SOBRE OS SISTEMAS DE CARATHÉODORY

PRISCILA GOLDENBERG

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR

PROF. DR. LÉO ROBERTO BORGES VIEIRA

- SÃO PAULO, SETEMBRO DE 1975 -

José

Evelin

meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Léo Roberto Borges Vieira que foi meu orientador nesta tese, bem como em toda minha carreira profissional, agradeço a paciência, e o estímulo constante com que me dignou.

Ao Prof. Dr. Nelson da Silveira Leme, meu professor, por tudo que lhe devo.

À direção do Instituto de Energia Atômica na pessoa de seu superintendente, Prof. Dr. Rômulo Ribeiro Pieroni, pela oportunidade que me foi dada à realização deste trabalho.

Aos colegas do Centro de Processamento de Dados do Instituto de Energia Atômica, na pessoa de seu coordenador, Eng. Cibar Cáceres Aguilera, pelo incentivo à realização deste trabalho.

Ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira, pelo trabalho de datilografia e ao Sr. Armando Garcia Segura, pelo trabalho gráfico.

APRESENTAÇÃO

1. Durante o século passado e por obra de muitos pesquisadores, sendo CAUCHY, LIPSCHITZ, PEANO, PICARD alguns dos mais destacados, foi desenvolvida uma teoria dos sistemas de equações diferenciais ordinárias. Referimo-nos a uma teoria que centralizava no estabelecimento de teoremas que asseguravam a existência de soluções, bem como no estabelecimento de teoremas naturalmente correlatos. Essa teoria que designaremos por "*teoria elementar*", forneceu teoremas com variados graus de generalidade.

2. No limiar deste século verificaram-se grandes desenvolvimentos na teoria das funções reais, sobretudo devido às pesquisas de Lebesgue sobre a integração e a derivação.

Valendo-se desses conhecimentos, Carathéodory [1](*) pode dar uma nova versão da teoria elementar. Designaremos essa versão por "*teoria de Carathéodory*".

A teoria de Carathéodory inclui sistemas de equações diferenciais ordinárias com funções definidoras alta-

(*) - Indicações como esta são relativas às referências bibliográficas encontradas no final deste trabalho.

mente descontínuas, abrangendo por esta razão os sistemas de equações diferenciais ordinárias considerados na teoria elementar.

3. A teoria de Carathéodory encontra muitas aplicações. Dentre as mais importantes, figura o seu uso na teoria dos processos de Controle Ótimo, feito por Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze e Mischchenko [5]. A ocorrência destas últimas aplicações é compreensível: a prática fornece diversos processos de controle para os quais os controles ótimos são funções descontínuas.

Inúmeras publicações a respeito destas aplicações foram feitas. A propósito, gostaríamos de conduzir o leitor a um trabalho por nós apresentado no artigo "Sobre a teoria do Controle Ótimo - Aplicações em Controle de Reatores", publicado pelo Instituto de Energia Atômica de São Paulo, em sua série de publicações.

4. Foi procurando estudar processos de controle ótimo que sentimos a necessidade de ter um bom conhecimento do aludido trabalho de Carathéodory.

A finalidade principal desta dissertação é a apresentação de alguns tópicos centrais da teoria de Carathéodory. A atitude que reflete este trabalho é a de produzir uma exposição de modo a facilitar ao leitor o acesso a essa teoria, não existindo preocupações de se atingir generalidade máxima.

A forma que adotaremos para fazer essa exposição é a seguinte.

Um texto muito utilizado em nosso meio, e que expõe teoremas fundamentais da teoria elementar, é aquele contido no Capítulo IV de Pontriaguine [4]. Pretendemos então, produzir uma redação paralela à de Pontriaguine [4] de forma a mostrar que diversos teoremas podem ser transpostos da teoria elementar para a teoria de Carathéodory com poucas modificações estruturais.

E R R A T A

PÁG.	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
vi	-5	AO PARÂMETRO	A PARÂMETROS
21	14	$\gamma_0(2-\frac{2}{\rho}(t-t_0),$	$\gamma_0(2-\frac{2}{\rho}(t-t_0)),$
23	-4	[7, p.107]	[7, p.106]
30	11	$\vec{x}$ fixado em Δ_{a^*},	$\vec{x}$ fixado em Δ_a,,
41	12	$\vec{\phi}$ é em escada - em J,	$\vec{\phi}$ é em escada em J,
46	11	Carathéodory.	Carathéodory
54	3	$(t_0;\vec{x}_0)$	$(t_0,\vec{x}_0)$
67	6	$q_1 \le t < q_2$	$q_1 < t < q_2$
80	11	$\vec{x} = \vec{\phi}(t)$	$\vec{x} = \vec{\phi}(t)$
83	3	A PARÂMETRO	A PARÂMETROS
95	5	$\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^j},\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n,$	$\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^j},\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n,$ (3)
95	-2	valor de $\vec{\mu}^*$	valor $\vec{\mu}^*$
104	3	em $t_0 \le t \le t_2$	em $t_0 \le t \le t_2$
104	6	Decorre	Decorre
113	-9	com t e $\vec{x}$, iguais	com t e $\vec{x}$ iguais,
114	-2	$\int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} \dots$	$\int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \dots$
116	7	$h_k^i \dots$	$h_{n+k}^i \dots$
121	3	para $\tau \neq 0$	para $\tau = 0$
127	10	Equations	Equations

ÍNDICE

- 0 -

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO GERAL

1 - INTRODUÇÃO

Teoremas de existência e unicidade de solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, bem como teoremas relativos a dependência contínua e a diferenciabilidade da solução em relação a parâmetros, encontram-se expostos em diversos locais. Por exemplo no texto de Pontriaguine [4]; mais especificadamente, no seu Capítulo IV encontram-se demonstrações de tais teoremas.

Neste trabalho assumiremos esse texto como básico e apresentaremos teoremas correspondentes aos mencionados teoremas no caso dos sistemas de equações diferenciais ordinárias ditos de Carathéodory.

Convém notar que para uma boa compreensão dos teoremas referentes aos sistemas de Carathéodory, é necessária uma certa familiaridade com teoria da integração segundo Lebesgue. Para essa teoria utilizaremos os textos [7] e [8], que cobrem as nossas necessidades.

Antes de entrarmos efetivamente nos sistemas de Ca rathéodory, vamos rever na secção seguinte, os teoremas centrais do Capítulo IV de [4].

2 - REVISÃO GERAL

Sistemas Elementares - Nossas considerações nesta secção, dirão respeito aos sistemas de equações diferenciais estudados em [4].

Lidaremos com sistemas de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \; i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

onde t é a variável real independente, $x^1,\ldots,x^n$ são funções reais incognitas dessa variável, cujas derivadas em relação a t indicaremos respectivamente por $\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n$, e $f^1,\ldots,f^n$ são funções reais de (n+1) variáveis reais, definidas em um aberto Γ do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ das variáveis $t,x^1,\ldots,x^n$.

Elementarmente, diz-se que um sistema de funções

$$x^i = \phi^i(t), \; i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

definidas em um certo intervalo $r_1 < t < r_2$ (não vazio) é *solução* do sistema (1), se as igualdades

$$\dot{\phi}^i(t) = f^i(t,\phi^1(t), \ldots, \phi^n(t)), \; i=1,\ldots,n, \tag{3}$$

forem verificadas identicamente em t sobre o intervalo $r_1 < t < r_2$. (As possibilidades $r_1 = -\infty$ e $r_2 = +\infty$ não são excluídas.)

Para facilidade de referência, diremos que o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,\ldots,n,$$

é um *sistema elementar*, quando as funções

$$f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,\ldots,n,$$

forem contínuas em Γ, relativamente a todos os seus argumentos.

Observemos que se

$$x^i = \phi^i(t),\ i=1,\ldots,n,$$

é solução de um sistema elementar, definida em $r_1<t<r_2$, então as funções ϕ^i, $i=1,\ldots,n$, são contínuas em $r_1<t<r_2$ e possuem derivadas $\dot{\phi}^i$, $i=1,\ldots,n$, também contínuas neste intervalo.

<u>Teorema de Existência e Unicidade</u> - O Teorema 1 que enunciaremos a seguir diz respeito a existência e unicidade de solução para certos sistemas do tipo (1). Trata-se do Teorema 2 de [4, p.25].

<u>TEOREMA 1</u> - *Seja*

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,\ldots,n, \tag{4}$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Suponhamos que as funções

$$f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,\ldots,n, \tag{5}$$

sejam contínuas num aberto Γ *de* $\mathbb{R}^{n+1}$, *e que as derivadas parciais*

$$\frac{\partial f^i(t,x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^j}, \quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{matrix} \tag{6}$$

existam e sejam contínuas nesse aberto.

Nestas condições pode-se fazer as seguintes afirmações:

1) *Para cada ponto* $(t_0,x_0^1,\ldots,x_0^n)$ *de* Γ, *existe uma solução*

$$x^i = \phi^i(t), \quad i=1,\ldots,n, \tag{7}$$

do sistema (4), definida num certo intervalo contendo o ponto t_0 *e satisfazendo as condições*

$$\phi^i(t_0) = x_0^i, \quad i=1,\ldots,n. \tag{8}$$

2) *Se*

$$x^i = \psi^i(t), \quad i=1,\ldots,n,$$

e

$$x^i = \chi^i(t), \quad i=1,\ldots,n,$$

são duas soluções quaisquer do sistema (4), verificando as condições

$$\psi^i(t_0) = \chi^i(t_0) = x_0^i, \quad i=1,\ldots,n, \tag{9}$$

de modo que cada solução está definida em seu próprio intervalo de valores de t *contendo o ponto* t_0, *então estas soluções coincidem onde ambas estão definidas.*

Os valores

$$t_0, x_0^1, \dots, x_0^n$$

denominam-se *valores iniciais* para a solução (7) e as relações (8) *condições iniciais* para essa solução. Por comodidade de expressão, ao considerarmos uma solução

$$x^i = \phi^i(t),\ i=1,\dots,n,$$

do sistema (4) satisfazendo a condição inicial

$$\phi^i(t_0) = x_0^i,\ i=1,\dots,n,$$

diremos que essa solução é *solução do sistema (4) para os valores iniciais* $t_0, x_0^1, \dots, x_0^n$.

<u>Soluções Maximais</u> - Seja

$$x^i = \phi^i(t),\ i=1,\dots,n, \tag{10}$$

uma solução do sistema (1), definida no intervalo $r_1<t<r_2$. Seja

$$x^i = \psi^i(t),\ i=1,\dots,n, \tag{11}$$

também uma solução do sistema (1), definida no intervalo $s_1<t<s_2$.

Diremos que a solução (11) é um *prolongamento* da solução (10) se o intervalo $s_1<t<s_2$ contém o intervalo $r_1<t<r_2$ (isto é, $s_1\le r_1$ e $r_2\le s_2$) e se a solução (10) coincide com a solução (11) no intervalo $r_1<t<r_2$. Em particular nós consideraremos (11) como um prolongamento de (10) mesmo no

caso em que as duas soluções coincidam integralmente (de modo que $s_1 = r_1$ e $s_2 = r_2$).

A solução (10) é dita *maximal* se não existe nenhuma solução diferente dela própria que seja um seu prolongamento.

Dado um sistema de equações diferenciais ordinárias, satisfazendo as condições do Teorema 1, demonstra-se que para cada ponto $(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n)$ de Γ, existe uma única solução maximal

$$x^i = \phi^i(t), \; i=1,\ldots,n,$$

do sistema (4), satisfazendo a condição inicial

$$\phi^i(t_0) = x_0^i, \; i=1,\ldots,n.$$

Tal demonstração encontra-se em [4, p.180].

<u>Sistemas Lineares</u> - No caso especial de sistemas elementares do tipo linear, todas as soluções maximais têm o mesmo intervalo de definição, intervalo este que é imediatamente determinado uma vez dado o sistema.

O fato que acaba de ser mencionado justifica uma consideração em separado de tais sistemas. Assim, o Teorema 2 que enunciaremos a seguir refere-se a existência de solução para sistemas elementares do tipo linear. Trata-se do Teorema 3 de [4, p.26].

<u>TEOREMA 2</u> - *Seja*

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)x^j + b^i(t), \; i=1,\ldots,n, \tag{12}$$

um sistema linear de equações diferenciais ordinárias. Suponhamos que os coeficientes $a^i_j(t)$ *e os termos livres* $b^i(t)$ *sejam funções contínuas da variável independente* t*, definidas em um certo intervalo* $q_1 < t < q_2$*. Então, para quaisquer valores iniciais*

$$t_0, x^1_0, \ldots, x^n_0, \text{ com } q_1 < t_0 < q_2, \tag{13}$$

existe uma solução

$$x^i = \phi^i(t), \; i=1,\ldots,n, \tag{14}$$

do sistema (12), que satisfaz as condições iniciais

$$\phi^i(t_0) = x^i_0, \; i=1,\ldots,n,$$

e que é definida em <u>*todo*</u> *intervalo* $q_1 < t < q_2$.

<u>Notação</u> - Vamos agora introduzir certas notações vetoriais que faremos uso no decorrer do trabalho.

Indicaremos por

$$\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n)$$

um vetor de $\mathbb{R}^n$ e por $|\vec{x}|$ o seu módulo, definido da seguinte maneira

$$|\vec{x}| = [(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]^{1/2}.$$

Indicando por

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = (f^1(t,\vec{x}), \ldots, f^n(t,\vec{x}))$$

uma função vetorial do ponto $(t,\vec{x}) = (t, x^1, \ldots, x^n)$ do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos dar ao sistema

um sistema linear de equações diferenciais ordinárias. Suponhamos que os coeficientes $a^i_j(t)$ *e os termos livres* $b^i(t)$ *sejam funções contínuas da variável independente* t*, definidas em um certo intervalo* $q_1 < t < q_2$*. Então, para quaisquer valores iniciais*

$$t_0, x^1_0, \ldots, x^n_0, \text{ com } q_1 < t_0 < q_2, \tag{13}$$

existe uma solução

$$x^i = \phi^i(t),\ i=1,\ldots,n, \tag{14}$$

do sistema (12), que satisfaz as condições iniciais

$$\phi^i(t_0) = x^i_0,\ i=1,\ldots,n,$$

e que é definida em <u>*todo*</u> *intervalo* $q_1 < t < q_2$.

<u>Notação</u> - Vamos agora introduzir certas notações vetoriais que faremos uso no decorrer do trabalho.

Indicaremos por

$$\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n)$$

um vetor de $\mathbb{R}^n$ e por $|\vec{x}|$ o seu módulo, definido da seguinte maneira

$$|\vec{x}| = [(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]^{1/2}.$$

Indicando por

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = (f^1(t,\vec{x}), \ldots, f^n(t,\vec{x}))$$

uma função vetorial do ponto $(t,\vec{x}) = (t, x^1, \ldots, x^n)$ do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos dar ao sistema

um sistema linear de equações diferenciais ordinárias. Suponhamos que os coeficientes $a^i_j(t)$ *e os termos livres* $b^i(t)$ *sejam funções contínuas da variável independente* t*, definidas em um certo intervalo* $q_1 < t < q_2$*. Então, para quaisquer valores iniciais*

$$t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n, \text{ com } q_1 < t_0 < q_2, \tag{13}$$

existe uma solução

$$x^i = \phi^i(t), \; i=1,\ldots,n, \tag{14}$$

do sistema (12), que satisfaz as condições iniciais

$$\phi^i(t_0) = x_0^i, \; i=1,\ldots,n,$$

e que é definida em <u>*todo*</u> *intervalo* $q_1 < t < q_2$.

<u>Notação</u> - Vamos agora introduzir certas notações vetoriais que faremos uso no decorrer do trabalho.

Indicaremos por

$$\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n)$$

um vetor de $\mathbb{R}^n$ e por $|\vec{x}|$ o seu módulo, definido da seguinte maneira

$$|\vec{x}| = [(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]^{1/2}.$$

Indicando por

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = (f^1(t,\vec{x}), \ldots, f^n(t,\vec{x}))$$

uma função vetorial do ponto $(t,\vec{x}) = (t, x^1, \ldots, x^n)$ do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos dar ao sistema

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,\ldots,n,$$

a seguinte forma vetorial

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x}),$$

onde

$$\dot{\vec{x}} = (\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n).$$

Dependência da solução em relação a parâmetros - Revisaremos rapidamente as questões da dependência contínua e da diferenciabilidade da solução relativamente a parâmetros que compareçam no sistema.

Para tanto, principiemos por descrever os sistemas que iremos considerar.

Seja

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n,\ \mu^1,\ldots,\mu^\ell),\ i=1,\ldots,n, \tag{15}$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias, cujos segundos membros f^i, $i=1,\ldots,n$, dependem dos parâmetros reais $\mu^1,\ldots,\mu^\ell$, sendo definidos num aberto $\tilde{\Gamma}$ do espaço $\mathbb{R}^{1+n+\ell}$ das variáveis $t,x^1,\ldots,x^n,\ \mu^1,\ldots,\mu^\ell$.

Colocando

$$\vec{x} = (x^1,\ldots,x^n),$$

$$\vec{\mu} = (\mu^1,\ldots,\mu^\ell)$$

e

$$\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu}) = (f^1(t,\vec{x},\vec{\mu}),\ldots,f^n(t,\vec{x},\vec{\mu})),$$

podemos reescrever o sistema (15) sob a forma vetorial

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu}). \tag{16}$$

A denominação *sistema elementar* será atribuida ao sistema (15) sempre que as funções f^i, $i=1,\ldots,n$, forem contínuas em $\bar{\Gamma}$, em relação a todos os seus argumentos.

Admitamos que este seja o caso, e suponhamos que as funções

$$\frac{\partial f^i(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell)}{\partial x^j}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{array}$$

sejam contínuas em $\bar{\Gamma}$, relativamente a todos os seus argumentos.

Fixados os valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$, seja M o conjunto definido pela seguinte expressão

$$M = \{\vec{\mu} \in \mathbb{R}^\ell:\ (t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}) \in \bar{\Gamma}\}.$$

A cada ponto $\vec{\mu}$ de M, corresponde uma solução maximal

$$\vec{\phi}(t,\vec{\mu}) = (\phi^1(t,\vec{\mu}),\ldots,\phi^n(t,\vec{\mu})), \tag{17}$$

do sistema (16) para os valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$, definida em um intervalo $m_1(\vec{\mu}) < t < m_2(\vec{\mu})$.

O conjunto T *de todos os pontos* $(t,\vec{\mu})$ *nos quais a função* $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ *está definida, é descrito por duas condições: o ponto* $\vec{\mu}$ *pertence a* M *e* t *pertence ao intervalo* $m_1(\vec{\mu}) < t < m_2(\vec{\mu})$.

O Teorema 3 que enunciaremos a seguir, exprime o fato que a solução (17) é contínua em relação a parâmetros, ou seja, a dependência contínua da solução em relação a parâmetros. Trata-se do Teorema 13 de [4, p.186].

TEOREMA 3 - *Nas suposições anteriormente feitas, o conjunto* T *de todos os pontos* $(t,\vec{\mu})$ *onde a função* $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ *está definida, é um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^{1+\ell}$. *Além disso, a função* $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ *é contínua do par de variáveis* $t,\vec{\mu}$ *no conjunto* T.

Para finalizar esta revisão, enunciaremos o seguinte Teorema 4, relativo à diferenciabilidade da solução em relação a parâmetros. Trata-se do Teorema 16 de [4, p.194].

TEOREMA 4 - *Além das condições admitidas no Teorema 3, suponha-se que as derivadas parciais dos segundos membros, em relação aos parâmetros*

$$\frac{\partial f^i(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell)}{\partial\mu^k},\quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ k=1,\ldots,\ell, \end{matrix}$$

são funções contínuas em $\tilde{\Gamma}$.

Nestas condições pode-se fazer as seguintes afirmações:

1) As derivadas parciais

$$\frac{\partial\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial\mu^k},\quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ k=1,\ldots,\ell, \end{matrix}$$

são contínuas em T.

2) As derivadas parciais mistas

$$\frac{\partial^2\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial t\partial\mu^k}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell, \end{matrix}$$

são contínuas em T.

3) As derivadas parciais mistas

$$\frac{\partial^2\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial\mu^k\partial t}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell, \end{matrix}$$

são contínuas em T. *Além disso, qualquer que seja o ponto* $(t,\vec{\mu})$ *em* T

$$\frac{\partial^2\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial t\partial\mu^k} = \frac{\partial^2\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial\mu^k\partial t}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell. \end{matrix}$$

3 - SISTEMAS DE CARATHÉODORY

A presente secção é primordialmente dedicada à introdução dos sistemas de equações diferenciais ordinárias, chamados sistemas de Carathéodory.

Como veremos abaixo, a noção de sistema de Carathéodory está ligada à noção de função de Carathéodory. Começaremos pois, com a introdução desta última noção.

Tomemos o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ das variáveis $t,\vec{x}$. Dado um ponto $(t_0,\vec{x}_0)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, designaremos por $V(q,a)$ o conjunto definido pela expressão

$$V(q,a) = \{(t,\vec{x})\in\mathbb{R}^{n+1}: |t-t_0|<q,\ |\vec{x}-\vec{x}_0|<a\},$$

2) As derivadas parciais mistas

$$\frac{\partial^2 \phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial t \partial \mu^k}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell, \end{matrix}$$

são contínuas em T.

3) As derivadas parciais mistas

$$\frac{\partial^2 \phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial \mu^k \partial t}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell, \end{matrix}$$

são contínuas em T. *Além disso, qualquer que seja o ponto* $(t,\vec{\mu})$ *em* T

$$\frac{\partial^2 \phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial t \partial \mu^k} = \frac{\partial^2 \phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial \mu^k \partial t}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell. \end{matrix}$$

3 - SISTEMAS DE CARATHÉODORY

A presente secção é primordialmente dedicada à introdução dos sistemas de equações diferenciais ordinárias, chamados sistemas de Carathéodory.

Como veremos abaixo, a noção de sistema de Carathéodory está ligada à noção de função de Carathéodory. Começaremos pois, com a introdução desta última noção.

Tomemos o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ das variáveis $t,\vec{x}$. Dado um ponto $(t_0,\vec{x}_0)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, designaremos por $V(q,a)$ o conjunto definido pela expressão

$$V(q,a) = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}: |t-t_0| < q, \ |\vec{x}-\vec{x}_0| < a\},$$

onde q e a são números reais positivos.

Indicaremos por J_q e Δ_a o intervalo de $\mathbb{R}$ e a bola de $\mathbb{R}^n$ definidos respectivamente pelas expressões

$$J_q = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| < q\},$$

$$\Delta_a = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{x}_0| < a\},$$

de tal forma que $V(q,a)$ é o produto cartesiano de J_q por Δ_a.

Consideremos uma função real $f(t,\vec{x})$ definida em um conjunto aberto Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Diremos que $f(t,\vec{x})$ *é uma função de Carathéodory num dado ponto* $(t_0,\vec{x}_0)$ *de* Γ, se existir uma vizinhança $V(q,a)$ desse ponto, contida em Γ, onde f satisfaz as seguintes condições:

1) Qualquer que seja $\vec{x}$ fixado em Δ_a, f é uma função mensurável de t em J_q;
2) Qualquer que seja t fixado em J_q, f é uma função contínua de $\vec{x}$ em Δ_a;
3) Existe uma função

$$m_0 = m_0(t)$$

integrável segundo Lebesgue em J_q, para a qual

$$|f(t,\vec{x})| \leq m_0(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $V(q,a)$.

Diremos que $f(t,\vec{x})$ *é uma função de Carathéodory num subconjunto qualquer* W *de* Γ, se f for função de Carathéodory em qualquer ponto de W.

