frac{d^2 t}{dx^2} + k_s b \frac{dA/dx}{A} \frac{dt}{dx} = - k_F \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} - b\dot{q} \quad (3)$$

onde:

k_s - condutividade térmica do corpo

A - área da seção transversal

\dot{q} - geração interna de calor

No presente trabalho, entretanto, consideraremos a \bar{A} área da seção transversal como sendo constante e, neste caso, a equação (3) se reduz a:

$$k_s b \frac{d^2 t}{dx^2} = - k_F \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} - b\dot{q} \quad (4)$$

O problema físico é univocamente especificado por meio das condições de contorno

$$u(x,0) = 0$$

$$v(x,0) = 0$$

$$T(x,0) = t(x)$$

$$k_F \left. \frac{\partial T}{\partial Y} \right|_{Y=0} = q(x)$$

$$u(x, \infty) = u_1(x)$$

$$T(x, \infty) = T_0$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

III-2) Variáveis adimensionais

Introduziremos agora as variáveis adimensionais semelhantes àsquelas usadas por Meksyn

$$\xi = \frac{1}{L} \int_0^x \frac{u_1}{U_0} dx \quad (5)$$

onde

$$L = b \left(\frac{k_S}{k_F} \right)^{2/3}, \text{ é uma dimensão característica} \quad (6)$$

$$n = \frac{1}{(2 \nu U_0 L \xi)^{1/2}} u_1(\xi) y \quad (7)$$

O fator de forma será definido por:

$$\lambda = - 2\xi \frac{d}{d\xi} (\ln u_1) \quad (8)$$

Sendo que nos casos em que λ é constante pode-se demonstrar que existe uma função $f = f(\eta)$ apenas, que determina unívocamente o campo de velocidade. Como λ é constante, para escoamentos em torno de uma cunha de $(-\lambda\pi)$, este será o caso que aqui consideraremos.

A função fluxo será dada por:

$$\psi = (2 \nu U_0 L \xi)^{1/2} f(\eta) \quad (9)$$

e os componentes da velocidade, dentro da camada limite, u e v , são expressos por derivadas desta função.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1(\xi) \frac{df}{d\eta} = u_1(\xi) f' \quad (10)$$

$$v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = - u_1 \left(\frac{\nu}{2 U_0 L \xi} \right)^{1/2} \left[f - (1 + \lambda)\eta f' \right] \quad (11)$$

Os campos de temperatura do corpo e fluido, respectivamente, serão dados por

$$\theta(\xi) = \frac{t - T_0}{T^*} \quad (12)$$

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{T - T_0}{T^*} \quad (13)$$

onde T^* será definido posteriormente.

III-3) Transformação de variáveis

III-3.1 - Equação da energia para o corpo sólido

$$k_s b \frac{d^2 t}{dx^2} = - k_F \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} - b \Omega \quad (4)$$

Efetuada a transformação de variáveis para t e T resulta

$$k_s b \frac{d^2 \theta}{dx^2} = - k_F \left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} - \frac{b}{T^*} \Omega \quad (14)$$

No nosso caso consideraremos λ constante e portanto podemos integrar (8) diretamente, o que resulta em

$$u_1 = C_1 \xi^{-\lambda/2} \quad (15)$$

onde podemos escolher um estado de referência para u_1 como sendo

$$u_1 (\xi = 1) = U_0 \quad (16)$$

uma vez que U_0 é um parâmetro que deixamos livre para ser determinado no momento oportuno. Neste caso, a equação (15) passa a ser descrita sob a forma

$$u_1 = U_0 \xi^{-\lambda/2} = C_2 x^{-\frac{\lambda}{\lambda+2}} \quad (17)$$

onde então

$$U_0 = C_2 (\ell)^{-\frac{\lambda}{\lambda+2}}$$

Efetuada as mudanças de variáveis do tipo (5) e (7), obtém-se:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \frac{d\xi}{dx} \quad (18)$$

e

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (19)$$

Substituindo estes resultados em (14) e tendo em vista a equação (17) obtém-se o seguinte resultado, após algumas simplificações:

$$\frac{d^2 Q}{d\xi^2} - \frac{\lambda}{2\xi} \frac{dQ}{d\xi} = - \left(\frac{bU_0}{2\nu} \right)^{1/2} \xi^{\frac{\lambda-1}{2}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \frac{L^2 \Omega}{k_s T^*} \xi^\lambda \quad (20)$$

Por simplicidade passaremos a denunciar o coeficiente do primeiro termo do segundo membro de H, portanto

$$H = \left(\frac{bU_0}{2\nu} \right)^{1/2} \quad (21)$$

Por outro lado, podemos também fazer o coeficiente de ξ^λ igual à unidade, sem perda de generalidade, e deste modo surge a definição de T^*

$$T^* = \frac{L^2 \Omega}{k_s} \quad (22)$$

Logo, podemos escrever a equação (20) sob a forma:

$$\xi^{\lambda/2} \left[\frac{d}{d\xi} \left(\xi^{-\lambda/2} \frac{dQ}{d\xi} \right) \right] = - H \xi^{\frac{\lambda-1}{2}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \xi^\lambda ;$$

ou ainda,

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^{-\lambda/2} \frac{dQ}{d\xi} \right) = - H \xi^{-1/2} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \xi^{\lambda/2} \quad (23)$$

III-3.2 - Campo de temperatura do fluido

Como já foi visto a equação da energia é

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_F \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2)$$

Passando para a variável θ e sabendo-se que o número de Prandtl é dado por $Pr = (C_p \nu) / k_F$ vem que

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (24)$$

Fazendo a transformação para as variáveis adimensionais e usando as expressões u , e v , (10) e (11), obteremos

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 2 Pr \xi f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - Pr f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (25)$$

III-3.3 - Equação do campo de velocidade

Como vimos este é dado por

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.a)$$

Efetuada as transformações de variáveis do mesmo tipo das já vistas anteriormente, como por exemplo:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{du_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{u_1}{U_0 L} \frac{du_1}{d\xi};$$

a equação (1.a) se transformará em:

$$\begin{aligned} & - \frac{U_0^2}{2L} \xi^{-3\lambda/2-1} f' \{ \lambda f' + (1+\lambda) \eta f'' \} - \\ & - \frac{U_0^3}{(2\nu U_0 L \xi)} \xi^{-3\lambda/2} (f - (1+\lambda) \eta f') f'' = \\ & = - \frac{U_0^2}{L} \xi^{-3\lambda/2-1} \left(\frac{\lambda}{2} \right) + \frac{\nu U_0^3}{2\nu U_0 L \xi} \xi^{-3\lambda/2} f''' \end{aligned} \quad (26)$$

A qual após devidamente simplificada, resultará na conhecida e equação de Faulkner Skan.

$$f''' + f f'' = \lambda \left[1 - (f')^2 \right] \quad (27)$$

Resumindo, as três equações que regem o processo, nas provas variáveis adimensionais, passam a ter a seguinte forma:

equação do movimento $f''' + f f'' = \lambda \left[1 - (f')^2 \right] \quad (27)$

equação da energia para o fluido $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 2 Pr \xi f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - Pr f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (25)$

equação da energia para o corpo $\frac{d}{d\xi} \left(\xi^{-\lambda/2} \frac{d\theta}{d\xi} \right) = - \Pi \xi^{-1/2} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \xi^{\lambda/2} \quad (23)$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{du_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{u_1}{U_0 L} \frac{du_1}{d\xi} ;$$

a equação (1.a) se transformará em:

$$\begin{aligned} & - \frac{U_0^2}{2L} \xi^{-3\lambda/2-1} f' \{ \lambda f' + (1+\lambda) \eta f'' \} - \\ & - \frac{U_0^3}{(2\nu U_0 L \xi)} \xi^{-3\lambda/2} (f - (1+\lambda) \eta f') f'' = \\ & = - \frac{U_0^2}{L} \xi^{-3\lambda/2-1} \left(\frac{\lambda}{2} \right) + \frac{\nu U_0^3}{2\nu U_0 L \xi} \xi^{-3\lambda/2} f''' \end{aligned} \quad (26)$$

A qual após devidamente simplificada, resultará na conhecida e equação de Faulkner Skan.

$$f''' + f f'' = \lambda \left[1 - (f')^2 \right] \quad (27)$$

Resumindo, as três equações que regem o processo, nas provas variáveis adimensionais, passam a ter a seguinte forma:

equação do movimento $f''' + f f'' = \lambda \left[1 - (f')^2 \right] \quad (27)$

equação da energia para o fluido $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 2 Pr \xi f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - Pr f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (25)$

equação da energia para o corpo $\frac{d}{d\xi} \left(\xi^{-\lambda/2} \frac{dQ}{d\xi} \right) = - \Pi \xi^{-1/2} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \xi^{\lambda/2} \quad (23)$

Equação do movimento

$$f'(\infty) = 1$$

$$f(0) = f'(0) = 0$$

Equação da energia para o fluido

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\substack{\eta=0 \\ \xi=1}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=\infty} = 0, \quad \theta \Big|_{\eta=\infty} = 0$$

$$\theta = \theta_0 \text{ em } \eta=0$$

Equação da energia para o corpo.

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0$$

III-4) Solução analítica das equações

III-4.1 - Equação do movimento

Consideraremos como conhecida a solução da equação no campo de velocidade na camada limite através da solução encontrada no

Meksyn, ou mais precisamente, pela solução de Hartree.

Portanto, a solução será do tipo

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \eta^n}{n!} \quad (28)$$

série que satisfaz às condições de contorno:

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(\infty) = 1$$

III-4.2 - Equações da energia para fluido e corpo

Resolveremos a equação da energia para fluido e corpo tendo em vista que

$$T(x,0) = t(x)$$

isto é, que a temperatura do fluido se iguala à do corpo na superfície deste.

Usando o método de separação de variáveis, para resolvermos a equação da energia para o fluido, e fazendo

$$\theta = X(\xi) Y(\eta) \quad (29)$$

ao aplicarmos o método à equação (25) teremos o seguinte resultado

$$\frac{Y'' + Pr f Y'}{2 Pr f' Y} = \xi \frac{X'}{X} = \gamma_j \quad (30)$$

onde γ_j são os valores característicos da solução ("eigenvalues").

