Recibo: Setembro 2002
Received: September 2002

FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO P_N — I: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Alexandre D. Caldeira e Roberto D. M. Garcia
Centro Técnico Aeroespacial, Instituto de Estudos Avançados
12231-970 São José dos Campos, SP
e-mail: alexdc@ieav.cta.br

RESUMO

Neste trabalho, são apresentadas as integrais dos momentos de Legendre do fluxo angular de nêutrons, denominadas funções de ponderação P_N, para uma célula de reator em geometria plana. Estas expressões podem ser utilizadas como funções peso para os respectivos momentos das seções de choque de transferência, com o propósito de gerar seções de choque efetivas.

Descritores: Método P_N, geometria plana, modelo multigrupo.

ABSTRACT

In this work, the integrals of the Legendre moments of the neutron angular flux, called P_N weighting functions, are presented for a reactor cell in slab geometry. These expressions can be utilized as weighting functions for the respective moments of the transfer cross sections, with the purpose of generating effective cross sections.

Key words: P_N method, slab geometry, multigroup model.

INTRODUÇÃO

Nos cálculos de reatores nucleares, para obtenção das constantes de grupo efetivas, o núcleo é subdividido em regiões com características semelhantes, denominadas *células*. Cada célula é detalhadamente analisada para considerar as fortes variações espaciais do fluxo angular de nêutrons. A célula é, então, homogeneizada através da ponderação das constantes de grupo dos materiais presentes pela distribuição espacial do fluxo angular de nêutrons dentro da célula. Finalmente, estas constantes são utilizadas para simular o comportamento do núcleo do reator.

Em trabalhos anteriores, o método P_N [1] foi aplicado aos problemas da moderação de nêutrons [2-5], do cálculo de células e feixes (assemblies) [5-8] e blindagem [9] de reatores nucleares, em geometria plana. Normalmente, as grandezas analisadas foram o fluxo e a corrente de nêutrons, primeiro e segundo momento do fluxo angular, respectivamente, e o fator de multiplicação efetivo.

Neste trabalho, são apresentadas as integrais espaciais dos momentos de Legendre do fluxo angular de nêutrons, denominadas funções de ponderação P_N, para as distintas regiões da célula. Estas expressões podem ser utilizadas como funções peso para os respectivos momentos das seções de choque de transferência, na produção das constantes de grupo efetivas. A importância das integrais dos momentos de ordem superior deve ser observada principalmente em cálculos de blindagem, pois em criticalidade, normalmente, a utilização de seções de choque de transferência linearmente anisotrópicas já é suficiente para a realização dos cálculos de interesse.

SOLUÇÕES P_N

Como a aplicação do método P_N a cálculos celulares foi discutida detalhadamente em trabalhos anteriores [5-8], nesta seção somente as equações principais são apresentadas. Em uma célula composta por R regiões materiais com condições de contorno de reflexão nas duas fronteiras, a solução P_N pode ser escrita para a região combustível, $0 \le \tau \le \tau_1$, como

$$\Psi_1(\tau,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)\Phi_{1,n}(\tau)P_n(\mu)\,, \tag{1}$$

onde $\Phi_{1,n}(\tau)$ representa o momento de Legendre de ordem n do vetor de fluxos angulares $\Psi_1(\tau,\mu)$ na posição τ e é dado por

$$\begin{aligned}\Phi_{1,n}(\tau) = {} & \sum_{j=1}^{J_I} A_{1,j}\mathbf{Z}^{-}_{1,n}(\tau,\xi_{1,j}) + \sum_{j=J_I+1}^{J_S} A_{1,j}\left[e^{-(\tau_1+\tau)/\xi_{1,j}} + (-1)^n e^{-(\tau_1-\tau)/\xi_{1,j}}\right]\mathbf{G}_{1,n}(\xi_{1,j}) \\ & + \sum_{\substack{j=J_S+1 \\ \Delta j=2}}^{J-1}\Big\{A_{1,j}\left[e^{-\lambda_{1,j}(\tau_1+\tau)/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{Z}^{-}_{1,n}(\tau,\xi_{1,j}) + (-1)^n e^{-\lambda_{1,j}(\tau_1-\tau)/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{Z}^{+}_{1,n}(\tau,\xi_{1,j})\right] \\ & + A_{1,j+1}\left[e^{-\lambda_{1,j}(\tau_1+\tau)/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{W}^{+}_{1,n}(\tau,\xi_{1,j}) - (-1)^n e^{-\lambda_{1,j}(\tau_1-\tau)/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{W}^{-}_{1,n}(\tau,\xi_{1,j})\right]\Big\}\end{aligned} \tag{2}$$