Designaremos as condições 1),2) e 3) acima por *Condições de Carathéodory.*

Cabe aqui a apresentação de uma proposição que faremos uso no capítulo seguinte. Tanto nesta proposição, como no decorrer do trabalho, utilizaremos a notação que segue.

Designaremos por $\bar{V}(q,a)$ o fecho do conjunto $V(q,a)$. Vê-se imediatamente que o conjunto $\bar{V}(q,a)$ é dado pela expressão

$$\bar{V}(q,a) = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}: |t-t_0| \leq q, |\vec{x}-\vec{x}_0| \leq a\},$$

e mais, que $\bar{V}(q,a)$ é o produto cartesiano do intervalo fechado $\bar{J}_q$ de $\mathbb{R}$ pela bola fechada $\bar{\Delta}_a$ de $\mathbb{R}^n$, respectivamente dados pelas expressões

$$\bar{J}_q = \{t \in \mathbb{R}: |t-t_0| \leq q\},$$

$$\bar{\Delta}_a = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n: |\vec{x}-\vec{x}_0| \leq a\}.$$

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - *Suponha-se que* f *seja uma função de Carathéodory em* Γ, *e considere-se um qualquer* $\bar{V}(q,a)$ *contido em* Γ.

Nestas condições pode-se afirmar que:

a) *Qualquer que seja* $\vec{x}$ *fixado em* $\bar{\Delta}_a$, f *é uma função mensurável de* t *em* $\bar{J}_q$;

b) *Qualquer que seja* t *fixado em* $\bar{J}_q$, f *é uma função contínua de* $\vec{x}$ *em* $\bar{\Delta}_a$;

c) *Existe uma função*

$$m = m(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, *para a qual*

$$|f(t,\vec{x})| \leq m(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ *pertencente a* $\bar{V}(q,a)$.

DEMONSTRAÇÃO - De fato, considerado um ponto $(t^*,\vec{x}^*)$ qualquer de $\bar{V}(q,a)$, designe-se por $V(q^*,a^*)$ uma vizinhança desse ponto, cuja existência é assegurada pelo fato de que f é função de Carathéodory no mesmo.

Considere-se o conjunto das vizinhanças $V(q^*,a^*)$ obtido quando $(t^*,\vec{x}^*)$ percorre $\bar{V}(q,a)$. Esse conjunto é um recobrimento aberto de $\bar{V}(q,a)$. Como $\bar{V}(q,a)$ é um compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue pode-se afirmar que existe um conjunto finito dessas vizinhanças, digamos,

$$V(q_1,a_1),\ldots,V(q_n,a_n), \tag{1}$$

que recobrem $\bar{V}(q,a)$.

Fixado $\vec{x}$ em $\bar{\Delta}_a$, consideremos o conjunto dos pontos $(t,\vec{x})$ obtidos quando t percorre $\bar{J}_q$. Designemos por $\tilde{I}$ esse conjunto. Temos que qualquer que seja $(t,\vec{x})$ de $\tilde{I}$, existe uma vizinhança $V(q_i,a_i)$ de (1) tal que $(t,\vec{x})$ pertence a essa vizinhança. Podemos então extrair de (1) um conjunto de vizinhanças

$$V(q_{i_1},a_{i_1}),\ldots,V(q_{i_k},a_{i_k}) \tag{2}$$

que recobrem $\tilde{I}$ e tal que a intersecção de $\tilde{I}$ com cada uma dessas vizinhanças é não vazia.

Nestas condições vê-se facilmente que $\bar{J}_q$ está contido na união dos correspondentes intervalos

$$J_{q_{i_1}},\ldots,J_{q_{i_k}}$$

e que $f(t,\vec{x})$ é mensurável nessa união. Portanto $f(t,\vec{x})$ é mensurável em $\bar{J}_q$. Resulta daí, que a condição a) é verificada. Seguindo um procedimento análogo, vê-se sem dificuldade que a condição b) é verificada.

Finalmente, correspondentemente ao conjunto (1), considere-se o conjunto dos intervalos

$$J_{q_1},\ldots,J_{q_n},$$

e sejam

$$m_1,\ldots,m_n$$

funções integráveis segundo Lebesgue respectivamente nesses intervalos, tais que

$$|f(t,\vec{x})| \le m_i(t)$$

quando $(t,\vec{x})$ pertence a $V(q_i,a_i)$, $i=1,\ldots,n$. A existência dessas funções é assegurada pela terceira condição de Carathéodory.

Definamos em $\bar{J}_q$ as funções

$$\bar{m}_i(t) = \begin{cases} m_i(t) & \text{em } \bar{J}_q \cap J_{q_i} \\ 0 & \text{em } \bar{J}_q - J_{q_i} \end{cases}$$

e seja

$$m(t) = \sup\{\bar{m}_1(t),\ldots,\bar{m}_n(t)\}$$

com t percorrendo $\bar{J}_q$.

Constata-se sem dificuldade que m é uma função integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, e que

$$|f(t,\vec{x})| \leq m(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $\bar{V}(q,a)$, isto é, a condição c) resulta verificada.

Posto isto, passemos à definição de sistema de Carathéodory.

Consideremos um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Nesse sistema t é a variável real independente, $x^1,\ldots\ldots,x^n$ são funções reais incognitas dessa variável, cujas derivadas em relação a t indicaremos respectivamente por $\dot{x}^1,\ldots\ldots,\dot{x}^n$, e $f^1,\ldots,f^n$ são funções reais de $(n+1)$ variáveis reais, definidas em um aberto Γ do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ das variáveis $t,x^1,\ldots,x^n$.

Diremos que o sistema (3) é um *sistema de Carathéodory* quando $f^i(t,\vec{x})$, $i=1,\ldots,n$, forem funções de Carathéodory em Γ.

Uma vez definidos os sistemas de Carathéodory, cabe agora introduzirmos uma definição que adotaremos como definição de solução para esses sitemas; por comodidade, as soluções no sentido dessa definição serão designadas por soluções segundo Carathéodory.

Um sistema de funções

$$x^i = \phi^i(t),\ i=1,\ldots,n, \tag{4}$$

definidas em um certo intervalo $r_1 < t < r_2$ (não vazio), absolutamente contínuas em qualquer sub-intervalo compacto de $r_1<t<r_2$ é *solução segundo Carathéodory* do sistema (3), se as igualdades

$$\dot{\phi}^i(t) = f^i(t,\phi^1(t),\ldots,\phi^n(t)),\ i=1,\ldots,n, \tag{5}$$

forem verificadas quase sempre em t no intervalo $r_1 < t < r_2$, isto é, se as (5) forem satisfeitas no referido intervalo exceto num conjunto de medida de Lebesgue nula. O intervalo $r_1 < t < r_2$ denomina-se *intervalo de definição da solução* (4). (As possibilidades $r_1 = -\infty$ e $r_2 = +\infty$ não são excluidas.)

Faremos a seguir alguns comentários relativos a definição de solução segundo Carathéodory.

1. No início da Secção 2 foi apresentada uma definição de solução; as soluções caracterizadas por essa definição serão designadas por *soluções no sentido elementar*.

A primeira idéia que tivemos ao definir solução segundo Carathéodory foi a de modificar a definição de solução no sentido elementar, através da exclusiva substituição da exigência de igualdade sempre por igualdade quase sempre. Mais especificadamente, gostaríamos de poder definir solução segundo Carathéodory do seguinte modo:

Um sistema de funções

$$x^i = \phi^i(t), \ i=1,\ldots,n, \tag{6}$$

definidas em um certo intervalo $r_1 < t < r_2$ (não vazio) é solução do sistema (3), se as igualdades

$$\dot{\phi}^i(t) = f^i(t,\phi^1(t),\ldots,\phi^n(t)), \ i=1,\ldots,n, \tag{7}$$

forem verificadas quase sempre em t no intervalo $r_1 < t < r_2$.

Por facilidade de expressão referir-nos-emos a uma solução definida da maneira acima como sendo uma *solução na acepção primeira*.

Observemos que a diferença entre a precedente definição de solução e a definição de solução segundo Carathéodory é que nesta última exigimos que as funções que constituem a solução sejam absolutamente contínuas nos sub-intervalos compactos de $r_1 < t < r_2$, exigência esta que omitimos na primeira.

Uma omissão desta natureza acarreta certas inconveniências, como por exemplo a falta de unicidade de solução na acepção primeira, que passamos a mostrar.

Consideremos uma equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{8}$$

onde f é uma função real definida em um aberto Γ de $\mathbb{R}^2$, e seja

$$x = \phi(t) \tag{9}$$

uma solução na acepção primeira dessa equação, definida em $r_1 < t < r_2$ e satisfazendo a condição

$$\phi(t_0) = x_0.$$

Qualquer que seja o ponto t' de $r_1 < t < r_2$, com t' diferente de t_0, e c uma constante real cujo valor é diferente de $\phi(t')$, a função

$$x = \phi^*(t) = \begin{cases} \phi(t) & r_1 < t < t' \\ c & t = t' \\ \phi(t) & t' < t < r_2 \end{cases}$$

também é solução na acepção primeira da equação (8), uma vez que a igualdade

$$\dot{\phi}^*(t) = f(t, \phi^*(t)),$$

verifica-se quase sempre em $r_1 < t < r_2$. Além disso, ϕ^* é obviamente diferente de ϕ, e satisfaz a condição

$$\phi^*(t_0) = \phi(t_0) = x_0.$$

Este fato mostra que com a definição de solução na acepção primeira nunca existirá unicidade de solução em condições análogas às do Teorema 2.1 (*).

Se tivéssemos exigido continuidade na definição de solução na acepção primeira, o mencionado fato não teria lu

(*) - Nesta secção e subsequentemente neste trabalho, a referência a teoremas e relações de outras secções será feita como acima, isto é, ao escrevermos Teorema 2.1 estaremos nos referindo ao Teorema 1 da secção 2.

gar. À vista disto parece cabível a tentativa de se acrescentar à definição de solução na acepção primeira uma exigência de continuidade, conforme a seguinte definição:

Um sistema de funções

$$x^i = \phi^i(t),\ i=1,\dots,n, \tag{10}$$

contínuas em um certo intervalo $r_1 < t < r_2$ (não vazio) é solução do sistema (3), se as igualdades

$$\dot{\phi}^i(t) = f^i(t,\phi^1(t),\dots,\phi^n(t)),\ i=1,\dots,n, \tag{11}$$

forem verificadas quase sempre em t no intervalo $r_1 < t < r_2$.

Por facilidade de expressão referir-nos-emos a uma solução definida da maneira acima como sendo *solução na acepção segunda*.

Esta definição ainda apresenta certas inconveniências; com efeito, mostraremos a seguir, que com ela também não se consegue obter unicidade de solução.

Consideremos uma equação diferencial ordinária do tipo

$$\dot{x} = f(t) \tag{12}$$

onde f é uma função real definida em um aberto I de $\mathbb{R}$, e seja

$$x = \phi(t) \tag{13}$$

uma solução na acepção segunda dessa equação, definida em $r_1 < t < r_2$ e satisfazendo a condição

$$\phi(t_0) = x_0 \ . \tag{14}$$

Em breves linhas, mostraremos que, utilizando a conhecida função de Cantor(*), podemos obter uma outra solução da (12), diferente da (13), definida no mesmo intervalo $r_1 < t < r_2$, e satisfazendo a mesma condição (14).

Com efeito, designemos a função de Cantor por γ_0. A mesma é uma função real definida em $0 \le t \le 1$, assumindo valor zero para t igual a zero e o valor 1 para t igual a 1. Trata-se de uma função contínua em $0 \le t \le 1$ e com derivada nula quase sempre nesse intervalo. Assim sendo a função γ_1 definida pela expressão

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} 0, & r_1 < t < t_0 \\ \gamma_0(\frac{2}{\rho}(t-t_0)), & t_0 \le t \le t_0 + \frac{\rho}{2} \\ \gamma_0(2-\frac{2}{\rho}(t-t_0)), & t_0+\frac{\rho}{2} < t < t_0+\rho \\ 0, & t_0 + \rho \le t < r_2 \end{cases}$$

onde $0 < \rho < r_2 - t_0$, é uma função não identicamente nula e contínua em $r_1 < t < r_2$, possuindo derivada nula quase sempre neste intervalo. Ainda mais,

$$\gamma_1(t_0) = 0.$$

É fácil ver que tomando-se uma constante real não nula e suficientemente pequena em módulo, a função

$$\phi^*(t) = \phi(t) + c\gamma_1(t)$$

(*) - O leitor poderá encontrar a definição da função de Cantor em [8, p.6].

ainda dá uma solução na acepção segunda satisfazendo a condição (14), solução esta que é distinta de $\phi(t)$.

Analizando a função γ_1, verificamos que ela não é absolutamente contínua em todos os sub-intervalos compactos de $r_1 < t < r_2$; daí vê-se que se na última definição de solução apresentada figurasse uma exigência de continuidade absoluta no lugar da exigência de continuidade, a argumentação acima não poderia ser feita.

Adotaremos pois a definição de solução segundo Carathéodory, anteriormente apresentada.

Conforme veremos no desenvolvimento desta tese, a definição de solução segundo Carathéodory é satisfatória não só relativamente à questão de unicidade, como também à da existência, pois para uma classe muito grande de sistemas de Carathéodory pode-se fazer afirmações de existência e unicidade de solução segundo Carathéodory em condições análogas ao do Teorema 2.1.

2. Considerando um sistema elementar, poder-se-ia à primeira vista ter a impressão de que poderíamos restringir a classe de suas soluções, se adotarmos a definição de solução no sentido de Carathéodory e não no sentido elementar. Essa impressão se deve ao fato de aparecer na primeira definição explicitamente uma exigência de continuidade absoluta, exigência essa que não é explicitamente feita na segunda definição.

Entretanto, a referida exigência está implicitamente contida na definição de solução no sentido elementar, conforme passamos a mostrar.

De fato, basta lembrarmos que se o sitema de funções

$$x^i = \phi^i(t), \ i=1,\dots,n,$$

é solução no sentido elementar de um sistema elementar

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\dots,x^n), \ i=1,\dots,n,$$

solução essa definida em $r_1 < t < r_2$, então as igualdades

$$\dot{\phi}^i(t) = f^i(t,\phi^1(t),\dots,\phi^n(t)), \ i=1,\dots,n,$$

verificam-se identicamente em t sobre o intervalo $r_1 < t < r_2$.

Como as funções ϕ^i e $\dot{\phi}^i$, $i=1,\dots,n$, são contínuas em $r_1 < t < r_2$, sendo $r_1 < t_0 < r_2$, tem-se que

$$\phi^i(t) = \phi^i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{\phi}^i(\xi)d\xi, \ i=1,\dots,n,$$

nesse intervalo. Portanto podemos dizer que a solução pode ser escrita como sendo a integral indefinida de sua derivada, o que implica que a solução é absolutamente contínua em qualquer sub-intervalo compacto de $r_1 < t < r_2$. (A demonstração desta implicação encontra-se em [7, p.107].)

Diversas considerações relativas à definição de solução segundo Carathéodory ainda poderiam ser feitas. Limitar-nos-emos aos comentários acima, pois o seu desenvolvimento alongaria demasiadamente este texto, acarretando um desvio do seu objetivo central.

Mas antes de encerrarmos este Capítulo, não queremos deixar de acrescentar o seguinte comentário de caráter geral.

As hipóteses de continuidade impostas sobre as diferentes funções que aparecem nos teoremas enunciados no livro de Pontriaguine [4] e transcritos na Secção 2, serão substituidas por correspondentes hipóteses de que as aludidas funções são de Carathéodory. Na maioria dos casos, com esta substituição, poderemos exibir teoremas correspondentes aos mencionados teoremas, para os sistemas de Carathéodory.

CAPÍTULO II

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO SEGUNDO CARATHÉODORY

4 - INTRODUÇÃO

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

onde t é a variável real independente, $x^1,\ldots,x^n$ são funções incógnitas dessa variável e $f^1,\ldots,f^n$ são funções definidas em um aberto Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Neste capítulo estudaremos teoremas de existência e unicidade de solução segundo Carathéodory do sistema (1), quando o mesmo é considerado como pertencente a uma subclasse bastante ampla da classe dos sistemas de Carathéodory.

Empregaremos o método das aproximações sucessivas amplamente desenvolvido por Picard. Trata-se de um método muito utilizado em Análise na demonstração de teoremas de existência e unicidade.

5 - ENUNCIADO DO TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE DE SOLUÇÃO SEGUNDO CARATHÉODORY

Esta secção é dedicada ao enunciado do seguinte Teorema de Existência e Unicidade de solução segundo Carathéodory. A menos de menção contrária, doravante sempre que falarmos em solução, entenderemos solução no sentido de Carathéodory.

TEOREMA 1 - *Seja*

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\dots,x^n),\ i=1,\dots,n, \qquad (1)$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Suponhamos que os segundos membros f^i, $i=1,\dots, n$, *das equações (1) sejam funções de Carathéodory num aberto* Γ *de* $\mathbb{R}^{n+1}$*; além disso, suponhamos que existam as derivadas parciais*

$$\frac{\partial f^i(t,\ x^1,\dots,x^n)}{\partial x^j},\quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n,\\ j=1,\dots,n, \end{array} \qquad (2)$$

em Γ *e que também sejam funções de Carathéodory no mesmo aberto.*

Nestas condições, pode-se fazer as seguintes afirmações:

1) Para cada ponto $(t_0,x_0^1,\dots,x_0^n)$ *de* Γ*, existe uma solução*

$$x^i = \phi^i(t), \ i=1,\dots,n, \tag{3}$$

do sistema (1), definida num certo intervalo contendo o ponto t_0 *e satisfazendo as condições*

$$\phi^i(t_0) = x_0^i, \ i=1,\dots,n. \tag{4}$$

2) Se

$$x^i = \psi^i(t), \ i=1,\dots,n,$$

e

$$x^i = \chi^i(t), \ i=1,\dots,n,$$

são duas soluções quaisquer do sistema (1) verificando as condições

$$\psi^i(t_0) = \chi^i(t_0) = x_0^i, \ i=1,\dots,n, \tag{5}$$

de modo que cada solução está definida em seu próprio intervalo de valores de t *contendo o ponto* t_0*, então essas soluções coincidem onde ambas estão definidas.*

Os valores

$$t_0, x_0^1, \dots, x_0^n, \tag{6}$$

denominam-se *valores iniciais* para a solução (3) e as relações (4) *condições iniciais* para essa solução. Por comodidade de expressão ao considerarmos uma solução

$$x^i = \phi^i(t), \ i=1,\dots,n,$$

do sistema (1) satisfazendo a condição inicial

$$\phi^i(t_0) = x_0^i, \ i=1,\dots,n,$$

diremos que essa solução é *solução do sistema (1) para os valores iniciais* t_0, $x_0^1,\ldots,x_0^n$.

6 - QUESTÕES PREPARATÓRIAS PARA A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.1

Esta secção será dividida em duas partes. Na primeira delas explicitaremos algumas definições e fatos que serão utilizados na demonstração do Teorema 5.1. Na parte seguinte faremos um pequeno esquema dos passos que iremos seguir na referida demonstração, com a finalidade de estarmos com sua idéia central bem destacada.

Definições e Fatos Preliminares

A) Introduziremos aqui algumas definições relacionadas com funções vetoriais e estabeleceremos certas propriedades dessas funções.

Seja

$$\vec{\phi}(t) = (\phi^1(t),\ldots,\phi^n(t))$$

uma função vetorial da variável real t definida num intervalo $r_1 < t < r_2$.

Diz-se que $\vec{\phi}$ é *mensurável segundo Lebesgue* em $r_1 < t < r_2$ se e somente se suas componentes $\phi^1,\ldots,\phi^n$ forem mensuráveis segundo Lebesgue nesse intervalo.

Diz-se que $\vec{\phi}$ é *integrável segundo Lebesgue* em $r_1 < t < r_2$ se e somente se suas componentes $\phi^1,\ldots,\phi^n$ forem integráveis segundo Lebesgue nesse intervalo. Neste caso, podemos definir em $r_1 < t < r_2$ a função vetorial

$$\vec{\psi}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{\phi}(\xi)d\xi, \tag{1}$$

onde $r_1 < t_0 < r_2$, por meio de suas componentes $\psi^1,\ldots,\psi^n$, como segue:

$$\psi^i(t) = \int_{t_0}^{t} \phi^i(\xi)d\xi,\ i=1,\ldots,n,$$

em $r_1 < t < r_2$.

Subsiste a seguinte relação

$$\left|\int_{t_0}^{t} \vec{\phi}(\xi)d\xi\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |\vec{\phi}(\xi)|d\xi\right|. \tag{2}$$

Trata-se de uma desigualdade bem conhecida e sua demonstração pode ser encontrada em [8, p.52].

Diz-se que $\vec{\phi}$ é uma função *absolutamente contínua* num intervalo compacto $r_1 \leq t \leq r_2$ se e somente se suas componentes $\phi^1,\ldots,\phi^n$ forem absolutamente contínuas nesse intervalo.

Seja

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = (f^1(t,\vec{x}),\ldots,f^n(t,\vec{x}))$$

uma função vetorial definida em um aberto Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Diremos que $\vec{f}(t,\vec{x})$ *é uma função de Carathéodory num ponto* $(t_0,\vec{x}_0)$ *de* Γ se e somente se suas componentes f^i, $i=1,\ldots,n$, forem funções de Carathéodory em $(t_0,\vec{x}_0)$.

Estabeleceremos a seguir algumas proposições relacionadas com funções vetoriais de Carathéodory.

PROPOSIÇÃO 1 - *Para que* $\vec{f}$ *seja uma função de Carathéodory num ponto* $(t_0,\vec{x}_0)$, *é necessário e suficiente que exista uma vizinhança* $V(q',a')$ *desse ponto, contida em* Γ, *onde* $\vec{f}$ *satisfaz as seguintes condições*(*)*:*

1) *Qualquer que seja* $\vec{x}$ *fixado em* $\Delta_{a'}$, $\vec{f}$ *é uma função mensurável de* t *em* $J_{q'}$;
2) *Qualquer que seja* t *fixado em* $J_{q'}$, $\vec{f}$ *é uma função contínua de* $\vec{x}$ *em* $\Delta_{a'}$;
3) *Existe uma função real*

$$M_0 = M_0(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $J_{q'}$, *para a qual*

$$|\vec{f}(t,\vec{x})| \leq M_0(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ *pertencente a* $V(q',a')$.

DEMONSTRAÇÃO - Demonstraremos a necessidade da condição, sendo fácil constatar a sua suficiência.

(*) - Ao tratarmos de funções vetoriais essas três condições serão denominadas condições de Carathéodory.

Inicialmente observe-se que as componentes f^i, $i=1,\ldots,n$, de $\vec{f}$ são funções de Carathéodory em $(t_0,\vec{x}_0)$. Isto significa que para cada f^i, existe uma vizinhança $V(q_i',a_i')$ do ponto $(t_0,\vec{x}_0)$, contida em Γ, onde:

a) Qualquer que seja $\vec{x}$ fixado em $\Delta_{a_i'}$, f^i é uma função mensurável de t em $J_{q_i'}$;

b) Qualquer que seja t fixado em $J_{q_i'}$, f^i é uma função contínua de $\vec{x}$ em $\Delta_{a_i'}$;

c) Existe uma função

$$\bar{m}_0^i = \bar{m}_0^i(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $J_{q_i'}$ para a qual

$$|f^i(t,\vec{x})| \leq \bar{m}_0^i(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $V(q_i',a_i')$.