Teremos, assim, duas equações:

$$X' - \frac{\gamma_j}{\xi} X = 0 \quad (31)$$

e.

$$Y'' + Pr f Y' - 2 Pr Y_j f' Y = 0 \quad (32)$$

A solução da equação (31) será dada por:

$$X_j = C \xi^{Y_j} \quad (33)$$

e a solução da equação (32) será uma solução em série do tipo Frobenius dada por:

$$Y_j = A'_j (\eta) + B'_j M_j (\eta) \quad (34)$$

onde as soluções base da equação (34), $N_j (\eta)$ e $M_j (\eta)$, serão definidas por

$$N_j (\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \eta^n}{n!} \quad (35)$$

e

$$M_j (\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \eta^n}{n!} \quad (36)$$

sendo que as seguintes condições podem ser definidas, sem perda de generalidade

$$\left. \begin{array}{l} N_j (0) = 1 \\ N'_j (0) = 0 \end{array} \right\} \quad (37)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} M_j (0) = 0 \\ M'_j (0) = 1 \end{array} \right\} \quad (38)$$

Como a equação (25) é uma equação elíptica linear, podemos aplicar o princípio de superposição de soluções e, neste caso, fazendo $B'C=B$ e $A'C=A$, teremos

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \xi^{Y_j} \left(A_j N_j(\eta) + B_j M_j(\eta) \right). \quad (39)$$

Para solucionarmos a equação (39) precisamos determinar as condições de contorno, para acharmos os coeficientes B_j e A_j .

$$\left. \begin{array}{l} \eta \rightarrow \infty \quad \theta = 0 \\ \eta \rightarrow 0 \quad \text{a solução deve satisfazer à equação (23)} \end{array} \right\} \quad (40)$$

Para satisfazer à condição (40), temos que ter

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi^{Y_j} \left(A_j N_j(\infty) + B_j M_j(\infty) \right) = 0 \quad (41)$$

logo

$$r_j = - \frac{A_j}{B_j} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{M_j(\eta)}{N_j(\eta)}. \quad (42)$$

Assim sendo, precisamos do valor assintótico da relação entre as duas soluções base.

Pelas propriedades gerais das soluções em série (Morse e Feshbach (6)) e, considerando-se que estas duas soluções base são independentes, neste caso o Wronskian é diferente de zero, podemos determinar esta relação como sendo:

$$r_j = \frac{M_j(\omega)}{N_j(\omega)} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau} \int_0^{\tau} f(\eta) d\eta}{N_j^2(\tau)} d\tau \quad (43)$$

Esta integral pode, então, ser resolvida pelo método do "steepest descend", fazendo-se a seguinte transformação de variáveis, tendo como base a solução dada por Meksyn para a equação do movimento.

Definindo uma nova variável, teremos:

$$\tau = \Pr \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta = \eta^3 \sum_{m=0}^{\infty} E_m \eta^m ; \quad (44)$$

logo

$$r_j = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{N_j^2(\tau)} \frac{d\eta}{d\tau} d\tau ; \quad (45)$$

e

$$\frac{1}{N_j^2} \frac{d\eta}{d\tau} = \tau^{-2/3} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \tau^{m/3} \quad (46)$$

Assim sendo, temos que d_m é 1/3 do coeficiente de η^{-1} na expressão do desenvolvimento de $(1/N_j^2) \tau^{-(m+1)/3}$ em potências ascendentes de η :

$$(c_0 + c_1 \eta + c_2 \eta^2 \dots)^{-(m+1)/3} (b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 \dots) =$$

$$3 \sum_{m=0}^{\infty} d_m \eta^m \quad (47)$$

E a solução será dada por:

$$r_j = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right) \quad (48)$$

onde $\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right)$ são as funções Gamma.

Para resolução da equação precisamos de outra relação entre A_j e B_j e esta relação pode ser determinada, substituindo-se diretamente (39) em (23).

Como as temperaturas se igualam na superfície, antes de fazer esta substituição, precisamos determinar $\partial\theta/\partial\eta|_{\eta=0}$ e

$$\partial\theta/\partial\xi|_{\eta=0} :$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \xi^{\gamma_j} \quad (49)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\Big|_{\eta=0} = - \sum_{j=1}^{\infty} B_j \gamma_j r_j \xi^{\gamma_j-1} \quad (50)$$

Assim, a equação (23) se transforma em:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j \gamma_j r_j \xi^{\gamma_j-1/2-1} \right) = H \xi^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \xi^{\gamma_j} - \epsilon^{\lambda/2} \quad (51)$$

Derivando o primeiro membro, em relação a ξ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} B_j r_j Y_j \left(Y_j - \frac{\lambda}{2} - 1 \right) \xi^{Y_j - (\lambda+2)} = \\ & = H \sum_{j=1}^{\infty} B_j \xi^{Y_j - (\lambda+1)/2} + 1. \end{aligned} \quad (52)$$

Fazendo $Y_1 = 0$ resulta

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{\infty} B_j r_j Y_j \left(Y_j - \frac{\lambda}{2} - 1 \right) \xi^{Y_j - (\lambda+2)} = \\ & = H \sum_{j=2}^{\infty} B_j \xi^{Y_j - (\lambda+1)/2} + H B_1 \xi^{-(\lambda-1)/2} + 1. \end{aligned} \quad (53)$$

Podemos, então, determinar os valores característicos

$$Y_1 = 0$$

$$Y_2 = \lambda + 2$$

$$Y_3 = (\lambda + 5)/2$$

$$Y_j = \lambda + 2 + \left(\frac{j-2}{2} \right) \left(\frac{\lambda+5}{2} \right) \quad \text{para } j \text{ par} \quad (54)$$

$$Y_j = \left(\frac{j-1}{2} \right) \left(\frac{\lambda+5}{2} \right) \quad \text{para } j \text{ impar.} \quad (55)$$

E os B_j vão satisfazer à equação (53) quando:

$$B_2 = \frac{2}{r_2 (\lambda + 2)^2} \quad (56)$$

$$B_j = \frac{H B_{j-2}}{\gamma_j (\gamma_j - (\lambda + 2)/2) r_j} \quad (57)$$

Neste ponto resta apenas a determinação do coeficiente B_1 , o que será feito no capítulo seguinte, satisfazendo-se a condição de contorno em $\xi = 1$ ($x = \ell$).

O problema analítico ficaria assim encerrado com a determinação de uma solução única e estável. Acontece, porém, que a série obtida para as relações r_j ,

$$r_j = r_j(\lambda, Pr) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right),$$

é divergente para todos os valores comuns do número de Prandtl.

Este fato obrigou-nos a optar por uma solução numérica das equações que geram as funções características $M_j(\eta)$ e $N_j(\eta)$.

III-5) Solução numérica

Vamos, então, resolver as equações que definem o campo da velocidade e temperatura do fluido, simultaneamente, pelo método de Runge Kutta, utilizando os valores característicos determinados anteriormente, através da equação do campo de temperatura no corpo.

Na realidade vamos resolver simultaneamente as duas equações:

$$f''' + f f'' = \lambda [1 - (f')^2] \quad (58)$$

$$Y'' + Pr f Y' - 2 Pr \gamma_j f' Y = 0 \quad (59)$$

determinando assim os valores de $M_j(n)$ e $N_j(n)$, soluções base da equação (59)

Conhecidos estes valores podemos determinar o campo de temperatura do fluido, com auxílio da equação (39) reescrita sob a forma,

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \xi^{\gamma_j} (M_j(n) - r_j N_j(n)) \quad (60)$$

Por outro lado, pela expressão obtida para os B_j ,

$$B_j = \frac{H B_{j-2}}{r_j \gamma_j (\gamma_j - (\lambda + 2)/2)}$$

podemos verificar que somente os coeficientes correspondentes aos índices ímpares dependem de B_1 , isto é, podemos determinar a seguinte relação:

$$B_j = \frac{H^{\frac{j-1}{2}} B_1}{\prod_{j=3}^j r_j \gamma_j (\gamma_j - (\lambda + 2)/2)} \quad \text{para } j=3,5,7.. \quad (61)$$

Logo, todas as parcelas de θ relativas aos índices ímpares serão multiplicadas por B_1 .

Devido a este fato, calculamos então a função θ , dividindo-a em duas partes

$$\theta = \theta_{\text{par}} + B_1 \theta_{\text{impar}} \quad (62)$$

Tomamos, inicialmente, $B_1 = 1$ e calculamos θ_{par} e θ_{impar} separadamente e depois computamos θ segundo a equação (62). E, pela condição de contorno

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\substack{\eta=0 \\ \xi=1}} = 0$$

podemos determinar o valor real de B_1 , o qual será dado por:

$$B_1 = \frac{\frac{\partial \theta_{\text{par}}}{\partial \xi}}{\frac{\partial \theta_{\text{impar}}}{\partial \xi}} \bigg|_{\substack{\eta=0 \\ \xi=1}} \quad (63)$$

Teremos, assim, determinado todos os coeficientes necessários para o cálculo dos valores de θ , restando apenas efetuar o somatório segundo a equação (60).

Na resolução do problema foram utilizados os computadores eletrônicos do Departamento de Cálculo Científico da COPPE-UFRJ e do Centro de Cálculo Numérico da EE-UFMG, ambos do tipo IBM-1130. Foi usada também a subrotina RK3-1, da IBM, para cálculo pelo método Runge Kutta de um sistema de seis equações diferenciais ordinárias lineares de 1.^a ordem.

Quanto aos valores característicos (γ_j), tomamos somente os 10 primeiros valores consecutivos, pois verificamos que es-

tes seriam suficientes, uma vez que todos os B_{10} calculados eram razoavelmente pequenos (da ordem de 10^{-5}) e que a diferença $[M_{10} - x_{10} N_{10}]$ eram menores que a unidade; assim sendo, os termos subsequentes da série que define o campo de temperatura do fluido poderiam ser desprezados face aos primeiros termos.

Variamos ξ desde zero até 1., com um incremento de 0.2, e η desde zero até um valor para o qual $\theta \approx 0$, com o incremento de 0.1, imprimindo apenas de 0.2 em 0.2.

Os resultados obtidos encontram-se no apêndice, sob a forma de tabelas obtidas diretamente do computador, sendo que alguns destes são apresentados em gráficos, no capítulo seguinte.

IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Obtivemos oito conjuntos de resultados para os perfis de temperatura $\theta(\xi, \eta)$, fazendo variar o número de Prandtl assim como o fator de forma.

Como o fator de forma (Maksyn) pode variar de (0.1) até (0.199), isto é, desde o valor correspondente ao ponto de estagnação até aquele do ponto de separação, escolhemos 3 valores para λ dentro desta faixa, a saber: $\lambda = .5, .0, .1$.

Atribuímos ao número de Prandtl os seguintes valores: $Pr = .76, 2.0, 5.0$ e 7.0 .