sendo, em geral, para a região r,

$$\mathbf{Z}^{\pm}_{r,n}(\tau,\xi) = \cos\left[\eta\tau/(\xi\bar{\xi})\right]\mathbf{G}^{R}_{r,n}(\xi) \pm \operatorname{sen}\left[\eta\tau/(\xi\bar{\xi})\right]\mathbf{G}^{I}_{r,n}(\xi) \tag{3.a}$$

e

$$\mathbf{W}^{\pm}_{r,n}(\tau,\xi) = \operatorname{sen}\left[\eta\tau/(\xi\bar{\xi})\right]\mathbf{G}^{R}_{r,n}(\xi) \pm \cos\left[\eta\tau/(\xi\bar{\xi})\right]\mathbf{G}^{I}_{r,n}(\xi)\,, \tag{3.b}$$

com $\mathbf{G}^{R}_{r,n}(\xi)$ e $\mathbf{G}^{I}_{r,n}(\xi)$ representando, respectivamente, os componentes real e imaginário do vetor $\mathbf{G}_{r,n}(\xi)$, que é a versão vetorial dos polinômios de Chandrasekhar para a equação de transporte escrita na forma matricial. Na Equação (2), τ_1 representa a espessura óptica da região combustível e $\xi_{1,j} = i\eta_{1,j}, j = 1,2,\ldots,J_I$, são números imaginários puros, $\xi_{1,j}, j = J_I + 1, J_I + 2,\ldots,J_S$ são números reais e os pares $(\xi_{1,j},\bar{\xi}_{1,j}), j = J_S + 1, J_S + 3,\ldots, J - 1$, com $\xi_{1,j} = \lambda_{1,j} + i\eta_{1,j}$, são números complexo-conjugados. Para as regiões intermediárias, $\tau_{r-1} \le \tau \le \tau_r$, com $r = 2,3,\ldots,R-1$, a solução P_N é dada por

$$\Psi_r(\tau,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)\Phi_{r,n}(\tau)P_n(\mu)\,, \tag{4}$$

COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR/SP-IPEN

onde $\Phi_{r,n}(\tau)$ representa o momento de Legendre de ordem n do vetor de fluxos angulares $\Psi_r(\tau,\mu)$ na posição τ e é dado por

$$\Phi_{r,n}(\tau)=\sum_{j=1}^{J_R}\left[A_{r,j}e^{-(\tau-\tau_{r-1})/\xi_{r,j}}+(-1)^n B_{r,j}e^{-(\tau_r-\tau)/\xi_{r,j}}\right]\mathbf{G}_{r,n}(\xi_{r,j})$$
$$+\sum_{\substack{j=J_R+1\\ \Delta j=2}}^{J-1}\left\{e^{-\lambda_{r,j}(\tau-\tau_{r-1})/(\xi_{r,j}\bar{\xi}_{r,j})}\left[A_{r,j}\mathbf{Z}^-_{r,n}(\tau-\tau_{r-1},\xi_{r,j})+A_{r,j+1}\mathbf{W}^+_{r,n}(\tau-\tau_{r-1},\xi_{r,j})\right]\right.$$
$$\left.+(-1)^n e^{-\lambda_{r,j}(\tau_r-\tau)/(\xi_{r,j}\bar{\xi}_{r,j})}\left[B_{r,j}\mathbf{Z}^-_{r,n}(\tau_r-\tau,\xi_{r,j})+B_{r,j+1}\mathbf{W}^+_{r,n}(\tau_r-\tau,\xi_{r,j})\right]\right\}, \quad (5)$$

com as quantidades nesta equação sendo definidas de uma maneira similar às da Equação (2).