Sejam q' e a' os números reais positivos definidos respectivamente por

$$q' = \inf\{q_1',\ldots,q_n'\}$$

$$a' = \inf\{a_1',\ldots,a_n'\}.$$

Tomemos a vizinhança $V(q',a')$ de $(t_0,\vec{x}_0)$, contida em Γ, dada por

$$V(q',a') = \{(t,\vec{x})\in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ |t-t_0|<q',\ |\vec{x}-\vec{x}_0|<a'\}.$$

Constata-se imediatamente que as $f^i(t,\vec{x})$, $i=1,\ldots,n$, são funções mensuráveis de t em $J_{q'}=\{t\in \mathbb{R}\colon |t-t_0|<q'\}$,

para cada $\vec{x}$ fixado em $\Delta_{a'}=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : |\vec{x}-\vec{x}_0|<a'\}$, e são funções contínuas de $\vec{x}$ em $\Delta_{a'}$, para cada t fixado em $J_{q'}$. Daí, as condições 1) e 2) são verificadas.

Para terminar faremos a seguir a constatação de que a condição 3) também é verificada.

Pela condição c) acima, vê-se que as restrições

$$m_0^i = m_0^i(t),\ i=1,\ldots,n,$$

das funções $\bar{m}_0^i$, $i=1,\ldots,n$, ao intervalo $J_{q'}$, são integráveis segundo Lebesgue nesse intervalo, e são tais que

$$|f^i(t,\vec{x})| \leq m_0^i(t),\ i=1,\ldots,n, \tag{3}$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $V(q',a')$.

Seja

$$m_0^*(t) = \sup\{m_0^1(t),\ldots,m_0^n(t)\}, \tag{4}$$

com t variável em $J_{q'}$.

Então

$$|f^i(t,\vec{x})| \leq m_0^*(t),\ i=1,\ldots,n,$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $V(q',a')$.

Daí,

$$|f^i(t,\vec{x})|^2 \leq [m_0^*(t)]^2$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} |f^i(t,\vec{x})|^2 \leq n[m_0^*(t)]^2.$$

Portanto,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |f^i(t,\vec{x})|^2\right]^{1/2} \leq n^{1/2} m_0^*(t).$$

Sendo m_0^i, $i=1,\ldots,n$, integráveis segundo Lebesgue em $J_{q'}$, m_0^* também o é, donde imediatamente obtem-se que

$$M_0(t) = n^{1/2} m_0^*(t) \tag{5}$$

é integrável segundo Lebesgue em $J_{q'}$, e que

$$|\vec{f}(t,\vec{x})| \leq M_0(t), \tag{6}$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $V(q',a')$, o que demonstra a condição 3).

<u>**PROPOSIÇÃO 2**</u> - *Seja*

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = (f^1(t,\vec{x}),\ldots,f^n(t,\vec{x}))$$

uma função de Carathéodory num ponto $(t_0,\vec{x}_0)$. *Suponhamos que existam as derivadas*

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j}, \quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{matrix}$$

das componentes de $\vec{f}(t,\vec{x})$ *em* Γ, *e que as* n *funções vetoriais definidas por*

$$\left(\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^n}\right), \quad i=1,\ldots,n,$$

sejam de Carathéodory no ponto $(t_0,\vec{x}_0)$.

Nestas condições existem uma vizinhança $V(q,a)$ *de* $(t_0,\vec{x}_0)$, *contida em* Γ, *e uma função*

$$K_0 = K_0(t), \tag{7}$$

integrável segundo Lebesgue em J_q, *tal que*

$$|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{f}(t,\vec{x}_0)| \leq K_0(t)\,|\vec{x}-\vec{x}_0| \tag{8}$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x})$ *e* $(t,\vec{x}_0)$ *pertencentes a* $V(q,a)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Decorre da Proposição 1 que existem vizinhanças $V(q',a')$, $V(q_1,a_1),\ldots,V(q_n,a_n)$ do ponto $(t_0,\vec{x}_0)$, contidas em Γ, onde as (n+1) funções vetoriais

$$\begin{aligned}
\vec{f}(t,\vec{x}) &= (f^1(t,\vec{x}),\ldots,f^n(t,\vec{x})) \\
\vec{d}^1(t,\vec{x}) &= \left(\frac{\partial f^1(t,\vec{x})}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f^1(t,\vec{x})}{\partial x^n}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\vec{d}^n(t,\vec{x}) &= \left(\frac{\partial f^n(t,\vec{x})}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f^n(t,\vec{x})}{\partial x^n}\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

respectivamente satisfazem as condições 1), 2) e 3).

Sejam

$$q = \inf\{q',q_1,\ldots,q_n\},$$

$$a = \inf\{a',a_1,\ldots,a_n\}$$

e consideremos o conjunto $V(q,a)$ dado pela relação $V(q,a) = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t-t_0|<q,\ |\vec{x}-\vec{x}_0|\leq a\}$.

Temos que $V(q,a)$ é uma vizinhança de $(t_0,\vec{x}_0)$ contida em Γ. Além disso, $V(q,a)$ é um conjunto convexo em relação às variáveis $x^1,\ldots,x^n$, o que significa que dados dois pontos $(t,\vec{x})$ e $(t,\vec{x}_0)$ de $V(q,a)$ com mesma coordenada t, o segmento determinado por eles está contido em $V(q,a)$. Podemos descrever este segmento como sendo o conjunto dos pares $(t,\vec{z}(s))$, onde

$$\vec{z}(s) = \vec{x}_0+s(\vec{x}-\vec{x}_0) \text{ com } 0 \le s \le 1.$$

Por um lado, para cada valor de t fixado em J_q, as funções

$$f^i(t,\vec{x}),\ i=1,\dots,n,$$

e

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j},\quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,n, \end{matrix}$$

são contínuas de $\vec{x}$ em Δ_a. Daí podemos assegurar que as derivadas $\frac{df^i(t,\vec{z}(s))}{ds}$, $i=1,\dots,n$, existem em $0 < s < 1$, podendo serem obtidas pela regra da cadeia:

$$\frac{df^i(t,\vec{z}(s))}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i(t,z^1(s),\dots,z^n(s))}{\partial x^k} \cdot \frac{dz^k(s)}{ds} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i(t,z^1(s),\dots,z^n(s))}{\partial x^k} (x^k-x_0^k). \quad (10)$$

Ainda mais, pelo Teorema do valor médio tem-se que

$$f^i(t,\vec{x})-f^i(t,\vec{x}_0) = f^i(t,\vec{z}(1))-f^i(t,\vec{z}(0)) =$$

$$= \left.\frac{df^i(t,\vec{z}(s))}{ds}\right|_{s=\theta}, \text{ com } 0 < \theta < 1.$$

Portanto

$$f^i(t,\vec{x})-f^i(t,\vec{x}_0) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f^i(t,z^1(s),\dots,z^n(s))}{\partial x^k}\right]_{s=\theta} (x^k-x_0^k),$$

com $0 < \theta < 1$. (11)

Por outro lado, existem funções

$$K_0^i = K_0^i(t),\ i=1,\dots,n,$$

integráveis segundo Lebesgue em J_q que majoram respectivamente as funções $\vec{d}^1,\dots,\vec{d}^n$ em $V(q,a)$. Daí resulta que

$$\left|\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j}\right| \leq K_0^i(t),\quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,n, \end{matrix} \tag{12}$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $V(q,a)$.

Seja

$$\bar{K}_0(t) = \sup\{K_0^1(t),\dots,K_0^n(t)\} \tag{13}$$

com t variável em J_q.

Levando em conta as (10), (11), (12) e (13) constata-se sem dificuldade que

$$|f^i(t,\vec{x})-f^i(t,\vec{x}_0)| \leq \sum_{k=1}^{n} \bar{K}_0(t)\,|x^k-x_0^k| \leq$$

$$\leq n\bar{K}_0(t)\,|\vec{x}-\vec{x}_0|,\ i=1,\dots,n.$$

Então

$$|f^i(t,\vec{x})-f^i(t,\vec{x}_0)|^2 \leq n^2[\bar{K}_0(t)]^2|\vec{x}-\vec{x}_0|^2$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} |f^i(t,\vec{x})-f^i(t,\vec{x}_0)|^2 \leq n^3[\bar{K}_0(t)]^2|\vec{x}-\vec{x}_0|^2.$$

Portanto

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |f^i(t,\vec{x})-f^i(t,\vec{x}_0)|^2\right]^{1/2} \leq n^{3/2}\bar{K}_0(t)\,|\vec{x}-\vec{x}_0|.$$

Sendo K_0^i, $i=1,\ldots,n$, integráveis segundo Lebesgue em J_q, $\bar{K}_0$ também o é, donde imediatamente obtem-se que

$$K_0(t) = n^{3/2}\bar{K}_0(t)$$

é integrável segundo Lebesgue em J_q, e que

$$|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{f}(t,\vec{x}_0)| \leq K_0(t)\,|\vec{x}-\vec{x}_0| \quad ,$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x})$ e $(t,\vec{x}_0)$ pertencentes a $V(q,\vec{a})$, o que demonstra a tese.

Diremos que a *função vetorial* $\vec{f}$ *é de Carathéodory num subconjunto qualquer* W *de* Γ, se $\vec{f}$ for de Carathéodory em um ponto qualquer de W.

PROPOSIÇÃO 3 - *Suponhamos que* $\vec{f}$ *é uma função de Carathéodory em* Γ, *e considere-se um qualquer* $\bar{V}(q,a)$ *contido em* Γ.

Nestas condições pode-se afirmar que:

1) *Qualquer que seja* $\vec{x}$ *fixado em* $\bar{\Delta}_a$, $\vec{f}$ *é uma função mensurável de* t *em* $\bar{J}_q$;
2) *Qualquer que seja* t *fixado em* $\bar{J}_q$, $\vec{f}$ *é uma função contínua de* $\vec{x}$ *em* $\bar{\Delta}_a$;
3) *Existe uma função*

$$M = M(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, *para a qual*

$$|\vec{f}(t,\vec{x})| \leq M(t)\,.$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ *pertencente a* $\bar{V}(q,a)$.

Além disso, supondo-se que existam as derivadas parciais

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{array}$$

das componentes de $\vec{f}(t,\vec{x})$ *em* Γ, *e que as* n *funções vetoriais definidas por*

$$\left(\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^n}\right), \; i=1,\ldots,n,$$

sejam de Carathéodory em Γ, *pode-se afirmar que:*

4) Existe uma função

$$K = K(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, *para a qual*

$$|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{f}(t,\vec{x}_0)| \le K(t)\,|\vec{x}-\vec{x}_0|$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x})$ *e* $(t,\vec{x}_0)$ *pertencentes a* $\bar{V}(q,a)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Utilizando a Proposição 1, e seguindo um processo de demonstração análogo ao da Proposição 3.1, sem dificuldade demonstra-se as três primeiras afirmações. Passemos então à constatação de 4).

Observe inicialmente que $\bar{V}(q,a)$ é um conjunto convexo em relação às variáveis $x^1,\ldots,x^n$, o que significa que dados dois pontos $(t,\vec{x})$ e $(t,\vec{x}_0)$ de $\bar{V}(q,a)$ com mesma coorde nada t, o segmento determinado por eles está contido em $\bar{V}(q,a)$. Podemos descrever este segmento como sendo o conjunto dos pares $(t,\vec{z}(s))$ onde

$$\vec{z}(s) = \vec{x}_0 + s(\vec{x}-\vec{x}_0) \text{ com } 0 \leq s \leq 1.$$

Por um lado, as funções

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = (f^1(t,\vec{x}),\ldots,f^n(t,\vec{x}))$$

e

$$\vec{d}^i(t,\vec{x}) = \left(\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^n}\right),\ i=1,\ldots,n,$$

são de Carathéodory em Γ. Daí, por meio de argumentos análogos aos utilizados na Proposição 2, constatamos que para as componentes $f^i(t,\vec{x})$, $i=1,\ldots,n$, de $\vec{f}$ subsistem as seguintes desigualdades

$$|f^i(t,\vec{x})-f^i(t,\vec{x}_0)| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f^i(t,\vec{z}(s))}{\partial x^j}\right|_{s=\theta}|\vec{x}-\vec{x}_0|,\ i=1,\ldots,n,$$

$$\text{com } 0 \leq \theta \leq 1, \qquad (14)$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x})$ e $(t,\vec{x}_0)$ pertencentes a $\bar{V}(q,a)$.

Por outro lado, decorre da Proposição 3.1, que existem funções

$$k_j^i = k_j^i(t),\quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{matrix}$$

integráveis segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, e tais que

$$\left|\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j}\right| \leq k_j^i(t),\quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{matrix} \qquad (15)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $\bar{V}(q,a)$.

Então, se definirmos em $\bar{J}_q$ as funções

$$k^i(t) = \sum_{j=1}^{n} k_j^i(t), \quad i=1,\ldots,n$$

e

$$k(t) = \sup\{k^1(t),\ldots,k^n(t)\}$$

vê-se facilmente que

$$|f^i(t,\vec{x})-f^i(t,\vec{x}_0)| \le k(t)|\vec{x}-\vec{x}_0|, \quad i=1,\ldots,n, \tag{16}$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x})$ e $(t,\vec{x}_0)$ pertencentes a $\bar{V}(q,a)$.

A partir das (16), como na Proposição 2, decorre sem dificuldade a existência de uma função

$$K = K(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, para a qual

$$|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{f}(t,\vec{x}_0)| \le K(t)|\vec{x}-\vec{x}_0|$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x})$ e $(t,\vec{x}_0)$ pertencentes a $\bar{V}(q,a)$.

<u>**PROPOSIÇÃO 4**</u> - *Seja $\vec{f}$ uma função de Carathéodory em um aberto Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos um intervalo real J e uma função vetorial*

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t)$$

contínua nesse intervalo, tal que o conjunto dos pontos $(t,\vec{\phi}(t))$ obtido quando t percorre J está contido em Γ.

Nestas condições pode-se afirmar que:

1) A função composta $\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))$ é mensurável em J;

2) Em cada sub-intervalo compacto de J, existe definida uma função

$$M = M(t)$$

integrável segundo Lebesgue nesse compacto e tal que

$$|\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))| \leq M(t).$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Principiemos demonstrando a afirmação 1). Essa demonstração encontra-se em [6, p.92]; limitar-nos-emos a reproduzí-la.

Preliminarmente demonstraremos que se substituirmos no enunciado da proposição a hipótese de que $\vec{\phi}$ é contínua em J pela hipótese de que $\vec{\phi}$ é em escada, em J, a afirmação 1) continua podendo ser feita. De fato, existe um número finito de sub-intervalos $J_1,\ldots,J_n$ de J, dois a dois disjuntos, com $\bigcup_{i=1}^{n} J_i = J$, e existe uma sequência finita de constantes $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ tais que $\vec{\phi}(t)=\vec{v}_i$ quando t percorre J_i, i=1,...,n.

Pela Proposição 3, vê-se sem dificuldade que a função $\vec{f}(t,\vec{v}_i)$ é mensurável em qualquer sub-intervalo compacto de J_i; consequentemente $\vec{f}(t,\vec{v}_i)$ é mensurável em J_i, i=1,...,n. Segue daí que as funções

$$\vec{\psi}_i(t) = \begin{cases} \vec{f}(t,\vec{v}_i) & t\in J_i \\ 0 & t\in J-J_i \end{cases}$$

são mensuráveis em J. Assim sendo, pela expressão

$$\vec{f}(t,\vec{\phi}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\psi}_i(t),$$

que mostra que $\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))$ é soma de funções mensuráveis em J, conclui-se que $\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))$ é mensurável em J.

Passemos agora à demonstração da afirmação 1) na hipótese de que $\vec{\phi}$ é contínua em J.

Consideremos um qualquer sub-intervalo compacto I de J, e sejam

$$I_{1,m},\ldots,I_{m,m}$$

sub-intervalos de I, dois a dois disjuntos, cada um de comprimento ρ/m, onde ρ é o comprimento de I, com

$$\bigcup_{i=1}^{m} I_{i,m} = I, \quad m=1,2,\ldots\;.$$

Indiquemos por $t_{i,m}$ os pontos médios dos sub-intervalos $I_{i,m}$, respectivamente. Consideremos uma sequência de funções $\vec{\phi}_m(t)$ em escada definidas em I pelas expressões

$$\vec{\phi}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \vec{\phi}(t_{i,m})\chi_{I_{i,m}}, \quad m=1,2,\ldots, \tag{17}$$

onde $\chi_{I_{i,m}}$ são as funções características dos intervalos $I_{i,m}$ relativas a I, que como se sabe são definidas por

$$\chi_{I_{i,m}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t\in I_{i,m} \\ 0 & \text{se } t\in I-I_{i,m}\end{cases} .$$

Como $\vec{\phi}$ é contínua em I, e portanto uniformemente contínua nesse compacto, podemos afirmar que

$$\vec{\phi}_m(t) \longrightarrow \vec{\phi}(t)$$

quando $m \to \infty$, qualquer que seja t em I.

Ainda mais, sendo $\bar{\rho} > 0$ a distância entre a fronteira de Γ e o compacto Q definido por $Q = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}: t \in I$ e $\vec{x} = \vec{\phi}(t)\}$, tem-se que para cada $m > \rho/2\bar{\rho}$ a função $\vec{f}(t,\vec{\phi}_m(t))$ fica perfeitamente definida em I. Trata-se de uma função mensurável em I, de acordo com a parte preliminar dessa demonstração.

Considerando que $\vec{f}$ é de Carathéodory em Γ, e mais particularmente a segunda condição de Carathéodory, e ainda mais, levando em conta que $\vec{\phi}_m \to \vec{\phi}$ em I, constata-se sem dificuldade que para cada valor de t fixado em I subsiste a relação

$$\vec{f}(t,\vec{\phi}_m(t)) \to \vec{f}(t,\vec{\phi}(t)).$$

Assim sendo, $\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))$ em I é o limite de uma sequência de funções mensuráveis em I; é portanto ela mesma mensurável em I. Como $\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))$ é mensurável em qualquer subintervalo compacto I de J, concluímos que $\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))$ é mensurável em J, o que demonstra a afirmação 1).

Passemos agora à constatação de 2).

Consideremos novamente um sub-intervalo compacto I de J. Quando t percorre o intervalo I, o ponto $(t,\vec{\phi}(t))$ descreve o conjunto $Q = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}: t \in I$ e $\vec{x} = \vec{\phi}(t)\}$ contido em Γ. A continuidade de $\vec{\phi}$ assegura-nos que o conjunto Q é um compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Como $\vec{f}$ é de Carathéodory em Γ, qualquer que seja o ponto $(t^*,\vec{x}^*)$ pertencente a Q, existem uma vizinhança $V(q^*,a^*)$ desse ponto, e uma função m^* integrável segundo Lebesgue em J_{q^*} para a qual

$$|\vec{f}(t,\vec{x})| \le m^*(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $V(q^*,a^*)$.

Considere-se o conjunto das vizinhanças $V(q^*,a^*)$ obtido quando $(t^*,\vec{x}^*)$ percorre Q. Esse conjunto é um recobrimento aberto de Q. Como Q é compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue pode-se afirmar que existe um número finito dessas vizinhanças,

$$V(q_1,a_1),\ldots,V(q_n,a_n),$$

que recobrem Q.

Consideremos os correspondentes intervalos $J_{q_1},\ldots,J_{q_n}$ e sejam $m_1,\ldots,m_n$ funções integráveis segundo Lebesgue respectivamente nesses intervalos tais que

$$|\vec{f}(t,\vec{x})| \le m_i(t)$$

quando $(t,\vec{x})$ pertence a $V(q_i,a_i)$, $i=1,\ldots,n$.

Definamos em I as funções

$$\bar{m}_i(t) = \begin{cases} m_i(t) & \text{em } I\cap J_{q_i} \\ 0 & \text{em } I-J_{q_i} \end{cases},$$

e seja, para cada t pertencente a I,

$$M(t) = \sup\{\bar{m}_1(t),\ldots,\bar{m}_n(t)\}.$$

Constata-se sem dificuldade que M é uma função integrável segundo Lebesgue em I, e que

$$|\vec{f}(t,\vec{x})| \leq M(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a Q.

Como qualquer que seja t de I, $(t,\vec{\phi}(t))$ pertence a Q, tem-se que

$$|\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))| \leq M(t)$$

qualquer que seja t em I, o que demonstra a tese.

PROPOSIÇÃO 5 - *Sejam*

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = (f^1(t,\vec{x}),\ldots,f^n(t,\vec{x}))$$

e

$$\vec{d}^i(t,\vec{x}) = \left(\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^n}\right),\ i=1,\ldots,n,$$

funções de Carathéodory em um aberto Γ *de* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Consideremos um intervalo real J, e sejam*

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t)$$

e

$$\vec{x} = \vec{\psi}(t)$$

funções contínuas nesse intervalo, tais que, qualquer que seja t de J, os pontos $(t,\vec{\phi}(t))$ *e* $(t,\vec{\psi}(t))$ *determinam um segmento todo contido em* Γ.

Nestas condições pode-se afirmar que em cada subintervalo compacto de J, existe definida uma função

$$K = K(t)$$

integrável segundo Lebesgue nesse compacto; e tal que

$$|\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))-\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))| \leq K(t)\,|\vec{\phi}(t)-\vec{\psi}(t)| \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO - A demonstração desta proposição pode ser feita essencialmente através do emprego de argumentos de tipos já utilizados nas demonstrações das Proposições 3 e 4.

B) Passemos agora à demonstração de uma proposição relativa a soluções de um sistema de Carathéodory, proposição esta que será muito utilizada no decorrer deste trabalho.

Antes entretanto, façamos a seguinte convenção. Dado um sistema de Carathéodory,

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n), \; i=1,\ldots,n, \tag{18}$$

podemos escrevê-lo sob a forma vetorial

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x}) \, . \tag{19}$$

Usaremos a expressão equação de Carathéodory para fazermos referência à forma (19). Coisa análoga será feita em relação a um sistema de funções

$$x^i = \phi^i(t), \; i=1,\ldots,n,$$

definidas em $r_1 < t < r_2$ que constitui uma solução do sistema (18). Usualmente, diremos que

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t)$$

é solução da equação de Carathéodory (19), definida em

$r_1<t<r_2$.

<u>PROPOSIÇÃO 6</u> - *Consideremos a equação de Carathéodory*

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x}) \tag{20}$$

e seja $(t_0,\vec{x}_0)$ *um ponto de* Γ.

Se

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t) \tag{21}$$

é uma solução dessa equação definida em $r_1<t<r_2$, *satisfazendo a condição inicial*

$$\vec{\phi}(t_0) = \vec{x}_0 \, , \tag{22}$$

então a igualdade

$$\vec{\phi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi))d\xi \tag{23}$$

verifica-se qualquer que seja t *pertencente a* $r_1<t<r_2$.

Reciprocamente, se $\vec{\phi}(t)$ *é uma função definida no intervalo* $r_1<t<r_2$ *tal que a igualdade (23) é verificada qualquer que seja* t *do referido intervalo*(*)*, então* $\vec{\phi}$ *é solução da equação (20), definida em* $r_1<t<r_2$, *satisfazendo a condição inicial (22).*

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Seja $s_1 \leq t \leq s_2$ um sub-intervalo compacto arbitrário de $r_1< t <r_2$ contendo t_0.

(*) - Como é sabido, uma tal função $\vec{\phi}$ é designada como solução da equação integral (23) no mesmo intervalo.

Sendo $\vec{\phi}$ solução da (20), duas afirmações podem ser feitas: $\vec{\phi}$ é absolutamente contínua em $s_1 \leq t \leq s_2$ e a igualdade

$$\dot{\vec{\phi}}(t) = \vec{f}(t,\vec{\phi}(t)) \tag{24}$$

verifica-se quase sempre em $r_1 < t < r_2$.