Apresentamos, então, alguns resultados representativos, dentre todos aqueles computados, sob a forma de gráficos.

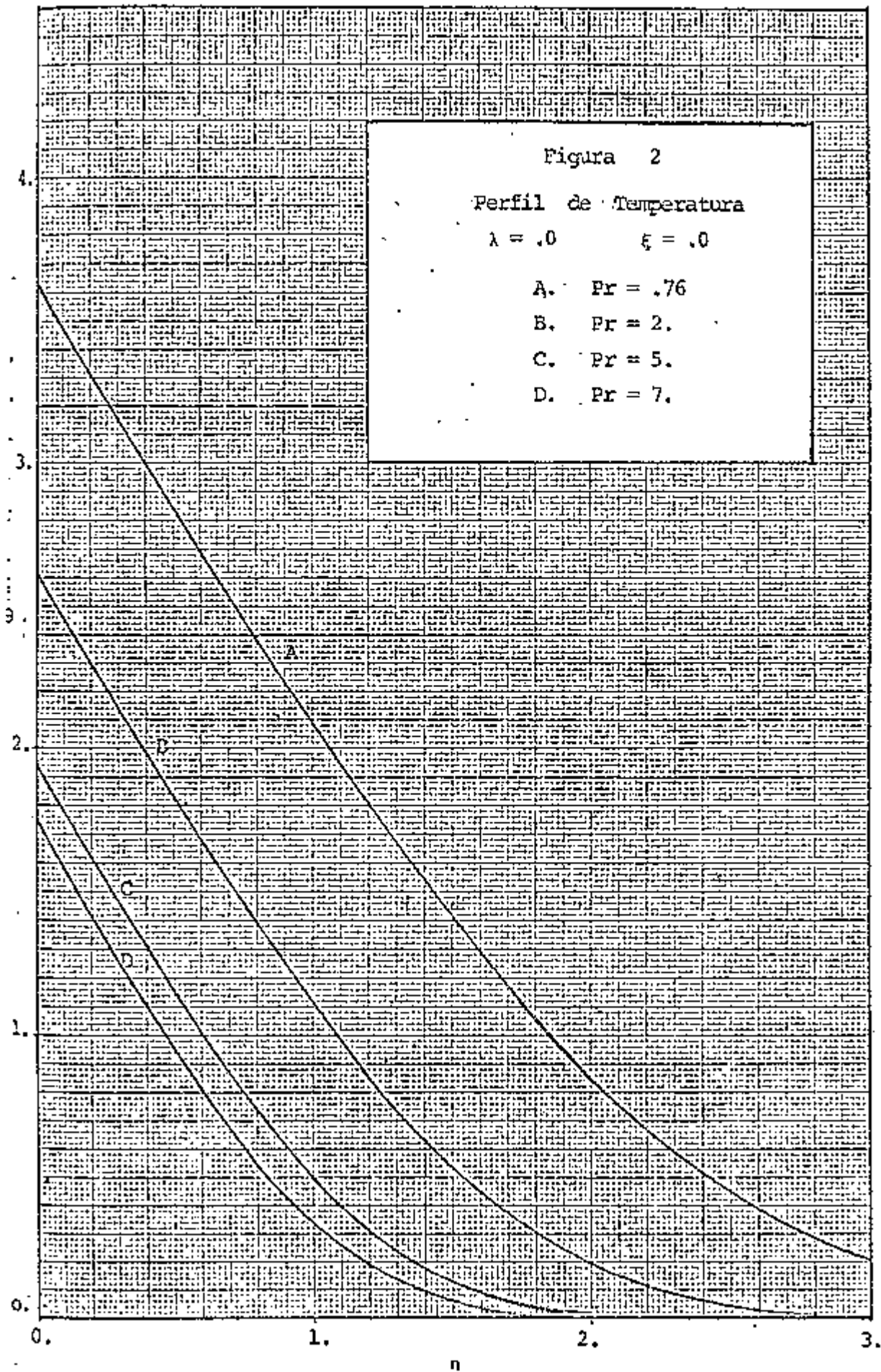
As figuras 2, 3 e 4 apresentam os perfis de temperatura, nas variáveis adimensionais, no ponto $\xi = 0$.

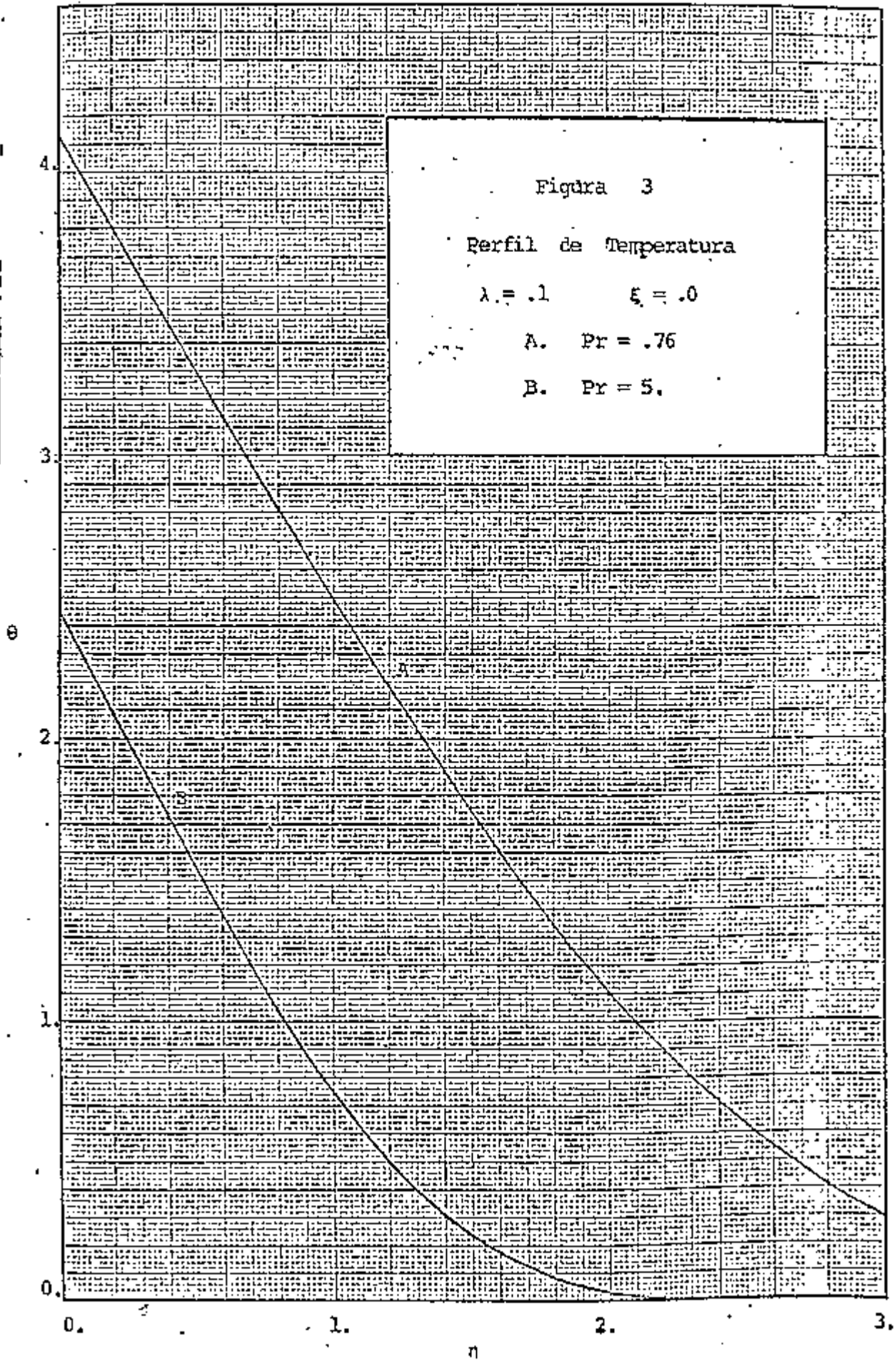
Como podemos ver, quanto maior o número de Prandtl, menor é a temperatura em $y = 0$ e mais rapidamente o perfil na variável adimensional tende a zero, isto é, mais rapidamente T tende a T_0 .

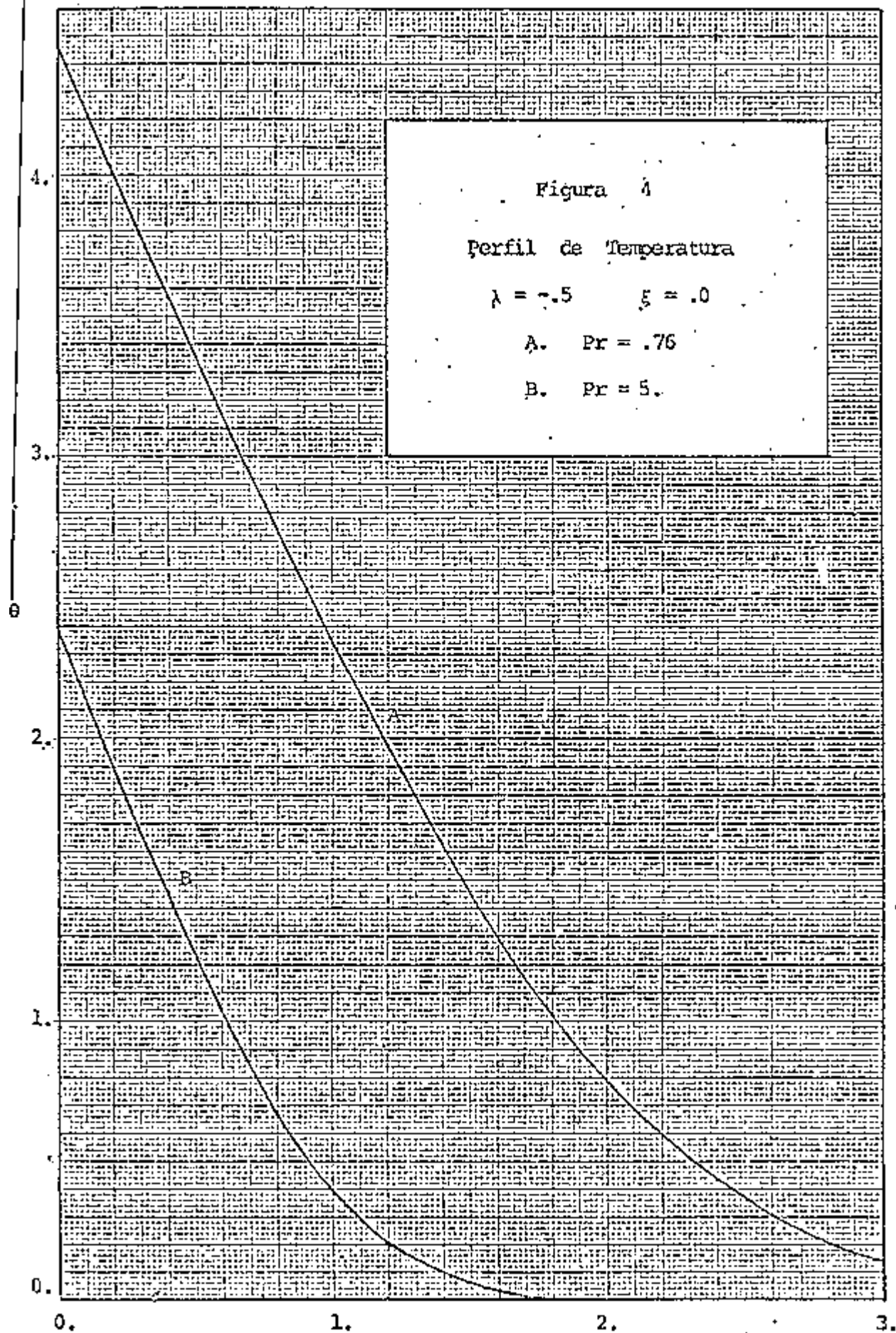
Na figura 5, temos dois perfis de temperatura correspondentes a 2 pontos ($\xi=0$ e $\xi=.8$) do corpo sólido, para os mesmos valores do número de Prandtl e do fator de forma. Neste caso, notamos