Para a região externa, $\tau_{R-1}\le\tau\le\tau_R$, a solução P_N é dada por

$$\Psi_R(\tau,\mu)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)\Phi_{R,n}(\tau)P_n(\mu), \quad (6)$$

onde $\Phi_{R,n}(\tau)$ representa o momento de Legendre de ordem n do vetor de fluxos angulares $\Psi_R(\tau,\mu)$ na posição τ e é expresso por

$$\Phi_{R,n}(\tau)=\sum_{j=1}^{J_R}A_{R,j}\left[e^{-(\tau-\tau_{R-1})/\xi_{R,j}}+(-1)^n e^{-(2\tau_R-\tau_{R-1}-\tau)/\xi_{R,j}}\right]\mathbf{G}_{R,n}(\xi_{R,j})$$
$$+\sum_{\substack{j=J_R+1\\ \Delta j=2}}^{J-1}\left\{e^{-\lambda_{R,j}(\tau-\tau_{R-1})/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\left[A_{R,j}\mathbf{Z}^-_{R,n}(\tau-\tau_{R-1},\xi_{R,j})+A_{R,j+1}\mathbf{W}^+_{R,n}(\tau-\tau_{R-1},\xi_{R,j})\right]\right.$$
$$+(-1)^n e^{-\lambda_{R,j}(2\tau_R-\tau_{R-1}-\tau)/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\left[A_{R,j}\mathbf{Z}^-_{R,n}(2\tau_R-\tau_{R-1}-\tau,\xi_{R,j})\right.$$
$$\left.\left.+A_{R,j+1}\mathbf{W}^+_{R,n}(2\tau_R-\tau_{R-1}-\tau,\xi_{R,j})\right]\right\}, \quad (7)$$

com as quantidades nesta equação sendo definidas de uma maneira similar às da Equação (2).

Para a obtenção das funções de ponderação P_N, as Equações (2), (5) e (7) devem ser integradas nas respectivas regiões de validade.

FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO P_N

Integrando-se a Equação (2) na região combustível, $0\le\tau\le\tau_1$, obtém-se as funções de ponderação P_N para esta região, que podem ser escritas como

$$
\begin{aligned}
\Xi_{1,n} = {} & \sum_{j=1}^{J_I} A_{1,j}\eta_{1,j}\left[\mathbf{W}_{1,n}^{+}(\tau_1,\xi_{1,j}) - \mathbf{W}_{1,n}^{+}(0,\xi_{1,j})\right] \\
& + \sum_{j=J_I+1}^{J_S} A_{1,j}\xi_{1,j}(1-e^{-\tau_1/\xi_{1,j}})\left[e^{-\tau_1/\xi_{1,j}} + (-1)^n\right]\mathbf{G}_{1,n}(\xi_{1,j}) \\
& + \sum_{\substack{j=J_S+1 \\ \Delta j=2}}^{J-1} A_{1,j}\Bigg\{\eta_{1,j}e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\left[e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{W}_{1,n}^{+}(\tau_1,\xi_{1,j}) - \mathbf{W}_{1,n}^{+}(0,\xi_{1,j})\right] \\
& \qquad - \lambda_{1,j}e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\left[e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{Z}_{1,n}^{-}(\tau_1,\xi_{1,j}) - \mathbf{Z}_{1,n}^{-}(0,\xi_{1,j})\right] \\
& \qquad + (-1)^n\Bigg[\eta_{1,j}\left(\mathbf{W}_{1,n}^{-}(\tau_1,\xi_{1,j}) - e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{W}_{1,n}^{-}(0,\xi_{1,j})\right) \\
& \qquad + \lambda_{1,j}\left(\mathbf{Z}_{1,n}^{+}(\tau_1,\xi_{1,j}) - e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{Z}_{1,n}^{+}(0,\xi_{1,j})\right)\Bigg]\Bigg\} \\
& + A_{1,j+1}\Bigg\{\eta_{1,j}e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\left[\mathbf{Z}_{1,n}^{-}(0,\xi_{1,j}) - e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{Z}_{1,n}^{-}(\tau_1,\xi_{1,j})\right] \\
& \qquad + \lambda_{1,j}e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\left[\mathbf{W}_{1,n}^{+}(0,\xi_{1,j}) - e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{W}_{1,n}^{+}(\tau_1,\xi_{1,j})\right] \\
& \qquad - (-1)^n\Bigg[\eta_{1,j}\left(e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{Z}_{1,n}^{+}(0,\xi_{1,j}) - \mathbf{Z}_{1,n}^{+}(\tau_1,\xi_{1,j})\right) \\
& \qquad + \lambda_{1,j}\left(\mathbf{W}_{1,n}^{-}(\tau_1,\xi_{1,j}) - e^{-\lambda_{1,j}\tau_1/(\xi_{1,j}\bar{\xi}_{1,j})}\mathbf{W}_{1,n}^{-}(0,\xi_{1,j})\right)\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

onde $\Xi_{1,n}$ é a integral do momento de Legendre de ordem n do vetor de fluxos angulares.