Pela primeira afirmação tem-se que $\dot{\vec{\phi}}$ existe quase sempre em $s_1 \leq t \leq s_2$, conforme [7, p.105]; além disso, subsiste a seguinte igualdade

$$\vec{\phi}(t) = \vec{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{\vec{\phi}}(\xi)d\xi, \tag{25}$$

em $s_1 \leq t \leq s_2$, conforme [7, p.107], isto é, mais especificadamente, $\dot{\vec{\phi}}$ é integrável segundo Lebesgue em $s_1 \leq t \leq s_2$ e (25) verifica-se nesse intervalo.

Reunindo os fatos de que $\dot{\vec{\phi}}$ é integrável segundo Lebesgue em $s_1 \leq t \leq s_2$ e que a igualdade (24) subsiste quase sempre em $r_1 < t < r_2$, conclui-se que $\vec{f}(t,\vec{\phi}(t))$ é integrável segundo Lebesgue em $s_1 \leq t \leq s_2$ e que

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\vec{\phi}}(\xi)d\xi = \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi))d\xi \tag{26}$$

em $s_1 \leq t \leq s_2$.

Combinando (22), (25) e (26), obtemos imediatamente que

$$\vec{\phi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi))d\xi$$

em $s_1 \leq t \leq s_2$. Como a igualdade acima verifica-se em qualquer sub-intervalo compacto $s_1 \leq t \leq s_2$ de $r_1 < t < r_2$, conclui-se que ela se verifica em $r_1 < t < r_2$.

Reciprocamento, se a igualdade (23) verifica-se sempre em $r_1 < t < r_2$, podemos afirmar que subsistem os seguintes fatos: $\vec{\phi}$ é absolutamente contínua em qualquer sub-intervalo compacto de $r_1 < t < r_2$, conforme [7, p.106], e a igualdade

$$\dot{\vec{\phi}}(t) = \vec{f}(t, \vec{\phi}(t))$$

verifica-se quase sempre em qualquer sub-intervalo compacto de $r_1 < t < r_2$, conforme [7, p.103], e portanto quase sempre em todo o intervalo $r_1 < t < r_2$; além disso, substituindo t por t_0 em (23), tem-se que

$$\vec{\phi}(t_0) = \vec{x}_0 \ .$$

Os fatos acima garantem que $\vec{\phi}$ é solução da equação (20), definida em $r_1 < t < r_2$, satisfazendo a condição inicial (22), o que demonstra a tese.

C) Seja

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t)$$

uma função contínua em um intervalo J, tal que $(t, \vec{\phi}(t))$ pertence ao aberto Γ quando t pertence a J. Seja t_0 um ponto de J e $\vec{x}_0$ o valor da função desse ponto.

Em virtude da Proposição 4, pode-se utilizar o segundo membro da (23), para fazer corresponder à função $\vec{\phi}$ uma função $\vec{\phi}^*$, definida e contínua em J, por meio da seguinte expressão

$$\vec{\phi}^*(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi))d\xi. \tag{27}$$

Pode-se pois considerar o segundo membro da (23) como sendo um operador que faz corresponder a função $\vec{\phi}^*$ à função $\vec{\phi}$. Designando esse operador pela letra A, (27) e (23) podem respectivamente ser reescritas como segue

$$\vec{\phi}^* = A\vec{\phi} \tag{28}$$

e

$$\vec{\phi} = A\vec{\phi} \ . \tag{29}$$

D) Sendo $\vec{\phi}$ uma função contínua no compacto $s_1 \le t \le s_2$, empregaremos a notação $\|\vec{\phi}\|$ para indicar a norma de $\vec{\phi}$ definida da seguinte maneira

$$\|\vec{\phi}\| = \max_{s_1 \le t \le s_2} |\vec{\phi}(t)| .$$

Se $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ são duas funções contínuas em $s_1 \le t \le s_2$, o número não negativo $\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\|$ pode ser tomado como a distância entre as duas funções. Se o número $\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\|$ é pequeno as funções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ podem ser consideradas próximas uma da outra. A igualdade $\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\| = 0$ ocorre se e somente se as funções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ coincidem.

Em termos desta norma, podemos formular condições relativas à convergência uniforme de uma sequência de funções contínuas.

Seja

$$\vec{\phi}_0(t), \vec{\phi}_1(t), \ldots, \vec{\phi}_i(t), \ldots \qquad (30)$$

uma sequência de funções contínuas no intervalo $s_1 \leq t \leq s_2$. A sequência (30) converge uniformemente a uma função $\vec{\phi}$, definida nesse intervalo, se e somente se

$$\lim_{i\to\infty} \|\vec{\phi}-\vec{\phi}_i\| = 0.$$

Além disso, para que (30) seja uniformemente convergente em $s_1 \leq t \leq s_2$ é suficiente que

$$\|\vec{\phi}_{i+1}-\vec{\phi}_i\| \leq a_i \quad i=0,1,\ldots,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$, constituem os termos de uma série convergente de números reais.

Esquema Geral para a demonstração do Teorema

O primeiro passo da demonstração consistirá em utilizar a Proposição 6 para reduzir as teses do teorema a correspondentes afirmações de existência e unicidade de solução relativas a equação integral

$$\vec{\phi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{\phi}(\xi))d\xi. \qquad (31)$$

Para encontrar uma solução da (31), utilizaremos o método das aproximações sucessivas. Para aplicarmos este mé todo, construiremos uma sequência de funções

$$\vec{\phi}_0, \vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_i, \ldots \tag{32}$$

contínuas em um intervalo $r_1 \leq t \leq r_2$, com $r_1 < t_0 < r_2$. Cada função da sequência (32) será construída a partir da precedente pela igualdade

$$\vec{\phi}_{i+1} = A\vec{\phi}_i, \quad i=0,1,\ldots, \tag{33}$$

sendo A operador que definimos em C), e $\vec{\phi}_0$ uma função contínua em $r_1 \leq t \leq r_2$, tomada de tal forma que o conjunto dos pontos $(t,\vec{\phi}_0(t))$ obtido quando t percorre $r_1 \leq t \leq r_2$, está contido em Γ.

Admitamos que o conjunto dos pontos $(t,\vec{\phi}_i(t))$ obtido quando t percorre $r_1 \leq t \leq r_2$ está contido em Γ. Nesta hipótese a função $\vec{\phi}_{i+1}$ está bem definida em $r_1 \leq t \leq r_2$ pela igualdade (33). Entretanto para que $\vec{\phi}_{i+2}$ fique definida, é preciso que seja verificada a seguinte condição: O conjunto dos pontos $(t,\vec{\phi}_{i+1}(t))$ obtido quando t percorre $r_1 \leq t \leq r_2$ está contido em Γ. Essa condição será obtida através de uma eventual redução do intervalo $r_1 \leq t \leq r_2$ inicialmente considerado.

Com uma nova eventual redução do referido intervalo poder-se-á conseguir que se verifique o seguinte fato:

$$||\vec{\phi}_{i+1}-\vec{\phi}_i|| \leq k||\vec{\phi}_i-\vec{\phi}_{i-1}||, \quad i=1,\ldots, \tag{34}$$

com $0 < k < 1$. Desse fato decorrem as desigualdades

$$\|\vec{\phi}_{i+1}-\vec{\phi}_i\| \leq k^i \|\vec{\phi}_1-\vec{\phi}_0\|, \quad i=1,2,\ldots,$$

de modo que a sequência (32) resultará, conforme D), uniformemente convergente. Seguir-se-á facilmente que o limite $\vec{\phi}$ da sequência (32), é solução da equação (31).

Pode-se descrever de uma maneira um pouco diferente a mesma construção pelo método das contrações. Consideraremos então uma família Ω de funções contínuas em $r_1 \leq t \leq r_2$, com $r_1 < t_0 < r_2$, de modo que qualquer que seja a função $\vec{\psi}$ da família, o conjunto dos pontos $(t, \vec{\psi}(t))$ obtido quando t percorre $r_1 \leq t \leq r_2$, está contido em Γ.

Suporemos ainda que a família Ω satisfaz em relação ao operador A, definido em C), às duas condições seguintes: Aplicando o operador A a uma função qualquer da família Ω, obtem-se uma nova função da família Ω; existe um número real k, $0 < k < 1$, tal que quaisquer que sejam as funções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ da família Ω, a desigualdade

$$\|A\vec{\psi} - A\vec{\chi}\| \leq k\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\|$$

resulta verificada.

Ver-se-á que se as condições formuladas forem verificadas pela família Ω, partindo-se de uma função arbitrária $\vec{\phi}_0$ dessa família, obtem-se por meio da fórmula de recorrência (33) uma sequência de funções que converge uniformemente à solução da equação (31).

7 - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.1

A) Existência

Seja $(t_0,\vec{x}_0)$ um ponto qualquer de Γ. Consideremos uma vizinhança $\bar{V}(q,a)$ centrada nesse ponto e contida em Γ. Como as funções

$$f^i(t,\vec{x}),\ i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

e

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j},\quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{matrix} \tag{2}$$

são de Carathéodory em Γ, a Proposição 6.3 assegura-nos que $\vec{f}(t,\vec{x}) = (f^1(t,\vec{x}),\ldots,f^n(t,\vec{x}))$ satisfaz as seguintes condições:

1) Qualquer que seja $\vec{x}$ fixado em $\bar{\Delta}_a$, $\vec{f}$ é uma função mensurável de t em $\bar{J}_q$;
2) Qualquer que seja t fixado em $\bar{J}_q$, $\vec{f}$ é uma função contínua de $\vec{x}$ em $\bar{\Delta}_a$;
3) Existe uma função

$$M = M(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, para a qual

$$|\vec{f}(t,\vec{x})| \leq M(t) \tag{3}$$

qualquer que seja $(t,\vec{x})$ pertencente a $\bar{V}(q,a)$;

4) Existe uma função

$$K = K(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, para a qual

$$|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{f}(t,\vec{x}_0)| \le K(t)\,|\vec{x}-\vec{x}_0| \qquad (4)$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x})$ e $(t,\vec{x}_0)$ pertencentes a $\bar{V}(q,a)$.

Consideremos a seguir, uma outra vizinhança $\bar{V}(r,a)$ centrada em $(t_0,\vec{x}_0)$, onde r é um número real positivo com $r \le q$. (Ver Fig. 1.) No que segue, determinaremos um r conveniente.

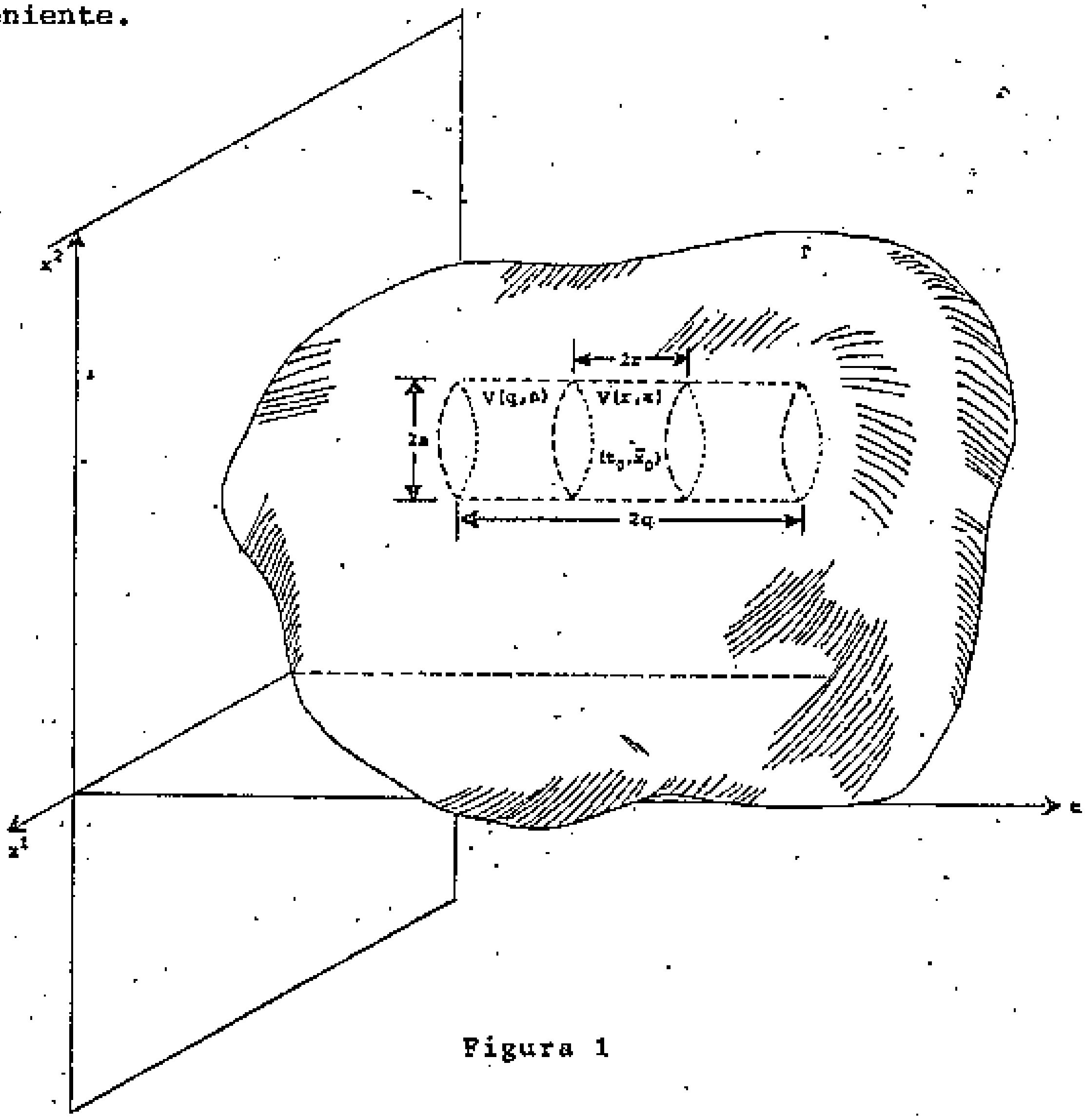

Figura 1

Designemos por Ω_r a família de todas as funções vetoriais definidas e contínuas em $\bar{J}_r$ com valores em $\bar{\Lambda}_a$. Tem-se que uma função $\vec{\phi}$ definida em $\bar{J}_r$ pertence a família Ω_r se e somente se é contínua em $\bar{J}_r$ e

$$|\vec{\phi}(t)-\vec{x}_0| \le a \tag{5}$$

qualquer que seja t pertencente a $\bar{J}_r$.

Vamos selecionar r de modo que as duas condições seguintes sejam satisfeitas:

a) Se a função $\vec{\phi}$ pertence a Ω_r, a função $\vec{\phi}^*$ definida como em (6.28), ou seja

$$\vec{\phi}^* = A\vec{\phi}, \tag{6}$$

também pertence a Ω_r.

b) Existe uma constante k, $0 < k < 1$, tal que

$$\|A\vec{\phi}-A\vec{\chi}\| \le k\|\vec{\phi}-\vec{\chi}\| \tag{7}$$

quaisquer que sejam as funções $\vec{\phi}$ e $\vec{\chi}$ de Ω_r.

Consideremos a condição a). Seja $\vec{\phi}$ uma função qualquer de Ω_r e $\vec{\phi}^* = A\vec{\phi}$. Conforme já foi mencionado, para que $\vec{\phi}^*$ pertença a Ω_r é necessário e suficiente que $\vec{\phi}^*$ seja contínua em $\bar{J}_r$ e que

$$|\vec{\phi}^*(t)-\vec{x}_0| \le a$$

qualquer que seja t pertencente a $\bar{J}_r$.

Por um lado temos de (6.27) que

$$\vec{\phi}^*(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi))d\xi,$$

donde concluimos que $\vec{\phi}^*$ é contínua em $\bar{J}_r$ (conforme [7 p.101]).

Por outro lado, com o auxílio da condição 3) tem-se que

$$|\vec{\phi}^*(t)-\vec{x}_0| = \left|\int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi))d\xi\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi))|d\xi\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} M(\xi)d\xi\right| = \bar{M}(t)$$

em $\bar{J}_r$. Da mesma condição 3) pode-se ainda obter que a função

$$\bar{M}(t) = \left|\int_{t_0}^{t} M(\xi)d\xi\right|$$

é contínua em $\bar{J}_q$. Consequentemente, considerando que

$$\bar{M}(t_0) = 0,$$

obtem-se que fixado o número positivo a, existe um número positivo r', com $0 < r' \leq q$, tal que

$$|\bar{M}(t)| < a$$

qualquer que seja t pertencente a $\bar{J}_{r'} = \{t \in \mathbb{R} : |t-t_0| \leq r'\}$.

Segue daí, que se $r > 0$ é tal que

$$r \leq r' \qquad (8)$$

a condição

$$|\vec{\phi}^*(t)-\vec{x}_0| < a$$

verifica-se qualquer que seja t pertencente a $\bar{J}_r$ e consequentemente a condição a) resulta verificada.

Passemos a seguir a considerar a condição b). Sejam $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ funções quaisquer pertencentes a Ω_r.

Inicialmente temos que

$$|\vec{\psi}^*(t)-\vec{\chi}^*(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} [\vec{f}(\xi,\vec{\psi}(\xi))-\vec{f}(\xi,\vec{\chi}(\xi))]d\xi\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} |\vec{f}(\xi,\vec{\psi}(\xi))-\vec{f}(\xi,\vec{\chi}(\xi))|d\xi\right| \qquad (9)$$

em $\bar{J}_r$. Além disso, com auxílio da condição 4) vemos facilmente que

$$|\vec{f}(\xi,\vec{\psi}(\xi))-\vec{f}(\xi,\vec{\chi}(\xi))| \leq K(\xi)|\vec{\psi}(\xi)-\vec{\chi}(\xi)| \qquad (10)$$

em $\bar{J}_r$, e que a função

$$\bar{K}(t) = \left|\int_{t_0}^{t} K(\xi)d\xi\right|$$

está bem definida em $\bar{J}_q$.

Combinando (9) e (10), e lembrando da definição de norma tem-se em $\bar{J}_r$ a subsistência da desigualdade

$$|\vec{\psi}^*(t)-\vec{\chi}^*(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} K(\xi)|\vec{\psi}(\xi)-\vec{\chi}(\xi)|d\xi\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} K(\xi)\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\|d\xi\right| = \bar{K}(t)\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\|.$$

Pela maneira que definimos $\bar{K}(t)$, vemos que se trata de uma função contínua em $\bar{J}_q$ e tal que

$$\vec{K}(t_0)=0.$$

Portanto, fixado um número k, com $0<k<1$, existe um número positivo r", com $0<r''\leq q$, tal que

$$|\bar{K}(t)|<k$$

qualquer que seja t pertencente a $\bar{J}_{r''}=\{t\in \mathbb{R}:|t-t_0|\leq r''\}$.

Segue daí que se $r>0$ é tal que

$$r\leq r'' \tag{11}$$

a condição

$$|\vec{\psi}^*(t)-\vec{\chi}^*(t)|\leq k\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\| \tag{12}$$

verifica-se qualquer que seja t pertencente a $\bar{J}_r$, e portanto

$$\|A\vec{\psi}-A\vec{\chi}\|\leq k\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\|. \tag{13}$$

Assim sendo, a condição b) resulta verificada.

Pelos fatos precedentemente estabelecidos, conclui se que selecionando $r>0$ e tal que

$$r\leq \min(r',r'') \tag{14}$$

as condições a) e b) resultam satisfeitas para a família Ω_r.

Consideremos a seguir a sequência de funções vetoriais

$$\vec{\phi}_0(t),\vec{\phi}_1(t),\ldots,\vec{\phi}_i(t),\ldots \tag{15}$$

definidas em $\bar{J}_r$ pela seguinte relação de recorrência:

$$\vec{\phi}_{i+1} = A\vec{\phi}_i, \quad i=0,1,\ldots, \tag{16}$$

onde tomamos

$$\vec{\phi}_0(t) = \vec{x}_0.$$

Como a função $\vec{\phi}_0$ pertence a Ω_r, a condição a) assegura-nos que todas as funções da sequência (15) também pertencem a Ω_r.

Com o auxílio da (5) constata-se que

$$\|\vec{\phi}_1-\vec{\phi}_0\| = \max_{t\in\bar{J}_r} |\vec{\phi}_1(t)-\vec{x}_0| \leq a;$$

além disso das (7) e (16) obtem-se que

$$\|\vec{\phi}_{i+1}-\vec{\phi}_i\| = \|A\vec{\phi}_i-A\vec{\phi}_{i-1}\| \leq k\|\vec{\phi}_i-\vec{\phi}_{i-1}\|, \text{ com } 0 < k < 1.$$

Utilizando as duas desigualdades acima deduz-se que

$$\|\vec{\phi}_{i+1}-\vec{\phi}_i\| \leq ak^i, \quad i=0,1,\ldots \tag{17}$$

Assim sendo, por meio do emprego da observação feita no item D) da secção 6, conclui-se que a sequência (15) converge uniformemente em $\bar{J}_r$ a uma função $\vec{\phi}$ de Ω_r.

Uma vez assegurada esta convergência da (15), resta-nos mostrar que $\vec{\phi}$ satisfaz a equação

$$\vec{\phi} = A\vec{\phi}.$$

Consideremos então a sequência

$$A\vec{\phi}_0, A\vec{\phi}_1, \ldots, A\vec{\phi}_i, \ldots \tag{18}$$

e demonstremos que ela converge uniformemente em $\bar{J}_r$ à função $A\vec{\phi}$.

De fato, tanto as funções $\vec{\phi}_i$ da (15) como seu limite $\vec{\phi}$ pertencem a Ω_r, donde considerando a (7) obtemos que

$$\|A\vec{\phi}-A\vec{\phi}_i\| \leq k\|\vec{\phi}-\vec{\phi}_i\|$$

e portanto a sequência (18) converge uniformemente à função $A\vec{\phi}$ em $\bar{J}_r$.

Finalmente, em vista das sequências (15) e (18) serem uniformemente convergentes em $\bar{J}_r$ respectivamente a $\vec{\phi}$ e $A\vec{\phi}$, podemos passar ao limite na relação (16), quando i tende a ∞, obtendo que

$$\vec{\phi} = A\vec{\phi}.$$

Com este último fato, fica estabelecida a existência de solução para valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$ fixados da equação diferencial

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x}),$$

onde a função $\vec{f}$ satisfaz as hipóteses do teorema, uma vez que a função $\vec{\phi}$ restrita ao intervalo J_r é solução desta equação, satisfazendo a condição inicial

$$\vec{\phi}(t_0) = \vec{x}_0.$$

Passemos a seguir à demonstração de sua unicidade.

B) Unicidade

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x}), \tag{19}$$

com $\vec{f}$ satisfazendo as hipóteses do teorema, e sejam

$$\vec{x} = \vec{\psi}(t)$$

e

$$\vec{x} = \vec{\chi}(t)$$

duas soluções desta equação para os valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$.

Designemos por $r_1 < t < r_2$ o intervalo formado pela intersecção dos intervalos de definição das referidas soluções. Claro que $r_1 < t_0 < r_2$.

Demonstraremos inicialmente que se as soluções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ coincidem em um ponto t_1 de $r_1 < t < r_2$, elas coincidirão em um certo intervalo $I = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_1| < r\}$, onde r é um número positivo convenientemente determinado.