que quanto mais nos aproximamos do fim da placa, mais alta é a temperatura do fluido próximo à parede (apesar de em certo ponto ela passar por um mínimo), mas que rapidamente, ao nos afastamos da parede do corpo sólido, esta temperatura tende a um mesmo valor para os n correspondentes em qualquer ponto da placa.

Além disso, apresentamos, também, duas tabelas, sendo uma para os valores dos B_j e outra para os r_j . Por meio destas tabelas podemos notar que, para qualquer par de valores do número de Prandtl e do fator de forma, foram suficientes tomarmos apenas os 10 primeiros termos da série que define o campo de temperatura do fluido.







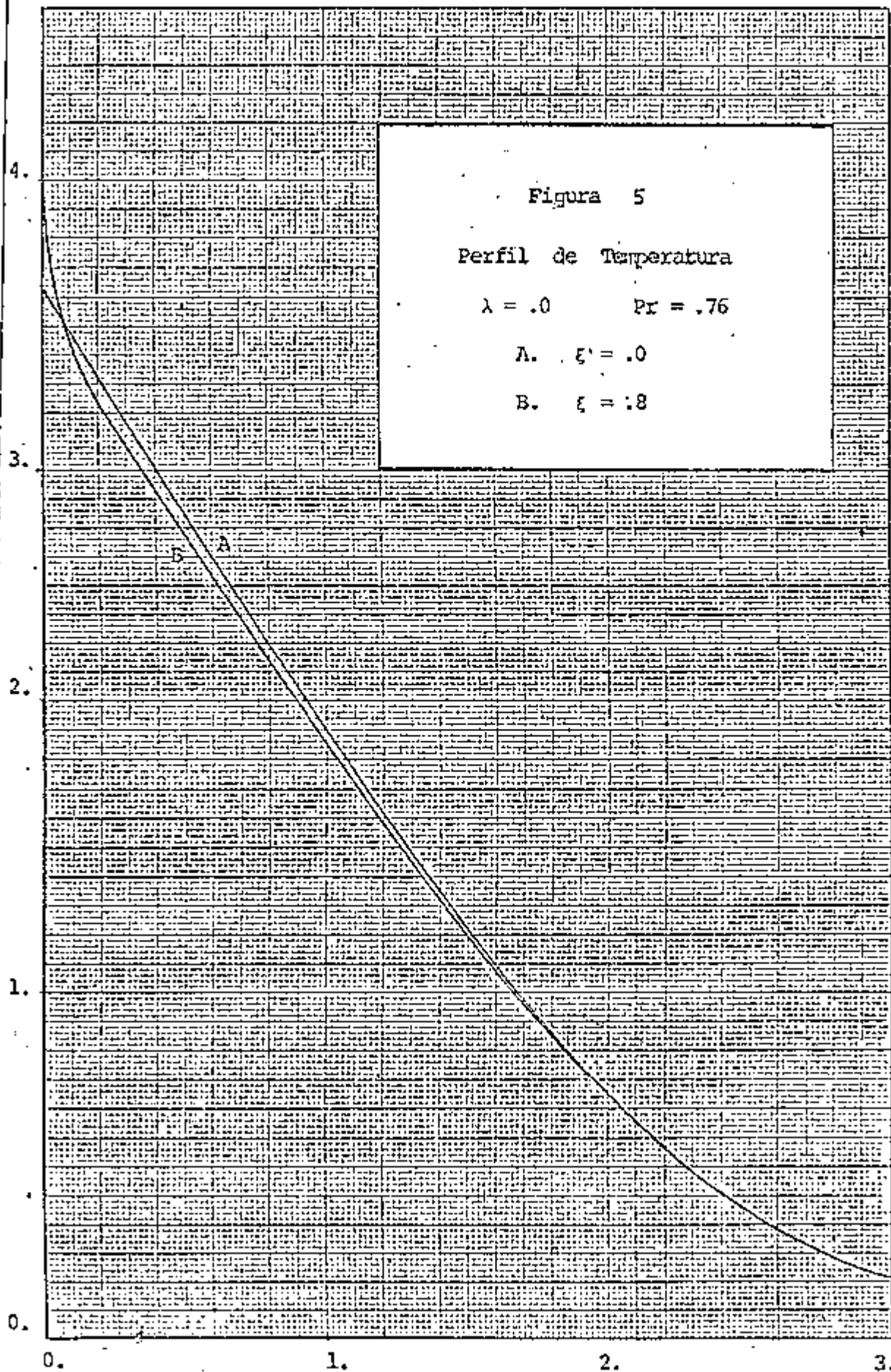


TABELA I - Valores de B_j

Pr =	$\lambda = 0$				$\lambda = .1$		$\lambda = -.5$	
	0.76	2.0	5.0	7.0	0.76	5.0	0.76	5.0
B_2	.4252	.5889	.8002	.8954	.3566	.6607	.8219	.1592x10 ⁻¹
B_4	.2950x10 ⁻¹	.5650x10 ⁻¹	.1042	.1305	.7085x10 ⁻¹	.2431	.9042x10 ⁻¹	.3361
B_6	.8844x10 ⁻³	.2340x10 ⁻²	.5864x10 ⁻²	.8213x10 ⁻²	.1833x10 ⁻²	.1167x10 ⁻¹	.4151x10 ⁻²	.2950x10 ⁻¹
B_8	.1522x10 ⁻⁴	.5568x10 ⁻⁴	.1893x10 ⁻³	.2967x10 ⁻³	.2727x10 ⁻⁴	.3223x10 ⁻³	.1079x10 ⁻³	.1463x10 ⁻²
B_{10}	.1730x10 ⁻⁶	.8743x10 ⁻⁶	.4036x10 ⁻⁵	.7075x10 ⁻⁵	.2679x10 ⁻⁶	.5878x10 ⁻⁵	.1840x10 ⁻⁵	.4749x10 ⁻⁴
B_3/B_1	.2425	.3358	.4562	.5104	.2176	.4032	.3108	.5994
B_5/B_1	.1370x10 ⁻¹	.2623x10 ⁻¹	.4839x10 ⁻¹	.6057x10 ⁻¹	.1083x10 ⁻¹	.3722x10 ⁻¹	.2420x10 ⁻¹	.8944x10 ⁻¹
B_7/B_1	.3620x10 ⁻³	.9573x10 ⁻³	.2397x10 ⁻²	.3357x10 ⁻²	.2507x10 ⁻³	.1597x10 ⁻²	.8991x10 ⁻³	.6344x10 ⁻²
B_9/B_1	.5686x10 ⁻⁵	.2077x10 ⁻⁴	.7063x10 ⁻⁴	.1106x10 ⁻³	.3439x10 ⁻⁵	.4068x10 ⁻⁴	.2006x10 ⁻⁴	.2698x10 ⁻³
B_1	-1.544	-1.560	-1.581	-1.590	-1.643	-1.821	-2.156	-2.294

TABELA II - Valores de r_j

Pr =	$\lambda = 0$				$\lambda = .1$		$\lambda = -.5$	
	0.76	2.0	5.0	7.0	0.76	5.0	0.76	5.0
r_1	2.3460	1.6740	1.2260	1.0940	2.5130	1.3450	2.0600	1.0300
r_2	1.1750	0.8489	0.6247	0.5583	1.2710	0.6863	1.0810	0.5582
r_3	1.0990	0.7941	0.5845	0.5224	1.2000	-0.6482	0.9533	0.5943
r_4	0.9151	0.6617	0.4873	0.4355	1.1870	0.6408	0.8080	0.4210
r_5	0.8849	0.6400	0.4713	0.4213	0.9723	0.5244	0.7608	0.3971
r_6	0.7942	0.5747	0.4232	0.3783	0.8726	0.4704	0.6914	0.3617
r_7	0.7767	0.5620	0.4139	0.3700	0.8560	0.4614	0.6647	0.3480
r_8	0.7193	0.5206	0.3834	0.4327	0.7925	0.4269	0.6214	0.3258
r_9	0.7073	0.5119	0.3771	0.3371	0.7812	0.4208	0.6034	0.3166
r_{10}	0.6664	0.4824	0.3553	0.3176	0.7357	0.3962	0.5729	0.3008

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A maior dificuldade encontrada, ao tentamos a solução analítica para o problema em questão, foi a da resolução da integral

$$r_j = \int_0^{\infty} \frac{e^{-Pr \int_0^n f(\eta) d\eta}}{N_j(n)} dn$$

Para tal, usamos a técnica da transformação desta, por meio do método de "steepest descend", em uma série infinita. Encontramos, então, para os coeficientes da série valores tais que a mesma seria divergente.

Assim sendo, sugerimos que se tente resolver esta integral com auxílio de uma transformação de Euler, que venha a tornar esta série convergente ou semiconvergente.