Integrando-se, agora, a Equação (5) nas regiões intermediárias, $\tau_{r-1} \le \tau \le \tau_r$, as funções de ponderação P_N para estas regiões são obtidas e podem ser expressas por

$$
\begin{aligned}
\Xi_{r,n} = {} & \sum_{j=1}^{J_R} \xi_{r,j}(1-e^{-\Delta_r/\xi_{r,j}})\left[A_{r,j} + (-1)^n B_{r,j}\right]\mathbf{G}_{r,n}(\xi_{r,j}) \\
& + \sum_{\substack{j=J_R+1 \\ \Delta j=2}}^{J-1} \left[A_{r,j} + (-1)^n B_{r,j}\right]\Bigg\{\eta_{r,j}\left[e^{-\lambda_{r,j}\Delta_r/(\xi_{r,j}\bar{\xi}_{r,j})}\mathbf{W}_{r,n}^{+}(\Delta_r,\xi_{r,j}) - \mathbf{W}_{r,n}^{+}(0,\xi_{r,j})\right] \\
& \qquad + \lambda_{r,j}\left[\mathbf{Z}_{r,n}^{-}(0,\xi_{r,j}) - e^{-\lambda_{r,j}\Delta_r/(\xi_{r,j}\bar{\xi}_{r,j})}\mathbf{Z}_{r,n}^{-}(\Delta_r,\xi_{r,j})\right]\Bigg\} \\
& + \left[A_{r,j+1} + (-1)^n B_{r,j+1}\right]\Bigg\{\eta_{r,j}\left[\mathbf{Z}_{r,n}^{-}(0,\xi_{r,j}) - e^{-\lambda_{r,j}\Delta_r/(\xi_{r,j}\bar{\xi}_{r,j})}\mathbf{Z}_{r,n}^{-}(\Delta_r,\xi_{r,j})\right] \\
& \qquad + \lambda_{r,j}\left[\mathbf{W}_{r,n}^{+}(0,\xi_{r,j}) - e^{-\lambda_{r,j}\Delta_r/(\xi_{r,j}\bar{\xi}_{r,j})}\mathbf{W}_{r,n}^{+}(\Delta_r,\xi_{r,j})\right]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

onde $\Xi_{r,n}$ representa a integral do momento de Legendre de ordem n do vetor de fluxos angulares e $\Delta_r = \tau_r - \tau_{r-1}$.

Finalmente, integrando-se a Equação (7) na região externa, $\tau_{R-1} \leq \tau \leq \tau_R$, as funções de ponderação P_N para esta região podem ser escritas como