Colocando

$$\vec{x}_1 = \vec{\psi}(t_1) = \vec{\chi}(t_1)$$

podemos considerar os números $t_1, \vec{x}_1$ como valores iniciais para ambas as soluções; nesse sentido não distinguimos o ponto $(t_1, \vec{x}_1)$ do ponto $(t_0, \vec{x}_0)$ e daí podermos fazer todo desenvolvimento considerando $(t_0, \vec{x}_0)$.

Seguindo os mesmos passos que na Parte A), podemos determinar r de modo que além de satisfazer a condição (14), satisfaça a seguinte condição: as funções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ são contínuas em $\bar{J}_r$ e

$$|\vec{\psi}(t) - \vec{x}_0| \leq a,$$

e

$$|\vec{\chi}(t) - \vec{x}_0| \leq a,$$

nesse intervalo.

Decorre do fato acima que as funções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ pertencem a Ω_r. Portanto fazendo uso do fato que $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ são soluções da equação diferencial (19), e da desigualdade (7) obtemos que

$$\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\| = \|A\vec{\psi}-A\vec{\chi}\| \leq k\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\|$$

com $0 < k < 1$, o que é possível se e somente se $\|\vec{\psi}-\vec{\chi}\| = 0$, isto é, as funções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ coincidem em $\bar{J}_r$.

Demonstraremos agora que as funções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ coincidem sobre todo intervalo $r_1 < t < r_2$.

Suponhamos por absurdo que existisse um ponto t^* de $r_1 < t < r_2$ para o qual

$$\vec{\psi}(t^*) \neq \vec{\chi}(t^*).$$

Evidentemente $t^* \neq t_0$. Para fixarmos idéia suponhamos que $t^* > t_0$.

Designemos por N o conjunto de todos os pontos t do segmento $t_0 \leq t \leq t^*$ para os quais $\vec{\psi}(t) = \vec{\chi}(t)$ e demonstremos que N é fechado.

Para tanto, consideremos uma sequência

$$\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots$$

de pontos de N convergente para $\bar{\xi}$. Então

$$\vec{\psi}(\xi_i) = \vec{\chi}(\xi_i), \; i=1,2,\ldots .$$

Em virtude da continuidade das $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ temos que

$$\vec{\psi}(\bar{\xi}) = \lim_{i\to\infty} \vec{\psi}(\xi_i) = \lim_{i\to\infty} \vec{\chi}(\xi_i) = \vec{\chi}(\bar{\xi}),$$

ou seja $\bar{\xi}$ pertence a N. Resulta então que N é fechado.

Sèja t_1 o extremo superior de N. Sendo N fechado, t_1 pertence a esse conjunto ou seja $\vec{\psi}(t_1) = \vec{\chi}(t_1)$, consequentemente $t_1 < t^*$. Entretanto em virtude do que foi demonstrado anteriormente as funções $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ devem coincidir em um certo intervalo I, de tal forma que t_1 não pode ser extremo superior de N, o que nos leva a uma contradição. Fica então demonstrado que $\vec{\psi}$ e $\vec{\chi}$ coincidem em $r_1 < t < r_2$ e com isso completamos a demonstração do Teorema 1.

8 - ENUNCIADO DO TEOREMA DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR DE CARATHÉODORY

Considere-se o sistema linear de equações diferenciais

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j(t)x^j + b^i(t) = f^i(t,x^1,\ldots,x^n), \; i=1,\ldots,n, \quad (1)$$

onde as funções f^i, $i=1,\ldots,n$, são definidas e de Carathéodory numa faixa aberta

$$\Gamma = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : q_1 < t < q_2\} \text{ de } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Relativamente a tais sistemas, subsiste a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1 - *Uma condição necessária e suficiente para que o sistema (1) seja de Carathéodory em Γ, é que as funções a_j^i e b^i sejam integráveis segundo Lebesgue em qualquer sub-intervalo compacto de $q_1 < t < q_2$.*

DEMONSTRAÇÃO - Demonstraremos inicialmente a necessidade da condição. Para tanto, consideremos uma bola fechada $\bar{\Delta}_a$ de $\mathbb{R}^n$, centrada na origem e de raio maior que um, e um sub-intervalo compacto $\bar{J}_q$ de $q_1 < t < q_2$. Sendo f^i, $i=1,\ldots,n$, funções de Carathéodory em Γ, e $\bar{J}_q \times \bar{\Delta}_a$ um compacto contido em Γ, podemos utilizando a Proposição 3.1 afirmar que qualquer que seja $\vec{x}$ fixado em $\bar{\Delta}_a$, as funções

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)x^j + b^i(t),\ i=1,\ldots,n,$$

são integráveis segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$. Então, por meio das igualdades

$$b^i(t) = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)x^j + b^i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)(-x^j) + b^i(t)\right], i=1,\ldots,n,$$

obtem-se a integrabilidade das funções b^i, $i=1,\ldots,n$, em $\bar{J}_q$. Além disso, as igualdades

$$a_k^i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\delta_{jk} + b^i(t) - b^i(t),\quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ k=1,\ldots,n, \end{array}$$

onde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases},$$

levam-nos a concluir que as funções a_k^i, $i=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,n$ também são integráveis segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$.

Reciprocamente, sendo a_j^i e b^i integráveis segundo Lebesgue em qualquer sub-intervalo compacto de $q_1<t<q_2$, tem-se que dado um ponto $(t_0,\vec{x}_0)$ qualquer de Γ, existe uma vizinhança $V(q,a)$ contida em Γ, onde as funções f^i, $i=1,\ldots,n$, satisfazem as condições de Carathéodory.

De fato, basta considerarmos um sub-intervalo compacto $r_1 \leq t \leq r_2$ de $q_1 < t < q_2$, com $r_1 < t_0 < r_2$, e um número real positivo q tal que o intervalo J_q, centrado em t_0, esteja contido em $r_1 \leq t \leq r_2$.

Tomando então $V(q,a)$ como sendo o produto cartesiano do referido intervalo J_q por uma qualquer bola Δ_a de $\mathbb{R}^n$, centrada em $\vec{x}_0$, constata-se sem dificuldade que as funções f^i, $i=1,\ldots,n$, satisfazem as mencionadas condições em $V(q,a)$.

No caso dos sistemas lineares, é possível demonstrar que qualquer que seja o ponto $(t_0,\vec{x}_0)$ de Γ, existe uma solução $\vec{\phi}$, definida em <u>todo</u> intervalo $q_1 < t < q_2$, satisfazendo a condição inicial

$$\vec{\phi}(t_0) = \vec{x}_0.$$

Este fato, será exibido no enunciado do Teorema 1. Já no que diz respeito a unicidade, não há nada a acrescentar relativamente aos fatos estudados na secção anterior.

<u>TEOREMA 1</u> - *Seja*

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)x^j+b^i(t),\ i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

um sistema linear de equações diferenciais ordinárias. Suponhamos que os coeficientes a_j^i *e os termos livres* b^i *sejam definidos em um certo intervalo* $q_1 \leq t < q_2$ *e integráveis segundo Lebesgue em qualquer sub-intervalo compacto de* $q_1 < t < q_2$.

Então, quaisquer que sejam os valores iniciais

$$t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n, \tag{3}$$

com $q_1 < t_0 < q_2$, *existe uma solução do sistema (2),*

$$x^i = \phi^i(t),\ i=1,\ldots,n,$$

satisfazendo as condições iniciais

$$\phi^i(t_0) = x_0^i,\ i=1,\ldots,n,$$

e definida em <u>todo</u> intervalo $q_1 < t < q_2$.

9 - <u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 8.1</u>

Admita-se as hipóteses do teorema; fazendo uso da Proposição 8.1, vê-se que as funções

$$f^i(t,x^1,\ldots,x^n) = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)x^j+b^i(t),\ i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

são de Carathéodory no aberto Γ definido por:

$$\Gamma = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : q_1 < t < q_2\}.$$

Dados um ponto $(t_0,\vec{x}_0)$ arbitrário de Γ e uma função vetorial $\vec{\phi}_0(t)$ contínua em $q_1 < t < q_2$, pode-se construir uma sequência de funções

$$\vec{\phi}_0, \vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_i, \ldots \quad , \tag{2}$$

contínuas em $q_1 < t < q_2$, por meio das seguintes fórmulas de recorrência:

$$\vec{\phi}_{i+1}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi,\vec{\phi}_i(\xi))d\xi, \quad i=0,1,\ldots \quad . \tag{3}$$

Utilizando o operador A definido no item C) da secção 6, podemos reescrever as (3) como segue

$$\vec{\phi}_{i+1} = A\vec{\phi}_i, \quad i=0,1,\ldots. \quad . \tag{4}$$

Demonstraremos que a sequência (2) converge em todo intervalo $q_1 < t < q_2$ a uma função $\vec{\phi}$, solução do sistema 8.2; ainda mais, demonstraremos que esta sequência converge uniformemente em qualquer sub-intervalo compacto de $q_1<t<q_2$.

Inicialmente demonstraremos a convergência uniforme nos compactos. Para tanto, consideremos um sub-intervalo compacto $r_1 \le t \le r_2$ de $q_1 < t < q_2$ e sem perda de generalidade suponhamos que $r_1 \le t_0 \le r_2$. Seja $\Pi = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : r_1 \le t \le r_2\}$.

Como as f^i, $i=1,\ldots,n$ são lineares deduzimos sem dificuldade a seguinte afirmação: Existe uma função

$$K = K(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $r_1 \le t \le r_2$, tal que

$$|\vec{f}(t,\vec{x}) - \vec{f}(t,\vec{x}^*)| \le K(t)\,|\vec{x}-\vec{x}^*| \tag{5}$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x})$ e $(t,\vec{x}^*)$ pertencentes a Π.

Para demonstrar que a sequência (2) converge uniformemente em $r_1 \le t \le r_2$, calcularemos a diferença em norma de funções consecutivas dessa sequência (quando restritas ao compacto $r_1 \le t \le r_2$).

Inicialmente vamos considerar a diferença

$$|\vec{\phi}_1(t) - \vec{\phi}_0(t)|$$

quando t percorre $r_1 \le t \le r_2$. Temos que

$$|\vec{\phi}_1(t) - \vec{\phi}_0(t)| = \left| \left[\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{\phi}_0(\xi))\,d\xi \right] - \vec{\phi}_0(t) \right| = V(t).$$

Sendo V uma função contínua em $r_1 \le t \le r_2$, existe um número positivo C tal que

$$|V(t)| \le C \tag{6}$$

quando t percorre $r_1 \le t \le r_2$. Resulta então que nesse intervalo

$$|\vec{\phi}_1(t) - \vec{\phi}_0(t)| \le C. \tag{7}$$

A seguir constataremos que existe uma função g contínua em $r_1 \le t \le r_2$ tal que

$$|\vec{\phi}_{i+1}(t) - \vec{\phi}_i(t)| \le \frac{C}{i!}[g(t)]^i, \quad i=0,1,\ldots, \tag{8}$$

quando t percorre $r_1 \leq t \leq r_2$.

De fato, combinando (3), (5) e (7), temos que:

$$|\vec{\phi}_2(t)-\vec{\phi}_1(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |\vec{f}(\xi,\vec{\phi}_1(\xi))-\vec{f}(\xi,\vec{\phi}_0(\xi))|\,d\xi\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} K(\xi)\,|\vec{\phi}_1(\xi)-\vec{\phi}_0(\xi)|\,d\xi\right| \leq C\left|\int_{t_0}^{t} K(\xi)d\xi\right|. \quad (9)$$

Definindo em $r_1 \leq t \leq r_2$ a função $g(t)$ pela expressão

$$g(t) = \left|\int_{t_0}^{t} K(\xi)d\xi\right| \quad (10)$$

tem-se que

$$|\vec{\phi}_2(t)-\vec{\phi}_1(t)| \leq Cg(t) \quad (11)$$

em $r_1 \leq t \leq r_2$.

Antes de darmos prosseguimento ao cálculo da diferença $|\vec{\phi}_3(t)-\vec{\phi}_2(t)|$, vamos ressaltar algumas propriedades da função g, que faremos uso no referido cálculo.

A função g é absolutamente contínua em $r_1 \leq t \leq r_2$ e portanto possui derivada quase sempre nesse intervalo. Além disso, constata-se sem dificuldade que como g é absolutamente contínua em $r_1 \leq t \leq r_2$, g^2 também o é, e a igualdade

$$\frac{d}{dt}\left[g(t)\right]^2 = 2g(t)\frac{d}{dt}\left[g(t)\right]$$

verifica-se quase sempre em $r_1 \leq t \leq r_2$.

Consideremos então $|\vec{\phi}_3(t)-\vec{\phi}_2(t)|$. Temos que

$$|\vec{\phi}_3(t)-\vec{\phi}_2(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |\vec{f}(\xi,\vec{\phi}_2(\xi))-\vec{f}(\xi,\vec{\phi}_1(\xi))|d\xi\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} K(\xi)|\vec{\phi}_2(\xi)-\vec{\phi}_1(\xi)|d\xi\right| \leq C \left|\int_{t_0}^{t} K(\xi)g(\xi)d\xi\right| =$$

$$= C \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\xi}[g(\xi)]\cdot g(\xi)d\xi = \frac{C}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\xi}[g(\xi)]^2 d\xi =$$

$$= \frac{C}{2}\{[g(t)]^2 - [g(t_0)]^2\}.$$

Daí,

$$|\vec{\phi}_3(t)-\vec{\phi}_2(t)| \leq \frac{C}{2}[g(t)]^2 . \tag{12}$$

Procedendo assim sucessivamente resulta a subsistência da (8).

Considerando que a (8) vale qualquer que seja t em $r_1 \leq t \leq r_2$, e sendo

$$G = \max_{r_1 \leq t \leq r_2} [g(t)] = \max\{g(r_1), g(r_2)\},$$

constata-se imediatamente que

$$\|\vec{\phi}_{i+1}-\vec{\phi}_i\| \leq \frac{C}{i!} G^i, \quad i=0,1,\ldots \tag{13}$$

Além disso, como os números $\frac{C}{i!} G^i$, $i=0,1,\ldots$ constituem os termos de uma série convergente, conclui-se que a sequência (2) converge uniformemente em $r_1 \leq t \leq r_2$ a uma função $\vec{\phi}$.

Uma vez assegurada a convergência da (2), resta-nos mostrar que $\vec{\phi}$ satisfaz a equação

$$\vec{\phi} = A\vec{\phi}.$$

Para tanto, consideremos a sequência

$$A\vec{\phi}_0, A\vec{\phi}_1, \ldots, A\vec{\phi}_i, \ldots, \tag{14}$$

e demonstremos que ela converge uniformemente à função $A\vec{\phi}$ em $r_1 \leq t \leq r_2$. De fato,

$$\|A\vec{\phi}_i - A\vec{\phi}\| = \max_{r_1 \leq t \leq r_2} \left| \int_{t_0}^{t} [\vec{f}(\xi, \vec{\phi}_i(\xi)) - \vec{f}(\xi, \vec{\phi}(\xi))] d\xi \right| \leq G\|\vec{\phi}_i - \vec{\phi}\|,$$

e portanto a sequência (14) converge uniformemente à função $A\vec{\phi}$ em $r_1 \leq t \leq r_2$.

Então, em vista das sequências (2) e (14) serem convergentes em $r_1 \leq t \leq r_2$ respectivamente a $\vec{\phi}$ e $A\vec{\phi}$, podemos passar a relação (4) ao limite quando i tende a ∞ e obtemos

$$\vec{\phi} = A\vec{\phi}.$$

Além disso, como $r_1 \leq t \leq r_2$ é um intervalo compacto arbitrário contido em $q_1 < t < q_2$, podemos concluir que a sequência (2) converge em cada ponto do intervalo $q_1 < t < q_2$. Assim sendo, $\vec{\phi}$ está definida em todo intervalo $q_1 < t < q_2$ e nesse intervalo é solução do sistema 8.2. Levando em conta que $\vec{\phi}(t_0) = \vec{x}_0$, fica terminada a demonstração do Teorema 8.1.

10 - OBSERVAÇÕES FINAIS

Finalizando o presente Capítulo façamos as seguintes observações:

1) Os pontos centrais deste Capítulo foram relativos à teoremas de existência e unicidade de solução segundo Carathéodory de sistemas de Carathéodory (Teorema 5.1 e Teorema 8.1). As demonstrações dos referidos teoremas foram elaboradas seguindo uma linha de considerações e raciocínios bastante semelhantes àqueles seguidos por Pontriaguine [4] para demonstrar existência e unicidade de solução elementar de sistemas elementares (Teorema 2.1 e Teorema 2.2).

2) No caso dos sistemas elementares a existência de solução no sentido elementar para dados valores iniciais é uma decorrência só da continuidade das funções $f^i, i=1,\ldots,n$ (*). Entretanto são bem conhecidos exemplos mostrando que tal hipótese de continuidade não é suficiente para garantir unicidade de solução no sentido elementar para dados valores iniciais.

Fatos análogos ocorrem ao considerarmos sistemas de

(*) - Uma demonstração disto foi dada por Peano e pode ser ser encontrada em [6, Cap.I,§3].

Carathéodory. Somente a satisfação das condições de Carathéodory pelas funções f^i, $i=1,\ldots,n$, garantem existência de solução segundo Carathéodory(*). Entretanto as referidas condições não asseguram unicidade.

- ◻ -

(*) - Efetivamente as condições de Carathéodory sobre as funções f^i, $i=1,\ldots,n$, foram as únicas introduzidas por C.Carathéodory [1, Cap.XI,p.582] para demonstrar a existência de solução segundo Carathéodory.

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES MAXIMAIS

11 - SOBRE AS SOLUÇÕES MAXIMAIS

O presente Capítulo é primordialmente dedicado à apresentação de alguns resultados importantes ligados ao conceito de solução maximal.

Dado um sistema

$$\dot{x}^i = f^i(t,\vec{x}), \ i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

seja

$$x^i = \phi^i(t), \ i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

uma solução desse sistema definida no intervalo $r_1 < t < r_2$. Seja

$$x^i = \psi^i(t), \ i=1,\ldots,n, \tag{3}$$

também uma solução do mesmo sistema definida no intervalo $s_1 < t < s_2$.

Diremos que a solução (3) é um *prolongamento* da solução (2) se o intervalo $s_1 < t < s_2$ contém o intervalo $r_1 < t < r_2$ (isto é $s_1 \leq r_1$ e $r_2 \leq s_2$), e se a solução (2) coincide com a solução (3) no intervalo $r_1 < t < r_2$. Em particular, considera-se a (3) como um prolongamento da (2) mesmo no caso em que as duas soluções coincidam integralmente (de modo que $s_1 = r_1$ e $s_2 = r_2$).

A solução (2) é dita *maximal* se não existe nenhuma solução diferente dela própria que seja um seu prolongamento.

Considerando o sistema (1), e supondo que as funções

$$f^i(t,\vec{x}),\ i=1,\dots,n,$$

e

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j},\quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,n, \end{matrix}$$

são de Carathêodory em um aberto Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$, estabelecemos no Teorema 5.1 a existência e unicidade de solução desse sistema para dados valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$. Observemos entretanto que o referido teorema é de *caráter local*, no sentido que a solução é definida em intervalos suficientemente pequenos de t.

Daremos a seguir com a Proposição 1, um *caráter global* a este teorema, global no sentido que demonstraremos existência e unicidade de solução maximal para dados valores iniciais.

PROPOSIÇÃO 1- *Seja*

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x}) \tag{4}$$

uma equação diferencial ordinária, onde $\vec{f}$ *é uma função veto* *rial definida em um aberto* Γ *de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e cujas componentes satisfazem as hipóteses do Teorema 5.1 nesse aberto. Então:*

1) *Para cada ponto* $(t_0, \vec{x}_0)$ *de* Γ, *existe uma única solução maximal*

$$\vec{x} = \tilde{\vec{\phi}}(t)$$

da equação (4), definida num intervalo $m_1 < t < m_2$ *contendo o ponto* t_0, *satisfazendo a condição*

$$\tilde{\vec{\phi}}(t_0) = \vec{x}_0 \ .$$

2) *Se uma solução maximal da equação (4) coincide com outra solução da (4), pelo menos em um valor de t, então a solução maximal constitui um prolongamento da outra solução.*

3) *Se duas soluções maximais da (4) coincidem pelo menos em um valor de t, então elas coincidem integralmente, isto é, elas possuem o mesmo intervalo de definição e são iguais nesse intervalo.*

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Seja $(t_0, \vec{x}_0)$ um ponto arbitrário de Γ. Construiremos a solução

$$\vec{x} = \tilde{\vec{\phi}}(t)$$

da (4) para os valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$, como sendo o prolongamento de todas as soluções da (4) para os valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$.

Comecemos lembrando que a cada solução da (4) para os valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$ corresponde seu próprio intervalo de definição. Consideremos o conjunto dos extremos superiores desses intervalos e o conjunto dos extremos inferiores dos mesmos intervalos. Designemos os dois conjuntos acima respectivamente por R_2 e R_1. Sejam m_2 o supremo do conjunto R_2 (em particular pode ocorrer $m_2 = +\infty$), e m_1 o ínfimo do conjunto R_1 (em particular pode ocorrer $m_1 = -\infty$).

Passemos então a construção da $\tilde{\vec{\phi}}$ em $m_1 < t < m_2$. Seja t^* um ponto arbitrário de $m_1 < t < m_2$; para fixar idéias, suponhamos que $t_0 \le t^*$. (Poderíamos também supor $t^* \le t_0$.) Sendo m_2 o supremo de R_2 podemos assegurar que existe uma solução

$$\vec{x} = \vec{\psi}(t)$$

da equação (4) para os valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$, cujo intervalo da definição contém o ponto t^*.

Consideremos a função $\tilde{\vec{\phi}}$ definida pela igualdade

$$\tilde{\vec{\phi}}(t^*) = \vec{\psi}(t^*) .$$

Observemos que o valor da função $\tilde{\vec{\phi}}$ no ponto t^* independe da particular escolha de $\vec{\psi}$ visto que, se em vez de considerarmos a solução $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ tivéssemos tomado uma outra solução $\vec{x} = \vec{\chi}(t)$ para os valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$, solução esta definida em um intervalo que também contém o ponto t^*, chegaríamos em virtude da unicidade (Teorema 5.1) que

$$\vec{\psi}(t^*) = \vec{\chi}(t^*) .$$

Assim sendo, a função $\tilde{\vec{\phi}}$ fica de fato definida em $m_1<t<m_2$ pela referida igualdade.

Ainda mais, como nas vizinhanças de cada ponto t^* de $m_1<t<m_2$ a função $\tilde{\vec{\phi}}$ coincide por construção com uma solução da (4), podemos ver facilmente que $\tilde{\vec{\phi}}$ *é solução da (4) para os valores iniciais* $t_0,\vec{x}_0$.

Consideremos agora uma qualquer solução

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t)$$

da equação (4) para os valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$, definida em $r_1<t<r_2$. Como r_1 pertence a R_1 e r_2 pertence a R_2, temos que $m_1 \leq r_1$ e $r_2 \leq m_2$, ou seja o intervalo $r_1<t<r_2$ está contido no intervalo $m_1<t<m_2$. Levando em conta que $\vec{\phi}$ e $\tilde{\vec{\phi}}$ possuem os mesmos valores iniciais, concluimos que elas coincidem onde ambas estão definidas, isto é, em $r_1<t<r_2$. As duas últimas afirmações implicam que $\tilde{\vec{\phi}}$ *é um prolongamento da solução* $\vec{\phi}$.