Quanto à solução numérica, os resultados encontrados estão dentro do limite de expectativa, pois, como vimos no capítulo anterior, os perfis de temperatura são análogos para mesmos fatores de forma, quando variamos o fluido, diminuindo apenas a espessura da camada limite, quanto mais aumentamos o número de Prandtl (Fig. 2), isto é, quanto mais viscoso é o líquido.

Infelizmente, não possuímos dados experimentais para

confrontamos os resultados teóricos obtidos.

Assim sendo, não fizemos variação quanto à geração de calor, permanecendo esta implícita no perfil adimensional de temperatura, uma vez que a geração está incluída na variável T^* e que esta só aparece nas variáveis φ e θ , devido às simplificações introduzidas na resolução das equações.

A temperatura da superfície do corpo passa por um mínimo entre $x = 0$ e $x = \ell$, para qualquer par de valores escolhido do número de Prandtl e fator de forma, aumentando sensivelmente, a partir de um x equivalente a $\xi = 0.6$.

Isto provavelmente ocorre devido ao fato das extremidades do corpo serem isoladas e, portanto, a perda de calor do corpo para o meio ambiente é maior em algum ponto entre os extremos considerados. Como a variação da temperatura, na extremidade inicial, é pequena, podemos quase concluir que a consideração, geralmente feita, de que a temperatura da parede é constante, é válida para esta parte do corpo, mas que se afasta muito da realidade no outro extremo.

Sugerimos, também, para estudos futuros, que o problema seja resolvido, considerando-se o corpo sólido como ilimitado. Neste caso, não mais será válida a condição de contorno

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0$$

e ter-se-á uma pequena dificuldade na determinação do coeficiente B_1 , uma vez que não podemos dizer que $\theta(\xi=0) = 0$, pois o problema se tor

ria superespecificado, ocasionando uma instabilidade na solução de vez que esta seria divergente.

NOMENCLATURA

A	área da seção transversal do corpo sólido
A_j	constante de integração da equação da energia para o fluido
a_n	coeficientes que definem a série da equação (28)
b	espessura da parede do corpo sólido
b_n	coeficientes que definem a série da equação (35)
B_j	constante de integração da equação da energia para o fluido
c_n	coeficientes que definem a série da equação (36)
C_p	calor específico do fluido
f	variável adimensional relacionada à função fluxo
k_f	condutividade térmica do fluido
k_s	condutividade térmica do corpo sólido
l	comprimento do corpo considerado
L	dimensão característica
$M_j(n)$	solução base da equação (32)
$N_j(n)$	solução base da equação (32)
Pr	número adimensional de Prandtl
$q_w(x)$	fluxo térmico na parede do corpo sólido
r_j	relação entre os coeficientes A_j e B_j quando $n \rightarrow \infty$
$t(x)$	temperatura da superfície do corpo
$T(x,y)$	temperatura do fluido dentro da camada limite
T_o	temperatura do fluido fora da influência da camada limite
T^*	temperatura de referência definida pela equação (22)

u	componente da velocidade dentro da camada limite na direção de x
u_1	velocidade do fluido no limite da camada limite
U_0	velocidade do fluido no extremo da camada limite no ponto $x = l$
v	componente da velocidade dentro da camada limite na direção de y
x	coordenada cartesiana ao longo da superfície do corpo
y	coordenada cartesiana perpendicular à superfície do corpo
γ_j	valores característicos da solução da equação (25)
η	variável adimensional relacionada a y e ξ
θ	campo de temperatura do fluido
θ_s	temperatura adimensional na superfície do corpo
λ	fator de forma do corpo sólido
ν	viscosidade cinemática
ψ	função fluxo
ξ	variável adimensional relacionada a x
ρ	densidade do fluido
Ω	geração interna de calor

BIBLIOGRAFIA

- (1) M.Sparrow e S.H.Lin, 'Boundary layers with prescribed heat flux-application to simultaneous convection and radiation',
Int. J. Heat Mass Transfer, 8 , 437-448 , (1965).
- (2) P.A.Libby, 'Remarks on the laminar boundary layer with prescribed energy flux', Int. J. Heat Mass Transfer; 8 ,
1254-1257, (1965).
- (3) Z.Rotem, 'The effect of thermal conduction of the wall upon convection from a surface in a laminar boundary layer',
Int. J. Heat Mass Transfer; 10 , 461-466 , (1967)
- (4) M.J.Lighthill, 'Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer', Proc.R.Soc; 202A ,
359-377 , (1950).
- (5) D.Maksyn, 'New methods in laminar boundary-layer theory',
Pergamon Press , N.Y. - London , (1961).
- (6) P.M.Morse e H.Peshbach, 'Methods of theoretical physics', vol.I,
McGraw Hill , N.Y. , (1953).

APÊNDICE

A. Transformação de Variáveis

A.1 Equação da energia para o corpo sólido

Temos que a equação da energia para o corpo sólido é:

$$k_s b \frac{d^2 t}{dx^2} = -k_F \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = b \quad (\text{A.1})$$

ou, passando para as variáveis θ e ξ , respectivamente, vem que

$$k_s b \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -k_F \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{b}{r^*} \Omega \quad (\text{A.2})$$

Efetuada as transformações relativas às variáveis x e y para ξ e η , teremos, para cada parcela:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{u_1}{U_0 L} \frac{d\theta}{d\xi} \quad (\text{A.3})$$

logo,

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u_1}{U_0 L} \frac{d\theta}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \left(\frac{u_1}{U_0 L} \right)^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{u_1}{(U_0 L)^2} \frac{du_1}{d\xi} \frac{d\theta}{d\xi}; \quad (\text{A.4})$$

e teremos também que

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_1}{(2 \sqrt{U_0 L \xi})^{1/2}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.4) e (A.5) em (A.2) resulta que

$$k_s b \left(\frac{u_1}{U_0 L} \right)^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + k_s b \frac{u_1}{(U_0 L)^2} \frac{du_1}{d\xi} \frac{d\theta}{d\xi} =$$

$$- \frac{k_F u_1}{(2\sqrt{U_0 L \xi})^{1/2}} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \frac{b}{T^*} \Omega \quad (A.6)$$

Consideraremos λ constante, e neste caso a equação

$$\frac{1}{u_1} \frac{du_1}{d\xi} = - \frac{\lambda}{2\xi} \quad (A.7)$$

pode ser integrada diretamente. Como foi definido anteriormente, $u_1 = U_0$ para $\xi = 1$, logo, após integração e substituição da condição de contorno teremos

$$u_1 = U_0 \xi^{-\lambda/2} \quad (A.8)$$

Tendo em vista (A.7) e (A.8), a equação (A.6) passa a ter a seguinte forma, depois de parcialmente simplificada:

$$\left(\frac{\xi^{-\lambda/2}}{L} \right)^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{\xi^{-\lambda}}{L^2} \left(\frac{-\lambda}{2\xi} \right) \frac{d\theta}{d\xi} =$$

$$- \frac{k_F}{k_s b} \frac{U_0 \xi^{-\lambda/2} L^2}{(2\sqrt{U_0 L \xi})^{1/2}} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \frac{\Omega}{k_s T^*} \xi^\lambda \quad (A.9)$$

Multiplicando-se a equação por $(L^2 \xi^\lambda)$, vem que:

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} - \frac{\lambda}{2\xi} \frac{d\theta}{d\xi} = - \frac{k_F}{k_s b} \frac{U_0 \xi^{\lambda/2} L^2}{(2\sqrt{U_0 L \xi})^{1/2}} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \frac{L^2 \Omega}{k_s T^*} \xi^\lambda \quad (A.10)$$

ou, simplificando o coeficiente do primeiro termo do segundo membro:

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} - \frac{\lambda}{2\xi} \frac{d\theta}{d\xi} = - \left(\frac{hU_0}{2\nu} \right)^{1/2} \xi^{(\lambda-1)/2} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \frac{L^2 \Omega}{k T^*} \xi \quad (\text{A.11})$$

A.2 - Campo de temperatura do fluido

Partindo da equação

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (\text{A.12})$$

temos que fazer as seguintes transformações:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{\xi^{-\lambda/2}}{L} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda+1}{2\xi} \right) \right\} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{U_0 \xi^{-\lambda/2}}{(2\nu U_0 L \xi)^{1/2}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{U_0 \xi^{-\lambda/2}}{(2\nu U_0 L \xi)^{1/2}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_0^2 \xi^{-\lambda}}{(2\nu U_0 L \xi) \partial \eta^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (\text{A.15})$$

Por outro lado sabemos que

$$u = u_1 \frac{df}{d\eta} = U_0 \xi^{-\lambda/2} f' \quad (\text{A.16})$$

e que

$$v = -u_0 \xi^{-\lambda/2} \left(\frac{\nu}{2u_0 L \xi} \right)^{1/2} [f - (1+\lambda)\eta f'] \quad (A.17)$$

Substituindo estas expressões em (A.12) resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{u_0 \xi^{-\lambda}}{L} f' \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \eta \left(\frac{\lambda+1}{2\xi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\} - \\ u_0 \xi^{-\lambda/2} \left(\frac{\nu}{2u_0 L \xi} \right)^{1/2} [f - (1+\lambda)\eta f'] \frac{u_0 \xi^{-\lambda/2}}{(2u_0 L)^{1/2}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \\ \frac{u_0^2 \xi^{-\lambda}}{\text{Pr} \cdot (2\nu u_0 L \xi)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (A.18)$$

Multiplicando-se a equação por $(2\text{Pr}L\xi)$ e dividindo por $(u_0 \xi^{-\lambda})$ vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 2 \text{Pr} \xi f' \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \left(\frac{\lambda+1}{2\xi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\} - \\ \text{Pr} [f - (1+\lambda)\eta f'] \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (A.19)$$

ou, finalmente,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 2 \text{Pr} \xi f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \text{Pr} f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (A.20)$$

A.3 - Equação do campo de velocidade

Como vimos a equação que define o campo de velocidade é:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \frac{du_1}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (A.21)$$