$$
\begin{aligned}
\Xi_{R,n} = & \sum_{j=1}^{J_R} A_{R,j}\xi_{R,j}\left(1-e^{-\Delta_R/\xi_{R,j}}\right)\left[1+(-1)^n e^{-\Delta_R/\xi_{R,j}}\right]\mathbf{G}_{R,n}(\xi_{R,j}) \\
& + \sum_{\substack{j=J_R+1 \\ \Delta j=2}}^{J-1} A_{R,j}\left\{\eta_{R,j}\left[e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\mathbf{W}^{+}_{R,n}(\Delta_R,\xi_{R,j})-\mathbf{W}^{+}_{R,n}(0,\xi_{R,j})\right]\right. \\
& \qquad \left. +\lambda_{R,j}\left[\mathbf{Z}^{-}_{R,n}(0,\xi_{R,j})-e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\mathbf{Z}^{-}_{R,n}(\Delta_R,\xi_{R,j})\right]\right\} \\
& + A_{R,j+1}\left\{\eta_{R,j}\left[\mathbf{Z}^{-}_{R,n}(0,\xi_{R,j})-e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\mathbf{Z}^{-}_{R,n}(\Delta_R,\xi_{R,j})\right]\right. \\
& \qquad \left. +\lambda_{R,j}\left[\mathbf{W}^{+}_{R,n}(0,\xi_{R,j})-e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\mathbf{W}^{+}_{R,n}(\Delta_R,\xi_{R,j})\right]\right\} \\
& + (-1)^n A_{R,j}e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\left\{\eta_{R,j}\left[e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\mathbf{W}^{+}_{R,n}(2\Delta_R,\xi_{R,j})-\mathbf{W}^{+}_{R,n}(\Delta_R,\xi_{R,j})\right]\right. \\
& \qquad \left. +\lambda_{R,j}\left[\mathbf{Z}^{-}_{R,n}(\Delta_R,\xi_{R,j})-e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\mathbf{Z}^{-}_{R,n}(2\Delta_R,\xi_{R,j})\right]\right\} \\
& + (-1)^n A_{R,j+1}e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\left\{\eta_{R,j}\left[\mathbf{Z}^{-}_{R,n}(\Delta_R,\xi_{R,j})-e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\mathbf{Z}^{-}_{R,n}(2\Delta_R,\xi_{R,j})\right]\right. \\
& \qquad \left. +\lambda_{R,j}\left[\mathbf{W}^{+}_{R,n}(\Delta_R,\xi_{R,j})-e^{-\lambda_{R,j}\Delta_R/(\xi_{R,j}\bar{\xi}_{R,j})}\mathbf{W}^{+}_{R,n}(2\Delta_R,\xi_{R,j})\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

onde $\Xi_{R,n}$ representa a integral do momento de Legendre de ordem n do vetor de fluxos angulares.

COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho foram apresentadas as integrais espaciais dos momentos de Legendre do fluxo angular de nêutrons, denominadas funções de ponderação P_N, para as diversas regiões que compõem uma célula plana de combustível de um reator nuclear. Embora estas expressões possam ser utilizadas como função peso para os respectivos momentos das seções de choque de transferência, com o objetivo de produzir constantes de grupo efetivas, este procedimento não foi explorado no momento. Futuramente, este formalismo será implementado em um programa computacional e os resultados obtidos serão validados.

Acredita-se que a importância das integrais dos momentos de ordem superior deva ser observada principalmente em cálculos de blindagem, pois em criticalidade, normalmente, a utilização de seções de choque de transferência linearmente anisotrópicas já é suficiente para a realização dos cálculos de interesse.

REFERÊNCIAS

[1] BELL, G. I.; GLASSTONE S. Nuclear reactor theory. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

[2] CALDEIRA, A. D.; DIAS, A. F.; GARCIA, R. D. M. Desenvolvimento do método P_N para estudo da moderação de nêutrons em geometria plana. XI ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DE REATORES E TERMOIDRÁULICA, Poços de Caldas, Minas Gerais, 18–22 Agosto 1997.

[3] CALDEIRA, A. D.; DIAS, A. F.; GARCIA, R. D. M. A P_N solution to the multigroup slowing-down problem — I: basic formulation. Nuclear Science and Engineering, Vol.130, pp. 60–69, 1998.

[4] CALDEIRA, A. D.; DIAS, A. F.; GARCIA, R. D. M. A P_N solution to the multigroup slowing-down problem — II: the degenerate case. Nuclear Science and Engineering, Vol.130, pp. 70–78, 1998.

[5] CALDEIRA, A. D. Soluções P_N para os problemas da moderação e do cálculo de célula em geometria plana. Tese de Doutorado, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 1999.

[6] CALDEIRA, A. D. Um método computacional para cálculos de células de reatores em geometria de multiplacas. Relatório de Pesquisa CTA/IEAv-ENU/RP-002/2000, Instituto de Estudos Avançados, São José dos Campos, 2000.

[7] CALDEIRA, A. D.; GARCIA, R. D. M. On criticality calculations in multislab geometry. Annals of Nuclear Energy, Vol. 28, pp. 1563–1581, 2001.

[8] CALDEIRA, A. D.; GARCIA, R. D. M. The P_N method for cell calculations of plate-type fuel assemblies. Transport Theory and Statistical Physics, Vol. 30, pp. 239–268, 2001.

[9] CALDEIRA, A. D. Aplicação do método dos harmônicos esféricos à equação de transporte matricial — I: fluxos e correntes de grupo. XIII ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DE REATORES E TERMOIDRÁULICA, Rio de Janeiro, 11–16 Agosto 2002.