Notemos a seguir que $\tilde{\vec{\phi}}$ *não pode ser prolongada*. De fato, suponhamos que uma solução $\vec{\psi}$ é um prolongamento da solução $\tilde{\vec{\phi}}$. É claro que $\vec{\psi}$ é solução da (4) para valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$. Considerando o fato acima demonstrado, ou seja que $\tilde{\vec{\phi}}$ é prolongamento de qualquer solução da (4) para valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$, conclui-se que $\vec{\psi} = \tilde{\vec{\phi}}$. Resulta daí que $\tilde{\vec{\phi}}$ *é solução maximal da (4) para os valores iniciais* $t_0,\vec{x}_0$. Ainda mais, vê-se facilmente que $\tilde{\vec{\phi}}$ é única.

Suponhamos a seguir que a solução maximal $\tilde{\vec{\phi}}$ coinci de com uma outra solução $\vec{\phi}$ ao menos para um valor de t. Designemos por t_0 este valor de t e por $\vec{x}_0 = \tilde{\vec{\phi}}(t_0)$. Neste caso $\tilde{\vec{\phi}}$ e $\vec{\phi}$ possuem os mesmos valôres iniciais $t_0, \vec{x}_0$ e portanto $\tilde{\vec{\phi}}$ constitui um prolongamento de $\vec{\phi}$.

Finalmente vê-se sem dificuldade que se $\vec{\phi}$ é maximal, $\vec{\phi}$ e $\tilde{\vec{\phi}}$ coincidem. Com o estabelecimento deste último fato, concluimos a demonstração da proposição.

Relativamente a soluções maximais pode-se ainda constatar o fato expresso pela Proposição 2 seguinte:

<u>**PROPOSIÇÃO 2**</u> - *Seja* E *um compacto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *contido em* Γ *e*

$$\vec{x} = \tilde{\vec{\phi}}(t)$$

uma solução maximal da (4), definida em $m_1<t<m_2$.

Então, existem números r_1 *e* r_2, *com* $m_1 < r_1 < r_2 < m_2$ *tais que não pertencem a* E *os pontos* $(t, \tilde{\vec{\phi}}(t))$ *de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *correspondentes a valores de* t *não pertencentes ao intervalo* $r_1 \leq t \leq r_2$.

<u>**DEMONSTRAÇÃO**</u> - Constataremos somente a existência de r_2; a existência de r_1 pode ser obtida de maneira análoga.

Se $m_2 = +\infty$ a existência de r_2 é evidente, pois quando t tende a $+\infty$ o ponto $(t, \tilde{\vec{\phi}}(t))$, cuja primeira coordenada é t, deve necessariamente deixar o conjunto limitado E. Este fato permite-nos supor $m_2 < +\infty$.

Como o conjunto E contido em Γ é <u>limitado</u>, <u>fechado</u>, e o complementar de Γ também é fechado, a distância ρ entre esses dois conjuntos é positiva. Suponhamos sem perda de generalidade que $\rho < +\infty$.

Seja E^* o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ cuja distância ao conjunto E não é superior a $\rho/2$. Vê-se facilmente que E^* é um conjunto limitado, fechado, contido em Γ e tal que as funções

$$f^i(t,\vec{x}),\ i=1,\dots,n, \tag{5}$$

e

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j},\quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,n, \end{array} \tag{6}$$

são de Carathéodory nesse conjunto.

Seja $(t_0,\vec{x}_0)$ um ponto de E e $\bar{V}(q,a)$ uma vizinhança desse ponto onde q e a são números reais positivos satisfazendo a seguinte relação

$$q^2+a^2 < \rho^2/4.$$

O conjunto $\bar{V}(q,a)$ está contido em E^*; vê-se daí que as funções (5) e (6) são de Carathéodory em $\bar{V}(q,a)$.

Se escolhermos r do mesmo modo que no Teorema 5.1, podemos afirmar que existe uma solução $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$ da equação (4) para os valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$, solução esta definida em J_r. Constata-se que é possível encontrar r que seja o mesmo para todos os pontos $(t_0,\vec{x}_0)$ de E.

Demonstraremos então que se definirmos r_2 como sendo m_2-r, qualquer que seja t em $r_2<t<m_2$, o ponto $(t,\vec{\phi}(t))$

não pertence a E.

Suponhamos por absurdo que existisse um certo número t_0, com $t_0 > m_2 - r$ e tal que $(t_0, \vec{\phi}(t_0))$ pertencesse a E. Poderíamos então considerar $t_0, \vec{\phi}(t_0)$ como valores iniciais da solução $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$, e em virtude do que foi visto acima o intervalo J_r estaria contido em $m_1 < t < m_2$ o que contradiz a desigualdade $t_0 > m_2 - r$. Com esta última verificação fica concluida a demonstração da proposição.

Com esta proposição, concluímos os principais resultados sobre soluções maximais que faremos uso no capítulo seguinte.

CAPÍTULO IV

DEPENDÊNCIA DA SOLUÇÃO SEGUNDO CARATHÉODORY EM RELAÇÃO A PARÂMETRO

12 - INTRODUÇÃO

As soluções elementares de um sistema elementar dependem de parâmetros que nele compareçam. Fato análogo ocorre com soluções segundo Carathéodory de sistemas de Carathéodory. Os problemas da dependência destas últimas soluções em relação a parâmetros são bastante importantes e a eles dedicar-nos-emos nesse Capítulo.

Na secção 13 serão apresentadas algumas definições e fatos importantes que faremos uso nas secções seguintes. Na secção 14, estudaremos a questão da dependência contínua da solução em relação a parâmetros para valores iniciais fixados. Relativamente a este estudo será apresentado um teorema correspondente ao Teorema 2.3. Prosseguindo este estudo de dependência da solução, trataremos na secção 15, correspondentemente ao Teorema 2.4, a questão da diferencia bilidade da solução em relação a parâmetros para valores iniciais fixados.

13 - DEFINIÇÕES E FATOS IMPORTANTES

Funções de Carathéodory - Começaremos esta secção precisando o que entendemos por função de Carathéodory, quando essa função é real e depende de um certo número de parâmetros.

Tomemos o espaço $\mathbb{R}^{1+n+\ell}$ das variáveis $t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^\ell$. Utilizando a notação vetorial já introduzida, indicaremos por

$$\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n)$$

um ponto de $\mathbb{R}^n$, e por

$$\vec{\mu} = (\mu^1, \ldots, \mu^\ell)$$

um ponto de $\mathbb{R}^\ell$.

Dado um ponto $(t_0, \vec{x}_0, \vec{\mu}_0)$ de $\mathbb{R}^{1+n+\ell}$, designaremos por $V(q,a,b)$ o conjunto definido pela expressão

$$V(q,a,b) = \{(t, \vec{x}, \vec{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+n+\ell} : |t-t_0| < q, |\vec{x}-\vec{x}_0| < a, |\vec{\mu}-\vec{\mu}_0| < b\},$$

onde q, a e b são números reais positivos.

Indicaremos por J_q, Δ_a e θ_b o intervalo de $\mathbb{R}$, a bola de $\mathbb{R}^n$ e a bola de $\mathbb{R}^\ell$ definidos respectivamente pelas expressões

$$J_q = \{t \in \mathbb{R} : |t-t_0| < q\},$$

$$\Delta_a = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}-\vec{x}_0| < a\},$$

$$\theta_b = \{\vec{\mu} \in \mathbb{R}^\ell : |\vec{\mu}-\vec{\mu}_0| < b\},$$

de tal forma que $V(q,a,b)$ é o produto cartesiano de J_q por Δ_a por Θ_b.

Consideremos uma função real $f(t,\vec{x},\vec{\mu})$ definida em um conjunto aberto $\tilde{\Gamma}$ de $\mathbb{R}^{1+n+\ell}$. Diremos que $f(t,\vec{x},\vec{\mu})$ é uma *função de Carathéodory num dado ponto* $(t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}_0)$ de $\tilde{\Gamma}$ se existir uma vizinhança $V(q,a,b)$ desse ponto, contida em $\tilde{\Gamma}$, onde f satisfaz as seguintes condições:

1) Qualquer que seja $\vec{x}$ fixado em Δ_a e $\vec{\mu}$ fixado em Θ_b, f é uma função mensurável de t em J_q;
2) Qualquer que seja t fixado em J_q e $\vec{\mu}$ fixado em Θ_b, f é uma função contínua de $\vec{x}$ em Δ_a;
3) Qualquer que seja t fixado em J_q e $\vec{x}$ fixado em Δ_a, f é uma função contínua de $\vec{\mu}$ em Θ_b;
4) Existe uma função

$$m_0 = m_0(t)$$

integrável segundo Lebesgue em J_q para a qual

$$|f(t,\vec{x},\vec{\mu})| \leq m_0(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ pertencente a $V(q,a,b)$.

Designaremos as condições 1), 2), 3) e 4) acima de *Condições de Carathéodory* para funções dependentes de parâmetros.

Seja

$$\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu}) = (f^1(t,\vec{x},\vec{\mu}),\dots,f^n(t,\vec{x},\vec{\mu}))$$

uma função vetorial definida em um aberto $\tilde{\Gamma}$ de $\mathbb{R}^{1+n+\ell}$. Diremos que $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *é uma função de Carathéodory num dado ponto* $(t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}_0)$ de $\tilde{\Gamma}$ se e somente se as suas componentes f^i, $i=1,\ldots,n$, forem de Carathéodory nesse ponto.

Estabeleceremos a seguir algumas proposições relacionadas com funções vetoriais de Carathéodory.

PROPOSIÇÃO 1 - *Para que* $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *seja uma função de Carathéodory num ponto* $(t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}_0)$ *, é necessário e suficiente que exista uma vizinhança* $V(q';a',b')$ *desse ponto, contida em* $\tilde{\Gamma}$, *onde* $\vec{f}$ *satisfaz as seguintes condições:*

1) *Qualquer que seja* $\vec{x}$ *fixado em* $\Delta_{a'}$ *e* $\vec{\mu}$ *fixado em* $\Theta_{b'}$, $\vec{f}$ *é uma função mensurável de* t *em* $J_{q'}$;
2) *Qualquer que seja* t *fixado em* $J_{q'}$ *e* $\vec{\mu}$ *fixado em* $\Theta_{b'}$, $\vec{f}$ *é uma função contínua de* $\vec{x}$ *em* $\Delta_{a'}$;
3) *Qualquer que seja* t *fixado em* $J_{q'}$ *e* $\vec{x}$ *fixado em* $\Delta_{a'}$, $\vec{f}$ *é uma função contínua de* $\vec{\mu}$ *em* $\Theta_{b'}$;
4) *Existe uma função real*

$$M_0 = M_0(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $J_{q'}$, *para a qual*

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})| \leq M_0(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *pertencente a* $V(q';a',b')$.

DEMONSTRAÇÃO - Seguindo a mesma linha de desenvolvimento da Proposição 6.1, obtem-se a subsistência do enunciado acima.

PROPOSIÇÃO 2 - *Seja* $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *uma função de Carathéodory num ponto* $(t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}_0)$. *Suponhamos que existam as derivadas*

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^j}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,n, \end{matrix}$$

das componentes de $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *em* $\tilde{\Gamma}$, *e que as* n *funções vetoriais*

$$\left(\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^n}\right), i=1,\dots,n\ ,$$

sejam de Carathéodory no ponto $(t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}_0)$.

Nestas condições existem uma vizinhança $V(q,a,b)$ *de* $(t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}_0)$, *contida em* $\tilde{\Gamma}$, *e uma função*

$$K_0 = K_0(t)$$

integrável segundo Lebesgue em J_q, *tal que*

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})-\vec{f}(t,\vec{x}_0,\vec{\mu})| \le K_0(t)\,|\vec{x}-\vec{x}_0|$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *e* $(t,\vec{x}_0,\vec{\mu})$ *pertencentes a* $V(q,a,b)$.

DEMONSTRAÇÃO - Seguindo a mesma linha de desenvolvimento da Proposição 6.2, obtem-se a subsistência do enunciado acima.

Diremos que a função vetorial $\vec{f}$ *é de Carathéodory num subconjunto qualquer* W *de* $\tilde{\Gamma}$, se $\vec{f}$ for de Carathéodory em um ponto qualquer de W.

PROPOSIÇÃO 3 - *Suponhamos que* $\vec{f}$ *é uma função de Carathéodory em* $\tilde{\Gamma}$, *e considere-se um qualquer*

$$\bar{V}(q,a,b) = \{(t,\vec{x},\vec{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+n+\ell} : |t-t_0| \le q, |\vec{x}-\vec{x}_0| \le a, |\vec{\mu}-\vec{\mu}_0| \le b\}$$

contido em $\bar{\Gamma}$. *Nestas condições pode-se afirmar que:*

1) *Qualquer que seja* $\vec{x}$ *fixado em* $\bar{\Delta}_a = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}-\vec{x}_0| \le a\}$ *e* $\vec{\mu}$ *fixado em* $\bar{\Theta}_b = \{\vec{\mu} \in \mathbb{R}^\ell : |\vec{\mu}-\vec{\mu}_0| \le b\}$, $\vec{f}$ *é uma função mensurável de* t *em* $\bar{J}_q = \{t \in \mathbb{R} : |t-t_0| \le q\}$;
2) *Qualquer que seja* t *fixado em* $\bar{J}_q$ *e* $\vec{\mu}$ *fixado em* $\bar{\Theta}_b$, $\vec{f}$ *é uma função contínua de* $\vec{x}$ *em* $\bar{\Delta}_a$;
3) *Qualquer que seja* t *fixado em* $\bar{J}_q$ *e* $\vec{x}$ *fixado em* $\bar{\Delta}_a$, $\vec{f}$ *é uma função contínua de* $\vec{\mu}$ *em* $\bar{\Theta}_b$;
4) *Existe uma função*

$$M = M(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$, *para a qual*

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})| \le M(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *pertencente a* $\bar{V}(q,a,b)$.

Além disso, supondo-se que existam as derivadas parciais

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^j}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{array}$$

das componentes de $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *em* $\bar{\Gamma}$, *e que as* n *funções vetoriais definidas por*

$$\left(\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^n}\right), \quad i=1,\ldots,n$$

sejam de Carathéodory em $\tilde{\Gamma}$*, pode-se afirmar que*

5) Existe uma função

$$K = K(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $\bar{J}_q$*, para a qual*

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})-\vec{f}(t,\vec{x}_0,\vec{\mu})| \leq K(t)|\vec{x}-\vec{x}_0|,$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *e* $(t,\vec{x}_0,\vec{\mu})$ *pertencentes a* $\bar{V}(q,a,b)$.

DEMONSTRAÇÃO - Seguindo a mesma linha de desenvolvimento da Proposição 6.3 obtem-se a subsistência do enunciado acima.

O Lema 1 que segue, é usualmente conhecido como Lema de Gronwall.

LEMA 1 - *Seja*

$$u = u(t)$$

uma função contínua em $t_0 \leq t \leq t_1$ *satisfazendo nesse intervalo a desigualdade*

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} [\alpha(\xi)u(\xi)+\beta(\xi)]d\xi \qquad (1)$$

onde

$$\alpha = \alpha(t)$$

e

$$\beta = \beta(t)$$

são funções integráveis segundo Lebesgue em $t_0 \le t \le t_1$, *com* $\alpha(t) > 0$ *em todo intervalo.*

Nestas circunstâncias subsiste a seguinte desigualdade

$$u(t) \le e^{W(t)} \left[\int_{t_0}^{t} \beta(s) e^{-W(s)} ds \right] \tag{2}$$

onde

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(\xi) d\xi$$

em todo intervalo $t_0 \le t \le t_1$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Inicialmente, em conjunto com a desigualdade (1), consideremos a equação integral

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} [\alpha(\xi)V(\xi)+\beta(\xi)]d\xi, \tag{3}$$

em $t_0 \le t \le t_1$, e demonstremos que nesse intervalo

$$u(t) \le V(t) \tag{4}$$

onde $V(t)$ designa a única solução da (3) no mesmo intervalo.

Para verificarmos a (4), consideremos a sequência de funções

$$V_0(t), V_1(t), \ldots, \tag{5}$$

definidas em $t_0 \le t \le t_1$ pelas relações de recorrência

$$V_{i+1}(t) = \int_{t_0}^{t} [\alpha(\xi)V_i(\xi)+\beta(\xi)]d\xi, \; i=0,1,\ldots,n, \tag{6}$$

com

$$V_0(t) = u(t). \tag{7}$$

Observemos que a sequência (5) foi construida utilizando-se o segundo membro da igualdade (3), com o auxílio da fórmula de recorrência empregada no método das aproximações sucessivas. Seguindo os passos da demonstração do Teorema 8.1, tem-se que essa sequência (5) converge uniformemente em $t_0 \le t \le t_1$ à solução $V(t)$ da equação (3).

Demonstremos por indução sobre i, que cada função $V_i(t)$ da sequência (5) satisfaz a desigualdade

$$V_i(t) \le \int_{t_0}^{t} [\alpha(\xi)V_i(\xi)+\beta(\xi)]d\xi, \tag{8}$$

com $t_0 \le t \le t_1$.

De fato, para $i = 0$, esta desigualdade é verdadeira como consequência imediata das (1) e (7). Suponhamos que ela é verdadeira para $V_i(t)$, e demonstremos a sua veracidade para $V_{i+1}(t)$. Em virtude da hipótese de indução, tem-se que

$$V_{i+1}(t) = \int_{t_0}^{t} [\alpha(\xi)V_i(\xi)+\beta(\xi)]d\xi \ge V_i(t). \tag{9}$$

Assim sendo,

$$V_{i+1}(t) \geq V_i(t) . \tag{10}$$

Então, pela utilização da hipótese que $\alpha(t) > 0$ em $t_0 \leq t \leq t_1$, obtemos de (6), que

$$V_{i+1}(t) \leq \int_{t_0}^{t} [\alpha(\xi)V_{i+1}(\xi)+\beta(\xi)]d\xi.$$

A desigualdade (8) fica assim demonstrada. Simultaneamente, estabelecemos a desigualdade (10). Decorre daí, que o limite $V(t)$ da sequência (5) não é inferior a nenhuma das funções $V_i(t)$, e em particular que $V(t) \geq u(t)$. |

Para finalizarmos a demonstração do lema, resta-nos mostrar que a solução $V(t)$ da equação (3) coincide com o segundo membro da desigualdade (2), em todo intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$. É o que rapidamente iremos mostrar.

Sendo

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} [\alpha(\xi)V(\xi)+\beta(\xi)]d\xi,$$

tem-se devido à Proposição 6.6, que

$$\dot{V}(t) = \alpha(t)V(t)+\beta(t) \tag{11}$$

quase sempre em $t_0 \leq t \leq t_1$, e mais

$$V(t_0) = 0. \tag{12}$$

Pode-se resolver a equação (11), de modo a satisfazer a condição inicial (12), e isto da seguinte maneira: Re solve-se inicialmente a equação homogênea

$$\dot{V}(t) = \alpha(t)V(t). \tag{13}$$

Vê-se sem dificuldade, considerando que $\alpha(t) > 0$, que o conjunto de todas as soluções da equação (13) é descrito pela fórmula

$$V(t) = c\, e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)d\xi}, \tag{14}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Para se obter a partir da fórmula (14) a solução da equação não homogênea (11), satisfazendo a condição (12), utilizaremos o método da variação de constantes. Mais especificadamente, procuraremos a solução da (11) sob a forma (14), onde c não é mais uma constante, mas sim uma função absolutamente contínua em $t_0 \le t \le t_1$.

Deduz-se facilmente que para

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)e^{-w(s)}ds,$$

onde

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)d\xi,$$

a função

$$V(t) = e^{w(t)} \int_{t_0}^{t} \beta(s)e^{-w(s)}ds \tag{15}$$

é solução da equação (11) satisfazendo a condição (12), e consequentemente é solução da (3) em $t_0 \leq t \leq t_1$.

Reunindo-se então (4) e (15) obtem-se que

$$u(t) \leq e^{w(t)} \int_{t_0}^{t} \beta(s) e^{-w(s)} ds$$

em $t_0 \leq t \leq t_1$, o que demonstra a tese.

Sistema de Carathéodory - Seja

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^\ell), \ i=1,\ldots,n \ , \qquad (16)$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias, cujos segundos membros f^i, $i=1,\ldots,n$, dependem dos parâmetros $\mu^1, \ldots,$ μ^ℓ e são definidos num aberto $\tilde{\Gamma}$ de $\mathbb{R}^{1+n+\ell}$.

Manteremos aqui a designação sistema de Carathéodory, dizendo que (16) é um *sistema de Carathéodory* quando as funções

$$f^i(t, \vec{x}, \vec{\mu}), \ i=1,\ldots,n,$$

forem de Carathéodory em $\tilde{\Gamma}$.

Tendo presente a noção de sistema de Carathéodory, passemos ao estudo da dependência contínua da solução em relação a parâmetros.

14 - DEPENDÊNCIA CONTÍNUA DA SOLUÇÃO EM RELAÇÃO A PARÂMETROS

Seja

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu}) \qquad (1)$$

uma equação diferencial ordinária, dependendo do parâmetro $\vec{\mu}$. Suponhamos que as funções

$$f^i(t,\vec{x},\vec{\mu}),\ i=1,\ldots,n, \qquad (2)$$

e

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^j},\quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n,\\ j=1,\ldots,n,\end{matrix}$$

sejam de Carathéodory em $\tilde{\Gamma}$.

O objetivo central desta secção é mostrar que a solução maximal $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ da equação (1) para valores iniciais fixados $t_0,\vec{x}_0$ é uma função contínua do parâmetro $\vec{\mu}$. Para tanto daremos com o Teorema 1 uma caracterização do *conjunto* T *onde a solução* $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ *está definida*. Nesse teorema também estudar-se-á a continuidade de $\vec{\phi}$ em relação as variáveis $t,\vec{\mu}$ em T. Trata-se de um teorema muito importante e a partir dele poderemos obter a continuidade da função $\vec{\phi}$ em relação ao parâmetro $\vec{\mu}$ como corolário imediato.

Façamos inicialmente algumas considerações gerais relativas ao conjunto T.

Dado um ponto $(t_0,\vec{x}_0)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, seja

$$M = \{\vec{\mu}\in\mathbb{R}^{\ell}:\ (t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu})\in\tilde{\Gamma}\}.$$

Fixado em M um valor de $\vec{\mu}^*$ do parâmetro, a função

$$\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu}^*) = (f^1(t,\vec{x},\vec{\mu}^*),\ldots,f^n(t,\vec{x},\vec{\mu}^*))$$

depende somente do par $(t,\vec{x})$. A Proposição 11.1 assegura-nos que existe uma única solução maximal $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$ da equação (1) para valores iniciais $t_0, \vec{x}_0$, definida num intervalo $m_1(\vec{\mu}^*) < t < m_2(\vec{\mu}^*)$. (Claro que os valores $m_1(\vec{\mu}^*)$ e $m_2(\vec{\mu}^*)$ dependem do particular valor de $\vec{\mu}^*$ fixado.)

O conjunto T de todos os pares $(t,\vec{\mu})$ para os quais a função $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ está definida é descrito por duas condições:

a) O ponto $\vec{\mu}$ pertence a M;

b) t pertence ao intervalo $m_1(\vec{\mu}^*) < t < m_2(\vec{\mu}^*)$.