Vamos então efetuar as seguintes mudanças de variáveis:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} =$$

$$- \frac{U_0 \xi^{-(\lambda+1)}}{2L} \left(\lambda f' + (1+\lambda)\eta f'' \right), \quad (A.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dy} = \frac{U_0^2 \xi^{-\lambda}}{(2\sqrt{U_0 L} \xi)^{1/2}} f'' \quad (A.23)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{U_0^2 \xi^{-\lambda}}{(2\sqrt{U_0 L} \xi)^{1/2}} f'' \right\} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_0^3 \xi^{-3\lambda/2}}{2\sqrt{U_0 L} \xi} f''' \quad (A.24)$$

e

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{du_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{u_1}{U_0 L} \frac{du_1}{d\xi} = \frac{u_1^2}{U_0 L} \left(\frac{1}{u_1} \frac{du_1}{d\xi} \right) =$$

$$- \frac{\lambda U_0}{2L} \xi^{-(\lambda+1)} \quad (A.25)$$

Substituindo (A.22), (A.23), (A.24) e (A.25) em (A.21), te-

remos:

$$- \frac{U_0^2 \xi^{-\lambda/2} \xi^{-(\lambda+1)}}{2L} f' \left(\lambda f' + (1+\lambda)\eta f'' \right) -$$

$$\frac{U_0^3 \xi^{-3\lambda/2}}{2\sqrt{U_0 L} \xi} \left(f - (1+\lambda)\eta f' \right) f'' =$$

$$- \frac{U_0^2 \xi^{-3\lambda/2-1}}{L} \left(\frac{\lambda}{2} \right) + \frac{\sqrt{U_0^3} \xi^{-3\lambda/2}}{2\sqrt{U_0 L} \xi} f''' \quad (A.26)$$

Multiplicando esta equação por $(2L\xi)$ e dividindo por $(U_0^2 \xi^{-3\lambda/2})$ resulta:

$$- f' \left(\lambda f' + (1 + \lambda) \eta f'' \right) - \left(f - (1 + \lambda) \eta f' \right) f'' = -\lambda + f''' \quad (\text{A.27})$$

Ou, após simplificações,

$$f''' + f f'' = \lambda \left[1 - (f')^2 \right] \quad (\text{A.28})$$

B. Solução analítica

Para a equação do movimento

$$f''' + f f'' = \lambda \left[1 - (f')^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

sendo

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \eta^n}{n!} \quad (\text{B.2})$$

onde

$$a_2 = f''(0) = a(\lambda) \quad (\text{B.3})$$

temos a solução de Meksyn, obtida quando substituímos (B.2) em (B.1) e determinamos os coeficientes a_n em função de $a_2 = a = f''(0)$.

Estes coeficientes são:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= a & a_3 &= \lambda & a_4 &= 0 \\ a_5 &= -(1 + 2\lambda)a^2 & a_6 &= -2(2 + 3\lambda)\lambda a \\ a_7 &= -2(2 + 3\lambda)\lambda^2 & a_8 &= (1 + 2\lambda)(11 + 10\lambda)a^3 \end{aligned} \right\} (\text{B.4})$$

Esta equação também foi resolvida numericamente por Hartree em um analisador diferencial, sendo que alguns destes resultados são os seguintes:

λ	-1.0	-0.5	0.	0.1	0.18	0.199
a	1.232	0.927	0.4696	0.319	0.128	0.

Como vimos as soluções base da equação da energia, $N_j(\eta)$ e $M_j(\eta)$, podem ser expressas pelas séries:

$$N_j(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \eta^n}{n!}, \text{ sendo } b_0=1 \text{ e } b_1=0 \quad (\text{B.5})$$

e

$$M_j(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \eta^n}{n!}, \text{ sendo } c_0=0 \text{ e } c_1=1 \quad (\text{B.6})$$

que possuem raios finitos de convergência.

Levando as expressões de $N_j(\eta)$ juntamente com a de $f(\eta)$ na equação abaixo,

$$Y'' + \text{Pr } f Y' - 2 \text{Pr } \gamma f' Y = 0, \quad (\text{B.7})$$

teremos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n \eta^{n-2}}{(n-2)!} + \text{Pr} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \eta^n}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \eta^{n-1}}{(n-1)!} - 2 \text{Pr } \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \eta^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \eta^n}{n!} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Anulando agora os coeficientes dos termos de mesma potência de η , podemos achar as expressões que definem os coeficientes b_n .

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 2 \text{Pr} \gamma a$$

$$b_4 = 2 \text{Pr} \gamma \lambda$$

$$b_5 = 0$$

$$b_6 = 2 \text{Pr}^2 \gamma a^2 \left(8\gamma - 6 - \frac{(1 + 2\lambda)}{\text{Pr}} \right)$$

$$b_7 = 2 \text{Pr}^2 \gamma \lambda a \left(30\gamma - 20 - \frac{2(2 + 3\lambda)}{\text{Pr}} \right)$$

$$b_8 = 2 \text{Pr}^2 \gamma \lambda^2 \left(30\gamma - 20 - \frac{2(2 + 3\lambda)}{\text{Pr}} \right)$$

$$b_9 = 2 \text{Pr}^2 \gamma a^3 \left\{ 7\text{Pr}(2\gamma - 3) \left(8\gamma - 6 - \frac{(1 + 2\lambda)}{\text{Pr}} \right) + \right. \\ \left. 7(3 - 10\lambda)(1 + 2\lambda) + \frac{(1 + 2\lambda)(11 + 10\lambda)}{\text{Pr}} \right\}$$

.....

Procedendo de modo análogo para o caso da solução base $M_j(\eta)$, podemos facilmente determinar os seguintes coeficientes:

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = a \text{Pr} (4\gamma - 1)$$

$$c_5 = \text{Pr} \lambda (6\gamma - 1)$$

$$c_6 = 0$$

$$c_7 = a^2 Pr^2 \left[10(\gamma - 1)(4\gamma - 1) - (10\gamma - 1)(1 + 2\lambda)/Pr \right]$$

$$c_8 = a Pr^2 \lambda \left\{ (12\gamma - 15)(6\gamma - 1) + (30\gamma - 20)(4\gamma - 1) - (24\gamma - 2)(2 + 3\lambda)/Pr \right\}$$

$$c_9 = Pr^2 \lambda^2 \left\{ (6\gamma - 5)(42\gamma - 7) - (14\gamma - 1)(4 + 6\lambda)/Pr \right\}$$

.....

Agora, com todos os coeficientes a_n , b_n e c_n determinados estamos em condições de calcular o valor da integral

$$r_j = \frac{M_j(\eta)}{N_j^2(\eta)} = \int_0^\infty \frac{e^{-Pr \int_0^\eta f(\eta) d\eta}}{N_j^2(\eta)} d\eta \quad (B.9)$$

A avaliação desta integral é feita desenvolvendo-se em séries de potências as seguintes funções:

$$T = Pr \int_0^\eta f(\eta) d\eta = \eta^3 \sum_{n=0}^{\infty} E_n \eta^n, \quad E_0 \neq 0 \quad (B.10)$$

e

$$\phi = \frac{1}{N_j^2(\eta)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \eta^n \quad (B.11)$$

Resulta então que (ver Meksyn)

$$r_j = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \Gamma \left[\frac{m+1}{3} \right] \quad (B.12)$$

onde $\Gamma(k)$ é a função Gama, e os coeficientes d_m são dados por:

$$d_0 = \frac{1}{3} E_0^{-1/3} G_0$$

$$d_1 = \frac{1}{3} E_0^{-2/3} \left(G_1 - \frac{2 E_1}{3 E_0} G_0 \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{3} E_0^{-1} \left(-\frac{E_1}{E_0} G_1 + \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 G_0 \right)$$

$$d_3 = \frac{1}{3} E_0^{-4/3} \left\{ G_3 + \frac{14}{9} \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 G_1 - \left(\frac{4}{3} \frac{E_3}{E_0} + \frac{140}{81} \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^3 \right) G_0 \right\}$$

$$d_4 = \frac{1}{3} E_0^{-5/3} \left\{ G_4 - \frac{5}{3} \frac{E_1}{E_0} G_3 - \left(\frac{5}{3} \frac{E_3}{E_0} + \frac{220}{81} \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^3 \right) G_1 + \left(-\frac{5}{3} \frac{E_4}{E_0} + \frac{40}{9} \frac{E_1 E_3}{E_0^2} + \frac{770}{243} \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^4 \right) G_0 \right\}$$

$$d_5 = \frac{1}{3} E_0^{-2} \left\{ G_5 - 2 \frac{E_1}{E_4} G_4 + 3 \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 G_3 + \left(-2 \frac{E_4}{E_0} + 6 \frac{E_1 E_3}{E_0^2} + 5 \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^4 \right) G_1 + \left(-2 \frac{E_5}{E_0} + 6 \frac{E_1 E_4}{E_0^2} - 12 \frac{E_1^2 E_3}{E_0^3} - 6 \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^5 \right) G_0 \right\}$$

$$d_6 = \frac{1}{3} E_0^{-7/3} \left\{ G_6 - \frac{7}{3} \frac{E_1}{E_0} G_5 + \frac{35}{9} \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 G_4 - \left(\frac{7}{3} \frac{E_3}{E_0} + \frac{455}{81} \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^3 \right) G_3 + \left(-\frac{7}{3} \frac{E_5}{E_0} + \frac{70}{9} \frac{E_1 E_4}{E_0^2} - \frac{455}{27} \frac{E_1^2 E_3}{E_0^3} - \frac{6916}{729} \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^5 \right) G_1 + \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(-\frac{7}{3} \frac{E_6}{E_0} + \frac{70}{9} \frac{E_1 E_5}{E_0^2} + \frac{35}{9} \left(\frac{E_3}{E_0} \right)^2 - \frac{455}{27} \frac{E_1^2 E_4}{E_0^3} + \right. \\ & \left. \frac{7280}{243} \frac{E_1^3 E_3}{E_0^4} + \frac{76076}{6561} \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 \right) G_0 \end{aligned} \right\}$$

Neste ponto precisamos determinar a relação entre os coeficientes E_n e a_n e entre os coeficientes G_n e b_n .

a. Relação entre E_n e a_n

Como

$$f(\eta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \eta^n$$

teremos, de acordo com a expressão já vista para E_n que

$$\begin{aligned} \Pr \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta &= \Pr \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!} \eta^{n+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E_j \eta^{j+3} = \Pr \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{j+2}}{(j+3)!} \eta^{j+3} \end{aligned} \quad (B.13)$$

logo,

$$E_j = \frac{\Pr a_{j+2}}{(j+3)!} \quad (B.14)$$

b. Relação entre G_n e b_n

Para a série desejada

$$\phi = \frac{1}{N_j^2(\eta)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \eta^n \quad (B.15)$$

os coeficientes G_n podem ser determinados do seguinte modo:

$$G_n = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{d^n \phi}{d\eta^n} \quad (\text{B.16})$$

Achando os limites das derivadas encontramos:

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = 0$$

$$G_2 = 0$$

$$G_3 = -\frac{1}{3} \text{Pr} \gamma a$$

$$G_4 = -\frac{1}{6} \text{Pr} \gamma \lambda$$

$$G_5 = 0$$

$$G_6 = \frac{4}{6!} \text{Pr}^2 \gamma a^2 \left(52 \gamma - 6 - (1 + 2\lambda)/\text{Pr} \right)$$

...

Substituindo então as expressões de G_n e E_n nas expressões que definam os coeficientes d_n , resulta em:

$$d_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{a \text{Pr}}{3!} \right)^{-1/3}$$

$$d_1 = -\frac{1}{18} \left(\frac{a \text{Pr}}{3!} \right)^{-2/3} \left(\frac{\lambda}{a} \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{48} \left(\frac{a \text{Pr}}{3!} \right)^{-1} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2$$

$$d_3 = \frac{1}{54} \left(\frac{a \text{Pr}}{3!} \right)^{-4/3} \left(\frac{a(1+2\lambda)}{5} - 12 \text{Pr} \gamma a - \frac{35}{72} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^3 \right)$$

$$d_4 = \frac{1}{162} \left(\frac{a \text{Pr}}{3!} \right)^{-5/3} \left\{ 6 \text{Pr} \gamma \lambda + \frac{3(2+3\lambda)\lambda}{14} - \right. \\ \left. (0.5 + \lambda)\lambda + \frac{385}{576} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^4 \right\}$$

$$d_5 = \frac{1}{240} \left(\frac{a \text{Pr}}{3!} \right)^{-2} \left\{ -\frac{10}{3} \text{Pr} \gamma \lambda \left(\frac{\lambda}{a} \right) + (2+3\lambda) \left(\frac{\lambda}{a} \right) \left(\frac{\lambda-6}{21} \right) + \right. \\ \left. \frac{\lambda}{2} (1+2\lambda) \left(\frac{\lambda}{a} \right) - \frac{15}{32} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^5 \right\}$$

$$d_6 = \frac{1}{324} \left(\frac{a \text{Pr}}{3!} \right)^{-7/3} \left\{ \text{Pr} \gamma \left[\frac{3}{5} \text{Pr} a^2 (52 \gamma - 6 - \right. \right. \\ \left. \left. (1+2\lambda)/\text{Pr} \right) + \frac{35}{18} \lambda \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 - \frac{7a^2(1+2\lambda)}{5} \right] - \\ \frac{1}{40} (1+2\lambda)(3+4\lambda) a^2 + \\ \frac{5}{24} (2+3\lambda)\lambda \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 - \frac{91(1+2\lambda)a}{216} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^3 + \\ \left. \frac{19019}{62208} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^6 \right\}$$

.....

Assim, temos todos os coeficientes d_m necessários para calcular o valor da integral que nos fornece a relação r_j . Quanto aos outros coeficientes que completam a série que define o campo de temperatura, os B_j , serão calculados do mesmo modo já visto anteriormente.

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,DISK,1132PRINTER)
C CONVECCAO FORCADA EM ESCOAMENTOS SOBRE CORPO SOLIDO
C ODETE VIEIRA
EXTERNAL FN1,FN2,FN3,FN4,FN5,FN6
DIMENSION Y(6),FM(35,10),FM1(35,10),FN(35,10),FNN(35,10)
1      ,R(10),VAL(6,35),ETA(35)
DEFINE FILE 1(1420,2,U,L1)
COMMON GAMA(10),J,PR,VL,R,ETA,FM,FN,VH,NP
1 READ (2,100) PR,A,VL,VH
IF (PR) 5000,5005,5005
5000 CALL EXIT
5005 READ (2,100) (GAMA(J),J=1,10)
100 FORMAT(5F10.0)
NP=30
P=0.
Q=1.
DO B J=1,NP
8 ETA(J)=.2*J*.0001
J=1
H=.1
5 JJ=1
Y(1)=0.
Y(2)=0.
Y(3)=A
Y(6)=0.
IF (JJ-1) 10,10,20
10 Y(4)=0.
Y(5)=1.
GO TO 30
20 Y(4)=1.
Y(5)=0.
30 CALL RK3(FN1,FN2,FN3,FN4,FN5,FN6,H,O.,Y,2,NP,VAL)
IF (JJ-1) 40,40,50
40 DO 1000 I=1,NP
FM(I,J)=VAL(4,I)
1000 FM1(I,J)=VAL(5,I)
JJ=2
GO TO 20
50 DO 2000 I=1,NP
FN(I,J)=VAL(4,I)
2000 FNN(I,J)=VAL(5,I)
J=J*1
IF (J-10) 5,5,55
55 DO 60 J=1,10
60 R(J)=FM(NP,J)/FN(NP,J)
L1=1
WRITE (1,L1) FN,FY,R
CALL LINK (PPP2)
END
// DUP
*STORE WS UA AAA1

```



```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*FOCS(CARD,DISK,1192PRINTER)
  DIMENSION R(10),B(10),TETAP(5,35),TETA(5,35),
  135),ETA(35),TOP(10),TOI(10),CSI(6),FM(35,10),FN(35,10)
  COMMON GAMA(10),J,PR,VL,R,ETA,FM,FR,VH,NP
  DEFINE FILE 1(1420,2,U,L1)
  L1=1
  READ (1,L1) FN,FM,R
C   CALCULO DOS COEFICIENTES B
  B(1)=1.
  B(2)=1./((GAMA(2)*(GAMA(2)-(VL&2.)/2.))*R(2))
  DO 70 J=3,10
  B(J)=VH*B(J-2)/(GAMA(J)*(GAMA(J)-(VL&2.)/2.)*R(J))
70  CONTINUE
  WRITE(3,65)(J,R(J),J=1,10)
65  FORMAT (1H1,5(2X,'R(',I2,')=' ,E10.4,)/)
  WRITE (3,66)(J,B(J),J=1,10)
66  FORMAT (5(2X,'B(',I2,')=' ,E10.4,)/)
C   CALCULO DE THETA CORRESPONDENTE AOS B PARES E IMPARES
  DO 75 J=1,NP
  TP(J)=0.
75  TI(J)=R(1)*(FM(J,1)-R(1)*FN(J,1))
  CSI(1)=.2000006
  DO 90 L=1,5
  DO 85 J=1,NP
  TOP(L)=0.
  TOI(L)=0.
  TETAP(L,J)=0.
  TETA(L,J)=0.
  DO 80 K=2,10,2
  TOP(L)=TOP(L)-CSI(L)**GAMA(K)*R(K)
90  TETAP(L,J)=TETAP(L,J) & CSI(L)**GAMA(K)*B(K)*(FM(J,K)-R(K)*FN(J,K))
  DO 81 K=1,9,2
  TOI(L)=TOI(L)-CSI(L)**GAMA(K)*R(K)
81  TETA(L,J)=TETA(L,J) & CSI(L)**GAMA(K)*B(K)*(FM(J,K)-R(K)*FN(J,K))
85  CONTINUE
  CSI(L&1)=CSI(L)&.2 & 0.00000001
90  CONTINUE
C   TABELA DOS VALORES DE THETA
  D=0.
  RN=-R(1)
  DTETI=0.
  DTETP=0.
  DO 333 K=1,9,2
333  DTETI=DTETI&B(K)*GAMA(K)*R(K)
  DO 334 K=2,10,2
334  DTETP=DTETP&B(K)*GAMA(K)*R(K)
  R(1)=- DTETP/DTETI
  WRITE (3,335) DTETP,DTETI,B(1)
335  FORMAT (1X,/,10X,'DTETAP/DCSI=' ,E10.4,5X,'DTETA/DCSI=' ,E
  15X,'B(1)=' ,E11.4)
  TEMP=-R(1)*R(1)
  DO 3000 L=1,5
  TOP(L)=TOP(L)+R(1)*TOI(L)
  DO 3000 J=1,NP
  TETAP(L,J)=TETAP(L,J)+TETA(L,J)*B(1)
3000 CONTINUE
  WRITE (3,270) PR,VL

```