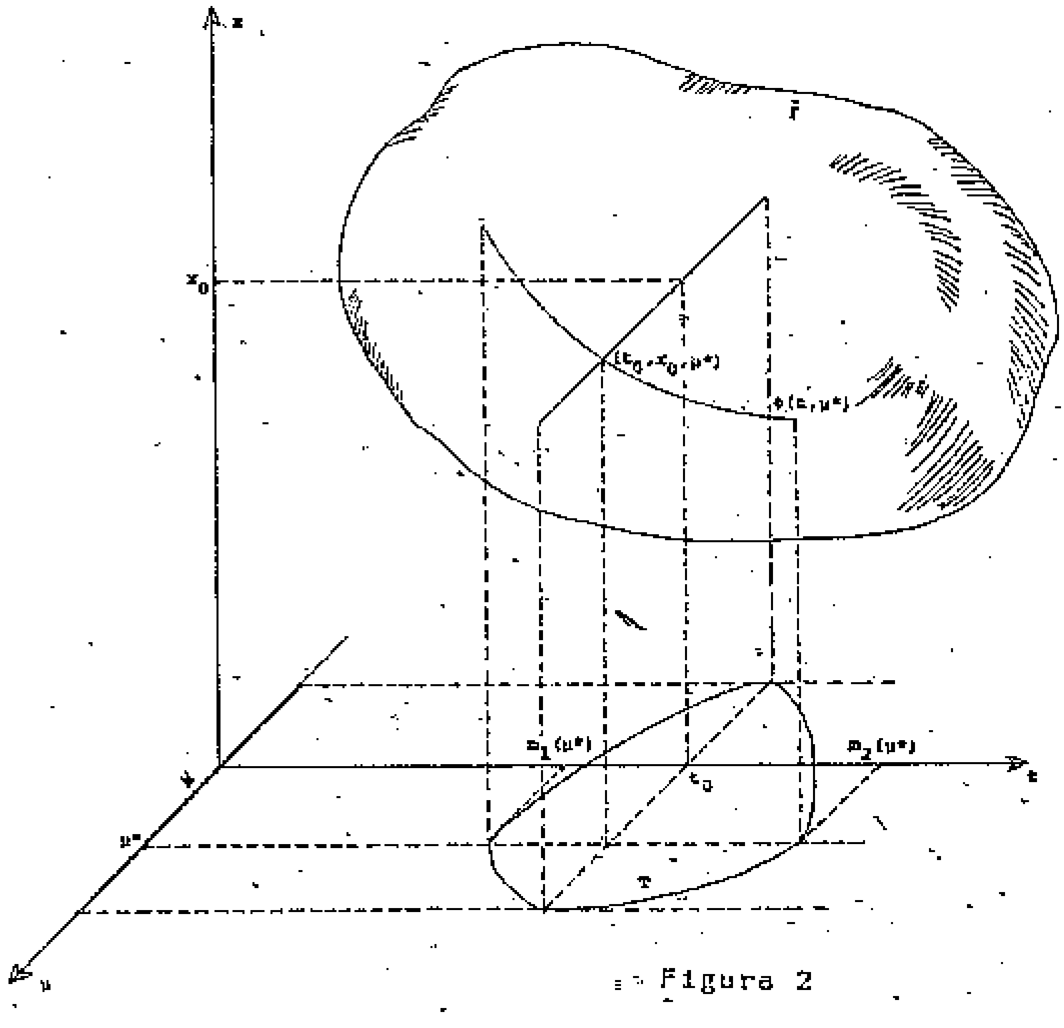

Figura 2

Uma vez introduzido o conjunto T (Ver Figura 2),estabeleceremos a seguir um lema que será utilizado na demonstração do Teorema 1. Tanto neste lema,como no Teorema 1,consideraremos a equação (1), e suporemos que as funções (2) e (3) são de Carathéodory em $\tilde{\Gamma}$. Admitidas essas hipóteses, construiremos a seguir certos conjuntos designados genericamente por $\tilde{\Pi}$. Fixado arbitrariamente um ponto $\vec{\mu}^*$ de M, seja

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$$

a solução maximal da equação (1) para os valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$, definida em $m_1(\vec{\mu}^*) < t < m_2(\vec{\mu}^*)$. Fixemos arbitrariamente um subintervalo compacto I de $m_1(\vec{\mu}^*) < t < m_2(\vec{\mu}^*)$.Quando t percorre I, o ponto $(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*),\vec{\mu}^*)$ descreve o conjunto

$$Q = \{(t,\vec{x},\vec{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+n+\ell} \colon t \in I, \vec{x} = \vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*) \text{ e } \vec{\mu} = \vec{\mu}^*\}$$

contido em $\tilde{\Gamma}$. A continuidade de $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$ associada ao fato que I é compacto, assegura-nos que o conjunto Q é um compacto de $\mathbb{R}^{1+n+\ell}$. Sendo Q um compacto contido no aberto $\tilde{\Gamma}$, podemos garantir que existem $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ reais positivos, tais que o conjunto

$$\tilde{\Pi} = \{(t,\vec{x},\vec{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+n+\ell} \colon t \in I, \ |\vec{x}-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| \le \tilde{a} \text{ e } |\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \le \tilde{b}\}$$

também é um compacto contido em $\tilde{\Gamma}$. (Ver Figura 3.)

<u>LEMA 1</u> - *Admitidas as hipóteses acima, pode-se afirmar que:*

1) A função composta $\vec{f}(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*),\vec{\mu}^*)$ *é mensurável de* t

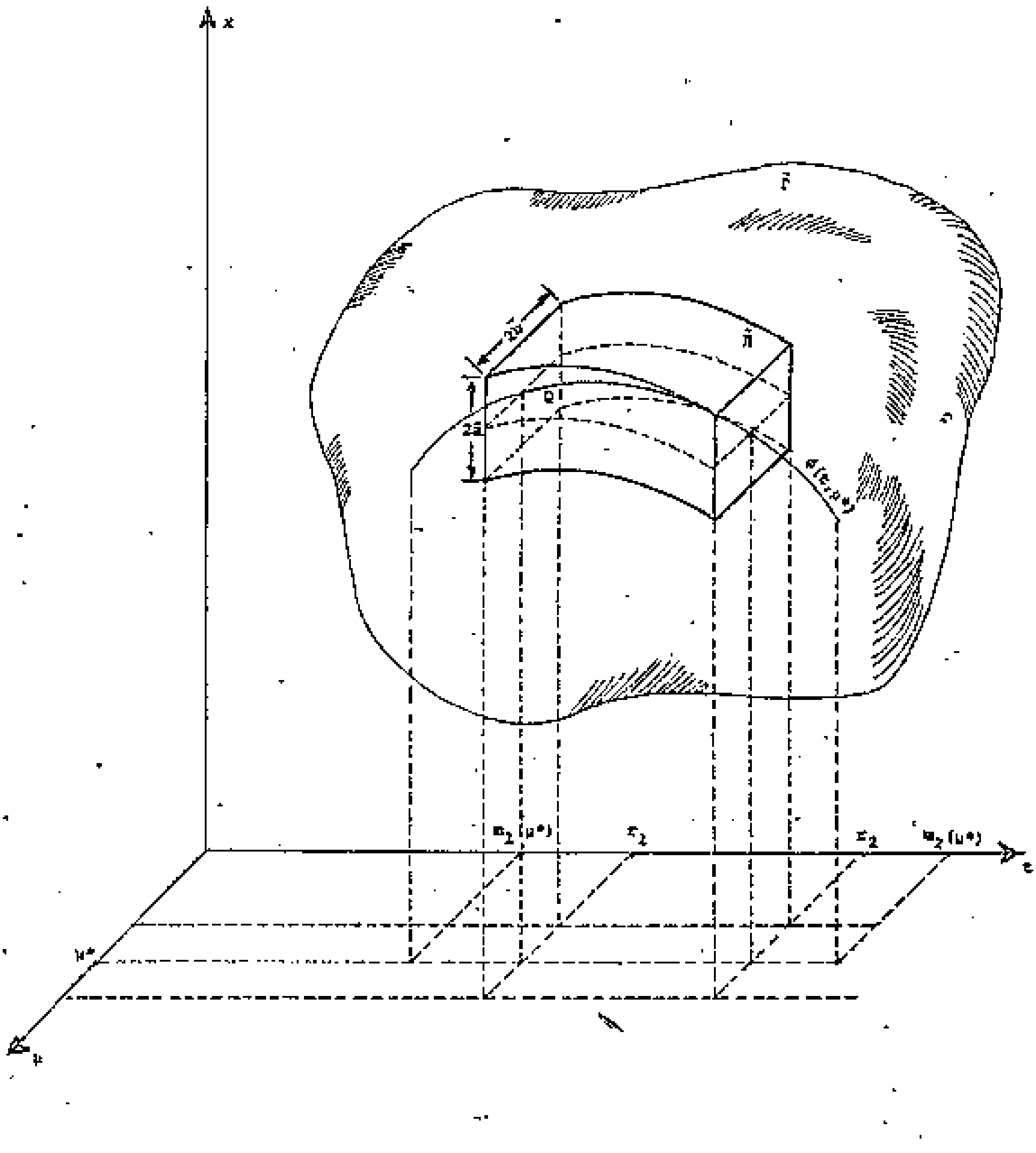

Figura 3

em $m_1(\vec{\mu}^*) < t < m_2(\vec{\mu}^*)$;

2) Existe definida no intervalo I uma função

$$M = M(t)$$

integrável segundo Lebesgue nesse intervalo, tal que

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})| \leq M(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ *pertencente a* $\tilde{\Pi}$.

3) Existe definida no intervalo I uma função

$$K = K(t)$$

integrável segundo Lebesgue nesse intervalo, tal que

$$|\vec{f}(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})-\vec{f}(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})| \leq K(t)\,|\vec{x}_2-\vec{x}_1|,$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})$ *e* $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})$ *pertencentes a* $\tilde{\Pi}$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - A demonstração de 1) pode ser feita essencialmente através de argumentos do tipo dos utilizados na demonstração da Proposição 6.4. Passemos então a constatatação de 2).

Como $\vec{f}$ é de Carathéodory em $\bar{\Gamma}$, qualquer que seja o ponto $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ pertencente a $\tilde{\Pi}$ existem uma V(q,a,b) desse ponto, contida em $\bar{\Gamma}$, e uma função m integrável segundo Lebesgue em J_q, para a qual

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})| \leq m(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ pertencente a V(q,a,b).

Considere-se o conjunto das vizinhanças $V(q,a,b)$ obtido quando $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ percorre $\tilde{\Pi}$. Esse conjunto é um recobrimento aberto de $\tilde{\Pi}$. Como $\tilde{\Pi}$ é um compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue pode-se afirmar que existe um número finito dessas vizinhanças

$$V(q_1,a_1,b_1),\ldots,V(q_n,a_n,b_n)$$

que recobrem $\tilde{\Pi}$.

Consideremos os correspondentes intervalos $J_{q_1},\ldots,J_{q_n}$, e sejam $m_1,\ldots,m_n$, funções integráveis segundo Lebesgue respectivamente nesses intervalos, tais que

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})| \leq m_i(t)$$

quando $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ pertence a $V(q_i,a_i,b_i)$, $i=1,\ldots,n$.

Definamos em I as funções

$$\bar{m}_i(t) = \begin{cases} m_i(t) & \text{em } I\cap J_{q_i} \\ 0 & \text{em } I-J_{q_i} \end{cases}$$

e seja, para cada t pertencente a I,

$$M(t) = \sup\{\bar{m}_1(t),\ldots,\bar{m}_n(t)\}.$$

Constata-se sem dificuldade que M é uma função integrável segundo Lebesgue em I, e que

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})| \leq M(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{x},\vec{\mu})$ pertencente a $\tilde{\Pi}$, o que demonstra 2). Passemos a constatação de 3).

Como $\tilde{\Pi}$ é convexo em relação às variáveis $x^1,\ldots,x^n$, tem-se que dados dois pontos $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})$ e $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})$ de $\tilde{\Pi}$, com t e $\vec{\mu}$ iguais, o segmento determinado por eles está contido em $\tilde{\Pi}$. Podemos descrever este segmento como sendo o conjunto dos $(t,\vec{z}(s),\vec{\mu})$, onde

$$\vec{z}(s) = \vec{x}_1+s(\vec{x}_2-\vec{x}_1), \text{ com } 0 \le s \le 1.$$

Como por hipótese as funções (3) são de Carathéodory em $\tilde{\Gamma}$, pode-se por meio de argumentos análogos aos da Proposição 6.2 constatar que para as componentes $f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})$, $i=1,\ldots,n$, de $\vec{f}$ subsistem as seguintes desigualdades

$$|f^i(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu})}{\partial x^j}\right|_{s=\theta}|\vec{x}_2-\vec{x}_1|, \; i=1,\ldots,n,$$

com $0 \le \theta \le 1$, quaisquer que sejam $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})$ e $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})$ pertencentes a $\tilde{\Pi}$. Daí, como na Proposição 6.3, vê-se facilmente que existe uma função

$$K = K(t)$$

integrável segundo Lebesgue em I, para a qual

$$|\vec{f}(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})-\vec{f}(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})| \le K(t)\,|\vec{x}_2-\vec{x}_1| \;,$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})$ e $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})$ pertencentes a $\tilde{\Pi}$, o que demonstra a tese.

<u>TEOREMA 1</u> - *Admitidas as hipóteses acima, pode-se afirmar*

que o conjunto T *é um aberto do espaço* $\mathbb{R}^{1+\ell}$ *das variáveis* $t,\mu^1,\ldots,\mu^\ell$, *e que* $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ *é uma função contínua das variáveis* $t,\vec{\mu}$ *em* T.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $(t^*,\vec{\mu}^*)$ um ponto arbitrário de T. Demonstraremos que um ponto $(t,\vec{\mu})$ de $\mathbb{R}^{1+\ell}$ suficientemente próximo de $(t^*,\vec{\mu}^*)$ também pertence a T. Constataremos também que a diferença $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t^*,\vec{\mu}^*)$ é pequena, assegurando que $\vec{\phi}$ é contínua nas variáveis $t,\vec{\mu}$.

Para fixar idéias, suponhamos que $t^* \geq t_0$. (O mesmo desenvolvimento pode ser feito se $t^* \leq t_0$.) A solução $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$ está definida no ponto $t = t^*$; como $t^* < m_2(\vec{\mu}^*)$, existe um número r_2, com $t^* < r_2 < m_2(\vec{\mu}^*)$; assim sendo, a solução $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$ está definida sobre todo intervalo $t_0 \leq t \leq r_2$.

Tomemos um conjunto

$\tilde{\Pi} = \{(t,\vec{x},\vec{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+n+\ell}$: $t \in I$, $|\vec{x}-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| \leq \tilde{a}_2$ e $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \leq \tilde{b}_2\}$,

contido em $\tilde{\Gamma}$, onde I é o intervalo $t_0 \leq t \leq r_2$, e $\tilde{a}_2$ e $\tilde{b}_2$ são números reais positivos. Decorre do Lema 1 a existência de funções

$$M = M(t)$$

e

$$K = K(t)$$

integráveis segundo Lebesgue em $t_0 \leq t \leq r_2$ tais que

$$|\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})| \leq M(t), \tag{4}$$

e

$$|\vec{f}(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})-\vec{f}(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})| \leq K(t)\,|\vec{x}_2-\vec{x}_1|, \tag{5}$$

quaisquer que sejam $(t,\vec{x},\vec{\mu})$, $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})$ e $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})$ pertencentes a $\tilde{\Pi}$.

Consideremos a seguir a solução maximal

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t,\vec{\mu})$$

da equação (1), com $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \leq \bar{b}_2$, para os valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$. Em virtude da Proposição 11.2 podemos afirmar que o ponto $(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}),\vec{\mu})$ deixa o compacto $\tilde{\Pi}$ quando t tende a $m_2(\vec{\mu})$. Designemos por t_2 o valor de $t \geq t_0$ para o qual o ponto $(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}),\vec{\mu})$ atinge pela primeira vez a fronteira de $\tilde{\Pi}$. Claro que $t_0 < t_2 \leq \bar{t}_2$. Façamos a seguir uma estimativa da diferença $|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)|$ sobre o intervalo $t_0 \leq t \leq t_2$. Devido a Proposição 6.6 pode-se para $\vec{\mu}$ e $\vec{\mu}^*$ fixados escrever que

$$\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*) = \int_{t_0}^{t} [\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}),\vec{\mu})-\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*),\vec{\mu}^*)]d\xi,$$

em $t_0 \leq t \leq t_2$. Podemos então utilizando (5) escrever que

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}),\vec{\mu})-\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*),\vec{\mu})|d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*),\vec{\mu})-\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*),\vec{\mu}^*)|d\xi \leq$$

→

$$\leq \int_{t_0}^{t} [K(\xi)\,|\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu})-\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*)| \; +$$

$$+ \; |\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*),\vec{\mu})-\vec{f}(\xi,\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*),\vec{\mu}^*)|]d\xi, \quad (6)$$

em $t_0 \leq t \leq t_2$.

Seja

$$N(t,\vec{\mu}) = |\vec{f}(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*),\vec{\mu})-\vec{f}(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*),\vec{\mu}^*)|. \quad (7)$$

Decorre da hipótese que $\vec{f}$ é de Carathéodory em $\tilde{\Gamma}$, que:

a) Qualquer que seja $\vec{\mu}$ fixado em $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \leq \tilde{b}_2$, $N(t,\vec{\mu})$ é mensurável de t em $t_0 \leq t \leq t_2$;

b) Qualquer que seja t fixado em $t_0 \leq t \leq t_2$, $N(t,\vec{\mu})$ é contínua de $\vec{\mu}$ em $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \leq \tilde{b}_2$;

c) Existe uma função

$$\tilde{M} = \tilde{M}(t)$$

integrável segundo Lebesgue em $t_0 \leq t \leq t_2$, tal que

$$|N(t,\vec{\mu})| \leq \tilde{M}(t)$$

qualquer que seja $(t,\vec{\mu})$ pertencente ao produto cartesiano de $t_0 \leq t \leq t_2$ por $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \leq \tilde{b}_2$.

Então,

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| \leq \int_{t_0}^{t} [K(\xi)\,|\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu})-\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*)| + N(\xi,\vec{\mu})]d\xi. \quad (8)$$

Observemos que $K(t) \geq 0$ em $t_0 \leq t \leq t_2$. Então para que possamos aplicar o Lema 13.1 substituiremos $K(t)$ por $K_1(t) = K(t)+C$ em $t_0 \leq t \leq t_2$, onde C é uma constante real positiva. Daí,

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| \leq \int_{t_0}^{t} [K_1(\xi)\,|\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu})-\vec{\phi}(\xi,\vec{\mu}^*)| + N(\xi,\vec{\mu})]d\xi,$$

onde $K_1(t) > 0$ é uma função integrável segundo Lebesgue em $t_0 \leq t \leq t_2$.

Colocando $u(t) = |\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)|$, temos em virtude do Lema 13.1 que

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| \leq e^{w(t)} \int_{t_0}^{t} N(s,\vec{\mu})e^{-w(s)}ds, \qquad (9)$$

onde

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} K_1(\xi)d\xi, \text{ com } t_0 \leq t \leq t_2.$$

Por um lado, como $e^{w(t)}$ é uma função contínua em $t_0 \leq t \leq t_2$, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$e^{w(t)} < C_2 \quad .$$

Ainda mais, sendo $N(t,\vec{\mu})e^{-w(t)} \geq 0$, tem-se que

$$e^{w(t)} \int_{t_0}^{t} N(s,\vec{\mu})e^{-w(s)}ds \leq C_2 \int_{t_0}^{t_2} N(s,\vec{\mu})e^{-w(s)}ds \qquad (10)$$

em $t_0 \leq t \leq t_2$.

Por outro lado, devido as a), b) e c) pode-se constar sem dificuldade que a função

$$\bar{N}(\vec{\mu}) = C_2 \int_{t_0}^{t_2} N(s,\vec{\mu})\, e^{-w(s)} ds, \tag{11}$$

é contínua em $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \leq \bar{b}_2$ conforme [3, p.326]; isto significa que dado $\bar{a}_2 > 0$, existe $0 < \rho_2 \leq \bar{b}_2$ tal que para $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| < \rho_2$, tem-se que

$$\bar{N}(\vec{\mu}) < \bar{a}_2 . \tag{12}$$

Resulta das (9), (10), (11) e (12) que

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu}) - \vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| < \bar{a}_2 \ , \tag{13}$$

sempre que $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| < \rho_2$ e $t_0 \leq t \leq t_2$.

Resta finalmente demonstrar que se $\vec{\mu}$ satisfaz a desigualdade

$$|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| < \rho_2 \ , \tag{14}$$

tem-se que $t_2 = r_2$, de modo que a solução $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ está definida em todo intervalo $t_0 \leq t \leq r_2$. Realmente, como $(t_2, \vec{\phi}(t_2,\vec{\mu}); \vec{\mu})$ está na fronteira de $\bar{\Pi}$, uma das desigualdades

$$t_0 \leq t_2 \leq r_2 \tag{15}$$

$$|\vec{\phi}(t_2,\vec{\mu}) - \vec{\phi}(t_2,\vec{\mu}^*)| \leq \bar{a}_2 \tag{16}$$

e

$$|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \le \bar{b}_2 \qquad (17)$$

deve tornar-se uma igualdade. Levando em conta que $\rho_2 \le \bar{b}_2$ decorre das (13) e (14) que as desigualdades (16) e (17) devem ser estritas, e portanto, como $t_0 < t_2$, tem-se que $t_2 = r_2$.

Demonstramos assim que para $t^* \ge t_0$ existem números reais $\rho_2 > 0$ e $r_2 > t^*$, tais que para $t_0 \le t \le r_2$ e $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| < \rho_2$, o ponto $(t,\vec{\mu})$ pertence a T e subsiste a desigualdade (13).

Seguindo um procedimento análogo constata-se que se $t^* \le t_0$, existem números reais $\rho_1 > 0$ e $r_1 < t^*$ tais que para $r_1 \le t \le t_0$ e $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| < \rho_1$, o ponto $(t,\vec{\mu})$ pertence a T e subsiste a desigualdade

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| < \bar{a}_1,$$

análoga à (13).

Vê-se facilmente que se o ponto $(t^*,\vec{\mu}^*)$ pertence a T, qualquer que seja a posição de t^* em relação a t_0, existem números positivos r e ρ tais que se

$$|t-t^*| < r \quad \text{e} \quad |\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| < \rho \quad , \qquad (18)$$

o ponto $(t,\vec{\mu})$ pertence a T, e

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| < \tilde{a} \qquad (19)$$

onde $\tilde{a}$ é um número real positivo, arbitrariamente fixado.

Como o conjunto dos pontos $(t,\vec{\mu})$ que satisfazem as desigualdades (18) constituem uma vizinhança aberta do ponto $(t^*,\vec{\mu}^*)$, conclui-se que T é aberto.

Em vista do desenvolvimento feito acima a conclusão de que $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ é contínua no ponto $(t^*,\vec{\mu}^*)$ decorre facilmente como passamos a ver.

Devido a (18) e (19) tem-se que $|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)|<\tilde{a}$ sempre que $|t-t^*|<r$ e $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*|<\rho$; além disso, a continuidade de $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$ em relação a t assegura-nos que fixado arbitrariamente $\varepsilon>0$, existe $0<r'\leq r$ tal que se $|t-t^*|<r'$, $|\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)-\vec{\phi}(t^*,\vec{\mu}^*)|<\varepsilon$. Daí,

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t^*,\vec{\mu}^*)|\leq|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)|+|\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)-\vec{\phi}(t^*,\vec{\mu}^*)|<\tilde{a}+\varepsilon$$

sempre que $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*|<\rho$ e $|t-t^*|<r'$, o que nos garante que $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ é contínua em relação ao par $t,\vec{\mu}$. Com este último fato, fica concluida a demonstração do Teorema 1.

Decorre do Teorema 1 que acabamos de demonstrar um corolário que assegura a continuidade de $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ em relação ao parâmetro $\vec{\mu}$. Trata-se do Corolário 1 seguinte.