```

270 FORMAT (1H1///,17X,45H VALORES DE THETA CORRESPONDENTES A CSI
1A,///,18X,'PRANDTL=',F8.4,5X,'FATOR DE FORMA=',F8.4///)
WRITE (3,231) D,(CSI(L),L=1,5)
281 FORMAT (14X,6F13.6,/)
WRITE (3,280) D,TEMP,(TOP(L),L=1,5)
DO 4000 J=1,NP
TI(J)=P(1)*TI(J)
IF (TETAP(5,J)) 4004,4003,4003
4003 WRITE (3,280) ETA(J),TI(J),(TETAP(L,J),L=1,5)
290 FORMAT (9X,F8.2,6F13.6)
4000 CONTINUE
4004 CALL LINK (AAA1)
END
// DUP
*STORE WS UA PPP2
// XEQ AAA1 1
*FILES(1,ARQ)

```

D. Tabelas de resultados

VALORES DE TRATAMENTO COMPRESSIVO DE JUNTAS A CSM E STA

PRATIOTE = 0,7600 FATOR DE FORMA = 0,00

$\frac{m}{n}$	0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000
0.00	2.623258	2.606571	2.606013	2.651060	2.998611	1.000000
0.20	2.514632	2.203920	2.281885	2.257922	2.232618	4.708393
0.40	2.206127	2.097460	2.079223	2.099136	2.042217	3.229554
0.60	2.099625	2.092737	2.078101	2.061468	2.046953	2.092000
0.80	2.097123	2.091745	2.090235	2.066346	2.034691	2.065970
1.00	2.101477	2.097417	2.088552	2.072032	2.068120	2.060672
1.20	1.916170	1.813152	1.806516	1.798453	1.790589	1.784248
1.40	1.545008	1.542842	1.537972	1.531947	1.525882	1.520695
1.60	1.291822	1.290297	1.286818	1.282429	1.277824	1.273502
1.80	1.060170	1.059062	1.056635	1.053519	1.050208	1.047111
2.00	0.852635	0.851931	0.850330	0.848172	0.845822	0.843559
2.20	0.671391	0.670929	0.669931	0.668375	0.666769	0.665151
2.40	0.516919	0.516423	0.515910	0.514951	0.513863	0.512765
2.60	0.388774	0.388538	0.388136	0.387521	0.386814	0.386077
2.80	0.285279	0.285265	0.284986	0.284603	0.284150	0.283673
3.00	0.204233	0.204235	0.204066	0.203850	0.203551	0.203251
3.20	0.142553	0.142514	0.142414	0.142272	0.142105	0.141922
3.40	0.095492	0.095492	0.095412	0.095230	0.095032	0.094822
3.60	0.064121	0.064108	0.064076	0.064030	0.063974	0.063910
3.80	0.041295	0.041289	0.041272	0.041246	0.041214	0.041176
4.00	0.025874	0.025868	0.025859	0.025845	0.025828	0.025806
4.20	0.015758	0.015756	0.015752	0.015744	0.015734	0.015720
4.40	0.009425	0.009424	0.009422	0.009417	0.009410	0.009400
4.60	0.005235	0.005235	0.005234	0.005231	0.005226	0.005223
4.80	0.002978	0.002978	0.002978	0.002977	0.002973	0.002969
5.00	0.001507	0.001509	0.001509	0.001507	0.001501	0.001505
5.20	0.000822	0.000822	0.000822	0.000822	0.000821	0.000816
5.40	0.000397	0.000397	0.000397	0.000396	0.000394	0.000391
5.60	0.000172	0.000171	0.000171	0.000167	0.000161	0.000157
5.80	0.000057	0.000057	0.000057	0.000059	0.000063	0.000077

VALORES DE TETA CORRESPONDENTES A CSI E TETA

PRANDTL= 2.0000 FATOR DE FORMA= 0.0000

$\frac{g}{W}$	0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000
0.00	2.612240	2.601295	2.502292	2.667113	2.898415	3.439355
0.20	2.301193	2.291413	2.271181	2.249014	2.230922	2.221911
0.40	1.990510	1.983271	1.968020	1.950862	1.936052	1.927149
0.60	1.684644	1.679542	1.668539	1.655679	1.644501	1.636235
0.80	1.389092	1.385671	1.373173	1.369208	1.363620	1.353922
1.00	1.103841	1.100660	2.103790	1.097772	1.091754	1.086635
1.20	0.857623	0.856102	0.852098	0.849274	0.845300	0.841695
1.40	0.635681	0.634922	0.632158	0.628969	0.628401	0.626034
1.60	0.489075	0.486063	0.480885	0.474788	0.466348	0.464307
1.80	0.382697	0.380348	0.382974	0.382282	0.381454	0.380580
2.00	0.193821	0.192618	0.193566	0.193219	0.192915	0.192396
2.20	0.116905	0.116758	0.116641	0.116473	0.116284	0.116074
2.40	0.056129	0.056109	0.056058	0.056096	0.055990	0.055806
2.60	0.025030	0.025072	0.025057	0.025023	0.024989	0.024952
2.80	0.017391	0.017388	0.017382	0.017373	0.017364	0.017355
3.00	0.009840	0.009839	0.009838	0.009837	0.009833	0.009832
3.20	0.002460	0.002460	0.002461	0.002466	0.002477	0.002495
3.40	0.001333	0.001333	0.001336	0.001339	0.001412	0.001442
3.60	0.000513	0.000513	0.000517	0.000529	0.000553	0.000594
3.80	0.000176	0.000176	0.000182	0.000202	0.000256	0.000387
4.00	0.000055	0.000055	0.000064	0.000096	0.000186	0.000393
4.20	0.000019	0.000017	0.000030	0.000075	0.000174	0.000325
4.40	0.000003	0.000006	0.000017	0.000069	0.000207	0.000483
4.60	0.000000	0.000000	0.000017	0.000065	0.000173	0.000316

VALORES DE THETA CORRESPONDENTES A CSI E FTA

PRVIDL= 5.0000 FATOR DE FORMA= 0.0000

	0.20000	0.20000	0.40000	0.60000	0.80000	1.00000
0.00	1.938804	1.930525	1.922182	1.912943	2.161441	1.000000
0.20	1.622582	1.614116	1.595932	1.576916	1.555432	2.282298
0.40	1.210310	1.204691	1.202766	1.20107	1.200832	1.550004
0.60	1.028780	1.027034	0.999237	0.990635	0.982407	1.278636
0.80	0.732795	0.721961	0.703047	0.722191	0.712252	0.976091
1.00	0.490217	0.495332	0.453452	0.490973	0.485322	0.712252
1.20	0.278022	0.207664	0.306812	0.305681	0.304423	0.485309
1.40	0.172595	0.172558	0.172522	0.172566	0.171541	0.302190
1.60	0.086667	0.086621	0.286575	0.286343	0.286151	0.170470
1.80	0.025277	0.025190	0.250197	0.250139	0.250049	0.085943
2.00	0.014030	0.014035	0.24624	0.246611	0.245594	0.057342
2.20	0.006418	0.0064817	0.204810	0.204810	0.204311	0.024271
2.40	0.001243	0.001249	0.201251	0.201254	0.201234	0.004334
2.60	0.000213	0.000219	0.200222	0.200221	0.200204	0.000011

VALORES DE THETA CORRESPONDENTES A CGI E STA

PRANDTL= 7.0000 FATOR DE FORMA= 6.0000

$\frac{S}{W}$	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
0.00	1.746695	1.732623	1.725522	1.72081	1.944936
0.20	1.421274	1.414945	1.397716	1.375695	1.262771
0.40	1.110276	1.105409	1.094811	1.082501	1.071458
0.60	0.814075	0.811426	0.805628	0.798611	0.791742
0.80	0.551167	0.549909	0.547286	0.543549	0.539657
1.00	0.337686	0.327672	0.326280	0.324719	0.323312
1.20	0.182914	0.182733	0.182296	0.182706	0.182733
1.40	0.086937	0.086902	0.086765	0.0865976	0.086352
1.60	0.024972	0.024978	0.024948	0.024892	0.024829
1.80	0.011719	0.011759	0.011763	0.011732	0.011715
2.00	0.003235	0.003237	0.003237	0.003232	0.003219
2.20	0.000730	0.000731	0.000726	0.000739	0.000690

VALORES DE THEIA CORRESPONDENTES A CSI E ETA

PPAYDIL= 0.7600 FATOR DE FORMA= 0.1000

	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000
0.00	4.104246	4.046716	4.050766	4.382831	5.595715
0.20	2.794352	3.775209	3.751964	3.731470	3.721312
0.40	3.467365	3.451339	3.431614	3.413670	3.402552
0.60	3.147092	3.128527	3.112131	3.096715	3.086923
0.80	2.823177	2.808364	2.795027	2.782067	2.772357
1.00	2.504701	2.492154	2.482549	2.471910	2.462759
1.20	2.194638	2.183597	2.177611	2.169095	2.162081
1.40	1.895625	1.884567	1.882649	1.877011	1.871201
1.60	1.612762	1.609022	1.604407	1.599370	1.594735
1.80	1.350327	1.346971	1.343643	1.339926	1.336354
2.00	1.109462	1.107143	1.104802	1.102133	1.099475
2.20	0.892851	0.892286	0.890681	0.88816	0.886902
2.40	0.705264	0.704213	0.703139	0.701875	0.700555
2.60	0.544234	0.543621	0.542921	0.542081	0.541177
2.80	0.410458	0.410041	0.409595	0.409093	0.408460
3.00	0.302130	0.301924	0.301647	0.301307	0.300928
3.20	0.217003	0.216849	0.216681	0.216473	0.216235
3.40	0.151903	0.151813	0.151713	0.151589	0.151448
3.60	0.103586	0.103534	0.103477	0.103405	0.103322
3.80	0.068774	0.068745	0.068713	0.068673	0.068627
4.00	0.044632	0.044428	0.044403	0.044380	0.044357
4.20	0.027915	0.027907	0.027899	0.027890	0.027875
4.40	0.017042	0.017038	0.017035	0.017031	0.017028
4.60	0.010097	0.010096	0.010096	0.010096	0.010099
4.80	0.005793	0.005793	0.005796	0.005799	0.005804
5.00	0.003206	0.003207	0.003211	0.003219	0.003235
5.20	0.001697	0.001698	0.001702	0.001708	0.001724
5.40	0.000945	0.000945	0.000951	0.000960	0.000977
5.60	0.000577	0.000577	0.000581	0.000582	0.000586
5.80	0.000312	0.000312	0.000312	0.000312	0.000311

VALORES DE THETA CORRESPONDENTES A CSI E ETA

PERMUTIL= 5.0000 FATOR DE FOR= 1.1000

1/S

0.30	0.1000000	0.2000000	0.4000000	0.6000000	0.8000000	1.0000000
0.40	2.4499900	4.47360	2.41647	2.446723	2.703051	3.572199
0.50	2.005592	2.073320	2.261340	2.555994	2.018013	2.006894
0.60	1.706574	1.719934	1.707951	1.692363	1.676850	1.666016
0.80	1.372122	1.370195	1.362735	1.352675	1.344295	1.338467
1.00	1.042764	1.041126	1.040820	1.039958	1.039274	1.038705
1.20	0.7747146	0.746287	0.744316	0.740797	0.737566	0.734409
1.40	0.549919	0.498616	0.497550	0.495955	0.494507	0.493239
1.60	0.376710	0.306529	0.306002	0.305370	0.304823	0.304371
1.80	0.171128	0.171072	0.170894	0.170623	0.170284	0.169901
2.00	0.005522	0.005506	0.005476	0.005452	0.005423	0.005393
2.20	0.003777	0.003771	0.003753	0.003725	0.003700	0.003674
2.40	0.014562	0.014562	0.014558	0.014552	0.014543	0.014528
2.60	0.006684	0.006684	0.006644	0.006643	0.006646	0.006645
2.80	0.001376	0.001376	0.001377	0.001376	0.001376	0.001376
3.00	0.000330	0.000331	0.000332	0.000332	0.000330	0.000330

VALORES DE THETA CORRESPONDENTES A CSI E ETA

plavtila 5-0000 FATOR DE FORMA= -0.5000

$\frac{E}{\sigma}$	0.200000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000
0.00	2.355277	2.345320	2.369727	2.504253	2.902692	3.967771
0.20	1.907100	1.865929	1.810912	1.761236	1.724153	1.704421
0.40	1.459266	1.423669	1.395641	1.367319	1.340895	1.323001
0.60	1.047121	1.026980	1.009143	0.995367	0.972820	0.959819
0.80	0.680152	0.672892	0.664617	0.654971	0.645958	0.636171
1.00	0.453766	0.449122	0.444087	0.438938	0.435485	0.431372
1.20	0.299293	0.298224	0.296793	0.295073	0.293340	0.291673
1.40	0.205653	0.205132	0.204619	0.204056	0.203428	0.202822
1.60	0.137517	0.137423	0.137290	0.137108	0.136922	0.136730
1.80	0.0912576	0.0912452	0.0912315	0.0912170	0.0912018	0.0911857
2.00	0.0603562	0.0603556	0.0603546	0.0603530	0.0603509	0.0603490
2.20	0.0400846	0.0400845	0.0400840	0.0400828	0.0400796	0.0400713