<u>COROLÁRIO 1</u> - *Se a solução $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ da equação (1) para valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$ e $\vec{\mu}=\vec{\mu}^*$ estiver definida em um intervalo $r_1\leq t\leq r_2$, contendo t_0, (isto é $r_1\leq t\leq r_2$ é um intervalo contido no intervalo maximal de definição da solução $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$), então existe um número positivo ρ tal que se $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*|\leq\rho$, a solução maximal $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ para valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$ também está definida em $r_1\leq t\leq r_2$. Ainda mais, para cada ε positivo existe $\delta<\rho$ positivo, tal que para $r_1\leq t\leq r_2$ e $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*|<\delta$, subsiste a desigualdade*

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu})-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| < \varepsilon ,$$

DEMONSTRAÇÃO - Como o conjunto T de todos os pares $(t,\vec{\mu})$ onde a função $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ está definida é aberto e os pontos $(r_1,\vec{\mu}^*)$ e $(r_2,\vec{\mu}^*)$ pertencem a este aberto, existe um número positivo ρ suficientemente pequeno, tal que se $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*|\le\rho$, os pontos $(r_1,\vec{\mu})$ e $(r_2,\vec{\mu})$ pertencem a T. Isto significa que o intervalo de definição da solução maximal $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ contém todo o intervalo $r_1 \le t \le r_2$, isto é, a solução está definida neste intervalo. Além disso, o conjunto P de todos os pontos $(t,\vec{\mu})$ para os quais $r_1 \le t \le r_2$ e $|\vec{\mu}-\vec{\mu}^*| \le \rho$ é fechado, limitado e contido em T, e $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ é contínua em T. Daí, $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ é uniformemente contínua em P, o que demonstra a tese.

15 - DIFERENCIABILIDADE DA SOLUÇÃO EM RELAÇÃO A PARÂMETROS

Seja

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu}) \tag{1}$$

uma equação diferencial ordinária dependendo do parâmetro $\vec{\mu}$. Suponhamos que as funções

$$f^i(t,\vec{x},\vec{\mu}),\ i=1,\dots,n, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial x^j},\ \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,n, \end{matrix} \tag{3}$$

e

$$\frac{\partial f^i(t,\vec{x},\vec{\mu})}{\partial \mu^k},\ \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell, \end{matrix} \tag{4}$$

sejam de Carathéodory em $\bar{\Gamma}$.

Nesta secção trataremos da questão da diferenciabilidade da solução $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ de (1) em relação a parâmetros. Neste sentido apresentaremos dois teoremas correspondentes às duas primeiras afirmações do Teorema 2.4. O primeiro tratará das derivadas

$$\frac{\partial\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial\mu^k}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ k=1,\ldots,\ell. \end{array}$$

O segundo dirá respeito às derivadas mistas

$$\frac{\partial^2\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial t\partial\mu^k}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ k=1,\ldots,\ell, \end{array}$$

Não fazemos aqui um estudo da existência das derivadas mistas

$$\frac{\partial^2\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial\mu^k\partial t}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ k=1,\ldots,\ell, \end{array}$$

bem como um estudo da inversão da ordem das derivações. A razão disso é que não conseguimos esclarecer completamente questões pertinentes a estes problemas. Pretendemos estudar melhor esses problemas futuramente.

Vamos inicialmente introduzir uma hipótese adicional relativa às funções (2), (3) e (4) que será utilizada no que segue.

Admitiremos que qualquer que seja o ponto $(t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}_0)$ de $\bar{\Gamma}$, existe uma vizinhança $V(q,a,b)$ desse ponto, contida em

$\tilde{\Gamma}$, onde é satisfeita a seguinte condição:

(*) Qualquer que seja t fixado em J_q, (2), (3) e (4) são funções contínuas do par $(\vec{x},\vec{\mu})$ em $\Delta_a \times \theta_b$.

Antes de passarmos ao Teorema 1, demonstraremos um lema que será utilizado na demonstração do referido teorema. Tanto neste lema como nos teoremas que seguem, faremos uso de certas notações já introduzidas anteriormente e que para facilidade do leitor reapresentaremos a seguir:

Seja $(t_0,\vec{x}_0)$ um ponto de $\mathbb{R}^{n+1}$, e $M=\{\vec{\mu}\in\mathbb{R}^{\ell}:(t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu})\in\tilde{\Gamma}\}$. Fixado arbitrariamente um ponto $\vec{\mu}^*$ de M, seja

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$$

a solução maximal da equação (1) para os valores iniciais $t_0,\vec{x}_0$, solução essa definida em $m_1(\vec{\mu}^*) < t < m_2(\vec{\mu}^*)$. Seja T o conjunto de todos os pares $(t,\vec{\mu})$ de $\mathbb{R}^{1+\ell}$ para os quais a função $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ está definida, e $(t^*,\vec{\mu}^*)$ um ponto de T. A solução $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$ está definida no ponto $t=t^*$; como $m_1(\vec{\mu}^*) < t^* < m_2(\vec{\mu}^*)$, existem números r_1 e r_2, com $r_1<t_0<r_2$ e $m_1(\vec{\mu}^*)<r_1<t^*<r_2<m_2(\vec{\mu}^*)$; assim sendo a solução $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)$ está definida sobre todo intervalo $r_1 \le t \le r_2$. Quando t percorre $r_1 \le t \le r_2$, o ponto $(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*),\vec{\mu}^*)$ descreve o conjunto

$$Q = \{(t,\vec{x},\vec{\mu})\in\mathbb{R}^{1+n+\ell}: r_1 \le t \le r_2,\ \vec{x} = \vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)\ \text{e}\ \vec{\mu} = \vec{\mu}^*\}.$$

Sendo Q um compacto contido no aberto $\tilde{\Gamma}$, pode-se garantir que existem números $\bar{a}$ e $\bar{b}$ reais positivos tais que

$$\bar{\Pi} = \{(t,\vec{x},\vec{\mu})\in\mathbb{R}^{1+n+\ell}: r_1 \le t \le r_2,\ |\vec{x}-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| \le \bar{a}\ \text{e}$$

$(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1)$ *e* $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)$ *pertencem a* $\dot{\bar{\Pi}}$. *Essas funções são contínuas de* $\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2$ *para cada* t *fixado em* $r_1 < t < r_2$. *Além disso, quaisquer que sejam* $\vec{\mu}_1$ *e* $\vec{\mu}_2$ *com* $|\vec{\mu}_1-\vec{\mu}^*| < 2\rho$ *e* $|\vec{\mu}_2-\vec{\mu}^*| < 2\rho$, *as funções*

$$h_j^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\ \vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2),\quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,n+\ell, \end{matrix}$$

são definidas no intervalo $r_1 < t < r_2$, *e no mesmo são integráveis segundo Lebesgue.*

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Como o conjunto $\dot{\bar{\Pi}}$ é convexo em relação as variáveis $x^1,\dots,x^n$, tem-se que dados dois pontos $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu})$ e $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu})$ de $\dot{\bar{\Pi}}$, com t e $\vec{\mu}$ iguais, o segmento determinado por eles está contido em $\dot{\bar{\Pi}}$. Podemos descrever este segmento como sendo o conjunto dos pontos $(t,\vec{z}(s),\vec{\mu})$, onde $\vec{z}(s) = \vec{x}_1+s(\vec{x}_2-\vec{x}_1)$, com $0 \le s \le 1$. Analogamente, $\dot{\bar{\Pi}}$ é convexo em relação às variáveis $\mu^1,\dots,\mu^\ell$. Daí tem-se que dados dois pontos $(t,\vec{x},\vec{\mu}_2)$ e $(t,\vec{x},\vec{\mu}_1)$ de $\dot{\bar{\Pi}}$, com t e $\vec{x}$, iguais o segmento determinado por eles está contido em $\dot{\bar{\Pi}}$. Podemos descrever este segmento como sendo o conjunto dos pontos $(t,\vec{x},\vec{w}(s))$, onde $\vec{w}(s) = \vec{\mu}_1+s(\vec{\mu}_2-\vec{\mu}_1)$, com $0 \le s \le 1$.

Sejam $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1)$ e $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)$ pontos quaisquer de $\dot{\bar{\Pi}}$. Tem-se que

$$f^i(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1) = [f^i(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_2)] +$$

$$+[f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_2)-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1)]=[f^i(t,\vec{z}(1),\vec{\mu}_2)-f^i(t,\vec{z}(0),\vec{\mu}_2)] +$$

$$+ [f^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(1))-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(0))],\ i=1,\dots,n. \qquad (5)$$

Como as funções (2), (3) e (4) são de Carathéodory em $\tilde{\Gamma}$, podemos assegurar que as derivadas $\frac{df^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu}_2)}{ds}$ e $\frac{df^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(s))}{ds}$, $i=1,\ldots,n$, existem em $0 \le s \le 1$, podendo ser obtidas pela regra da cadeia:

$$\frac{df^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu}_2)}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu}_2)}{\partial x^j}\,\frac{dz^j(s)}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu}_2)}{\partial x^j}\left[x_2^j-x_1^j\right],\ i=1,\ldots,n, \tag{6}$$

e

$$\frac{df^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(s))}{ds} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(s))}{\partial \mu^k}\,\frac{dw^k(s)}{ds} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(s))}{\partial \mu^k}\left[\mu_2^k-\mu_1^k\right],\ i=1,\ldots,n, \tag{7}$$

Ainda mais, tem-se que

$$[f^i(t,\vec{z}(1),\vec{\mu}_2)-f^i(t,\vec{z}(0),\vec{\mu}_2)]+[f^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(1))-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(0))]= \int_0^1 \frac{df^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu}_2)}{ds}\,ds + \int_0^1 \frac{df^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(s))}{ds}\,ds,\ i=1,\ldots,n, \tag{8}$$

Então, reunindo (5), (6), (7) e (8), tem-se que

$$f^i(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial f^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu}_1)}{\partial x^j}\left[x_2^j-x_1^j\right]ds + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(s))}{\partial \mu^k}\left[\mu_2^k-\mu_1^k\right]ds,\ i=1,\ldots,n.$$

Definamos então

$$h_j^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2) = \int_0^1 \frac{\partial f^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu}_2)}{\partial x^j}ds =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f^i(t,\vec{x}_1+s[\vec{x}_2-\vec{x}_1],\vec{\mu}_2)}{\partial x^j}ds, \quad \begin{array}{l} j=1,\ldots,n, \\ i=1,\ldots,n, \end{array}$$

e

$$h_{n+k}^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2) = \int_0^1 \frac{\partial f^i(t,\vec{x}_1,\vec{w}(s))}{\partial \mu^k}ds =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1+s[\vec{\mu}_2-\vec{\mu}_1])}{\partial \mu^k}ds, \quad \begin{array}{l} k=1,\ldots,\ell, \\ i=1,\ldots,n. \end{array}$$

Observe-se que nas expressões acima os pontos $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)$ são somente tais que $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1)$ e $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)$ pertencem a $\bar{\Pi}$.

Daí, tem-se que

$$f^i(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1) = \sum_{j=1}^{n} h_j^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)(x_2^j-x_1^j) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\ell} h_{n+k}^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)(\mu_2^k-\mu_1^k), \quad i=1,\ldots,n. \qquad (9)$$

Por um lado, como (2), (3) e (4) são de Carathéodory em $\bar{\Gamma}$ e satisfazem a hipótese adicional (*), tem-se que as funções h_j^i, $j=1,\ldots,n+\ell$, $i=1,\ldots,n$, são contínuas de $\vec{x}_1$, $\vec{\mu}_1,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2$ para cada t fixado em $r_1 < t < r_2$.

Por outro lado, as mencionadas hipóteses asseguram-nos que para cada valor de t fixado em $r_1 < t < r_2$ e quaisquer que sejam $\vec{\mu}_1$ e $\vec{\mu}_2$, com $|\vec{\mu}_1-\vec{\mu}^*| < 2\rho$ e $|\vec{\mu}_2-\vec{\mu}^*| < 2\rho$, subsistem

TEOREMA 1 - *Suponhamos que as funções (2), (3) e (4) sejam de Carathéodory em Γ, e satisfaçam neste aberto a condição adicional (*).*

Nestas condições pode-se afirmar que as derivadas parciais

$$\frac{\partial\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial\mu^k}, \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell, \end{array}$$

existem e são contínuas em todo conjunto aberto T.

DEMONSTRAÇÃO - Para acharmos as derivadas $\frac{\partial\phi^i}{\partial\mu^k}$, $i=1,\dots,n$, calcularemos as diferenças $\phi^i(t,\vec{\mu}_2)-\phi^i(t,\vec{\mu}_1)$, $i=1,\dots,n$. Como $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ é solução da equação (1), estes cálculos levam naturalmente ao cálculo das diferenças $f^i(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}_2)-f^i(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}_1)$, $i=1,\dots,n$, os quais serão efetuados utilizando-se o Lema 1.

Consideremos Π e $\mathring{\Pi}$ como foram apresentados no início da secção. Seja k um inteiro tal que $1 \le k \le \ell$. Designemos por $\vec{e}_k$ o vetor unitário de $\mathbb{R}^\ell$, orientado segundo o k-ésimo eixo. Suponha-se que o vetor $\vec{\mu}_1$ verifique a desigualdade $|\vec{\mu}_1-\vec{\mu}^*| < \rho$ e seja τ um número real verificando a condição $|\tau| < \rho$. Colocando $\vec{\mu}_2=\vec{\mu}_1+\tau\vec{e}_k$, tem-se que os vetores $\vec{\mu}_1$ e $\vec{\mu}_2$ verificam as desigualdades

$$|\vec{\mu}_1-\vec{\mu}^*| < 2\rho \quad , \quad |\vec{\mu}_2-\vec{\mu}^*| < 2\rho .$$

Ainda mais, sobre todo intervalo $r_1 \le t \le r_2$ subsistem as desigualdades

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1) - \vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| < \tilde{a}$$

e

$$|\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2) - \vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)| < \tilde{a}.$$

Assim sendo, quando t percorre o intervalo $r_1 < t < r_2$, os pontos $(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)$ e $(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2)$ descrevem curvas inteiramente contidas em $\overset{*}{\Pi}$. Aplicando o Lema 1 às diferenças $f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2) - f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)$, $i=1,\ldots,n$, tem-se que

$$\begin{aligned} f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2) - f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1) &= \\ = \sum_{j=1}^{n} h^i_j(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2)[\phi^j(t,\vec{\mu}_2)-\phi^j(t,\vec{\mu}_1)] &+ \\ + \sum_{k=1}^{\ell} h^i_{n+k}(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2)[\mu^k_2-\mu^k_1], \quad i=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{10}$$

Observemos que em virtude do Lema 1, h^i_j, $j=1,\ldots,n+\ell$, $i=1,\ldots,n$, dependem de uma maneira contínua dos seus quatro últimos argumentos, para cada valor de t fixado em $r_1 < t < r_2$. Além disso, devido ao Teorema 14.1, as funções $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2)$ e $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1)$ dependem de uma maneira contínua de $t,\vec{\mu}_2$ e $t,\vec{\mu}_1$ respectivamente. Então, as funções

$$\tilde{h}^i_j(t,\vec{\mu}_1,\vec{\mu}_2) = h^i_j(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2), \quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n+\ell, \end{matrix}$$

dependem de uma maneira contínua de $\vec{\mu}_1$ e $\vec{\mu}_2$ para cada valor de t fixado em $r_1 < t < r_2$. Ainda mais, uma vez que $\vec{\mu}_2=\vec{\mu}_1+\tau\vec{e}_K$ tem-se diretamente que as funções

$$H^i_j(t,\vec{\mu}_1,\tau) = \tilde{h}^i_j(t,\vec{\mu}_1,\vec{\mu}_2), \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n+\ell, \end{array}$$

dependem de uma maneira contínua de $\vec{\mu}_1$ e τ para cada valor de t fixado em $r_1 < t < r_2$. Pode-se ainda constatar sem dificuldade, utilizando o Lema 1, que para $\vec{\mu}_1$ e τ fixados as funções H^i_j, $j=1,\ldots,n+\ell$, $i=1,\ldots,n$, são integráveis segundo Lebesgue em $r_1 < t < r_2$.

Consideremos então as funções $\psi^i(t,\vec{\mu}_1,\tau)$, $i=1,\ldots,n$, definidas por

$$\psi^i(t,\vec{\mu}_1,\tau) = \frac{\phi^i(t,\vec{\mu}_1+\tau\vec{e}_k)-\phi^i(t,\vec{\mu}_1)}{\tau} =$$

$$= \frac{\phi^i(t,\vec{\mu}_2)-\phi^i(t,\vec{\mu}_1)}{\tau}, \quad \tau\neq 0, \quad i=1,\ldots,n. \quad (11)$$

Para obtermos as derivadas $\frac{\partial\phi^i}{\partial\mu^k}$, $i=1,\ldots,n$, em $(t,\vec{\mu}_1)$, devemos passar (11) ao limite quando $\tau\to 0$. Sendo $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ solução da equação (1), tem-se a subsistência das igualdades

$$\dot{\phi}^i(t,\vec{\mu}_1) = f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1), \quad i=1,\ldots,n,$$

e (12)

$$\dot{\phi}^i(t,\vec{\mu}_2) = f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2), \quad i=1,\ldots,n,$$

quase sempre em $r_1 < t < r_2$.

Decorre então das (10), (11) e (12), que para $|\vec{\mu}_1-\vec{\mu}^*| < \rho$, $|\tau| < \rho$ e $\tau\neq 0$ subsistem as igualdades

$$\frac{\partial\psi^i(t,\vec{\mu}_1,\tau)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} H^i_j(t,\vec{\mu}_1,\tau)\psi^j(t,\vec{\mu}_1,\tau)+H^i_{n+k}(t,\vec{\mu}_1,\tau),$$

$$i=1,\ldots,n, \quad (13)$$

quase sempre em $r_1 < t < r_2$.

Assim sendo, as funções

$$\psi^1(t,\vec{\mu}_1,\tau),\ldots,\psi^n(t,\vec{\mu}_1,\tau), \tag{14}$$

constituem para $\tau \neq 0$ uma solução do sistema linear de Carathéodory, dependente dos parâmetros $\vec{\mu}_1$ e τ,

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} H_j^i(t,\vec{\mu}_1,\tau)y^j + H_{n+k}^i(t,\vec{\mu}_1,\tau), \; i=1,\ldots,n, \tag{15}$$

satisfazendo a condição inicial

$$\psi^i(t_0,\vec{\mu}_1,\tau) = \frac{\phi^i(t_0,\vec{\mu}_2)-\phi^i(t_0,\vec{\mu}_1)}{\tau} = \frac{x_0^i - x_0^i}{\tau} = 0, \; i=1,\ldots,n.$$

Observemos que as funções $\psi^i(t,\vec{\mu}_1,\tau)$, $i=1,\ldots,n$, não estão definidas para $\tau = 0$; entretanto, os segundos membros de (15) estão definidos em $r_1 < t < r_2$, $|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}^*| < \rho$ e $|\tau| < \rho$, inclusive para $\tau = 0$. Como (15) é um sistema linear de Carathéodory, possui em virtude do Teorema 8.1 uma solução

$$y^i = \chi^i(t,\vec{\mu}_1,\tau), \; i=1,\ldots,n, \tag{16}$$

satisfazendo a condição inicial

$$\chi^i(t_0,\vec{\mu}_1,\tau) = 0, \; i=1,\ldots,n,$$

solução essa definida para $r_1 < t < r_2$, $|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}^*| < \rho$ e $|\tau| < \rho$. Ainda mais, decorre da unicidade da solução (Teorema 5.1), que

$$\psi^i(t,\vec{\mu}_1,\tau) = \chi^i(t,\vec{\mu}_1,\tau), \; i=1,\ldots,n,$$

em $r_1 < t < r_2$, $|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}^*| < \rho$, $|\tau| < \rho$ e $\tau \neq 0$.

quase sempre em $m_1(\vec{\mu}) < t < m_2(\vec{\mu})$. *Além disso, subsistem as igualdades*

$$\frac{\partial^2\phi^i(t,\vec{\mu})}{\partial t\partial\mu^k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}),\vec{\mu})}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial\phi^j(t,\vec{\mu})}{\partial\mu^k} +$$

$$+ \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}),\vec{\mu})}{\partial\mu^k}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,\ell, \end{matrix} \tag{17}$$

quase sempre em $m_1(\vec{\mu}) < t < m_2(\vec{\mu})$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Consideremos o conjunto

$$\hat{\Pi} = \{(t,\vec{x},\vec{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+n+\ell}:\ r_1<t<r_2, |\vec{x}-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}^*)|<\bar{a} \text{ e } |\vec{\mu}-\vec{\mu}^*|<2\rho\},$$

introduzido no início da secção, e tomemos $\vec{\mu}_1$ tal que $|\vec{\mu}_1-\vec{\mu}^*| < \rho$.

Por um lado, a partir do Teorema 1, podemos afirmar que

$$\frac{\partial\phi^i(t,\vec{\mu}_1)}{\partial\mu^k} = \chi^i(t,\vec{\mu}_1,0),\ i=1,\dots,n,$$

onde k é um inteiro tal que $1\le k\le\ell$ e $y^i = \chi^i(t,\vec{\mu}_1,\tau)$, $i=1,\dots,n$, é a solução do sistema linear de Carathéodory:

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} H^i_j(t,\vec{\mu}_1,\tau)y^j + H^i_{n+k}(t,\vec{\mu}_1,\tau),\ i=1,\dots,n,$$

satisfazendo a condição inicial

$$\chi^i(t_0,\vec{\mu}_1,\tau) = 0,\ i=1,\dots,n,$$

solução essa definida para $r_1<t<r_2$, $|\vec{\mu}_1-\vec{\mu}^*|<\rho$ e $|\tau|<\rho$. Assim sendo, existem as derivadas $\frac{\partial^2\phi^i(t,\vec{\mu}_1)}{\partial t\partial\mu^k}$, $i=1,\ldots,n$, quase sempre em $r_1 < t < r_2$ e subsistem as igualdades

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi^i(t,\vec{\mu}_1)}{\partial\mu^k}\right) = \sum_{j=1}^{n} H^i_j(t,\vec{\mu}_1,0)\,\frac{\partial\phi^j(t,\vec{\mu}_1)}{\partial\mu^k} + H^i_{n+k}(t,\vec{\mu}_1,0),$$

$$i=1,\ldots,n, \qquad (18)$$

quase sempre em $r_1 < t < r_2$. Ainda mais,

$$H^i_j(t,\vec{\mu}_1,\tau) = \tilde{h}^i_j(t,\vec{\mu}_1,\vec{\mu}_2) = h^i_j(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2),$$

$$j=1,\ldots,n+\ell,$$

$$i=1,\ldots,n,$$

onde $(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)$ e $(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2)$ são pontos de $\bar{\Pi}$ e $\vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_1 + \tau\vec{e}_k$.

Por outro lado, por definição dada no Lema 1, tem-se que para $r_1 < t < r_2$, $|\vec{\mu}_1-\vec{\mu}^*| < 2\rho$ e $|\vec{\mu}_2-\vec{\mu}^*| < 2\rho$,

$$h^i_j(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2) = \int_0^1 \frac{\partial f^i(t,\vec{z}(s),\vec{\mu}_2)}{\partial x^j}ds,$$

$$j=1,\ldots,n,$$

$$i=1,\ldots,n,$$

e

$$h^i_{n+k}(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2),\vec{\mu}_2) = \int_0^1 \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{w}(s))}{\partial\mu^k}ds,$$

$$i=1,\ldots,n,$$

onde $\vec{z}(s) = \vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1)+s[\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2)-\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1)]$, e $\vec{w}(s) = \vec{\mu}_1+s[\vec{\mu}_2-\vec{\mu}_1]$, com $0 < s < 1$.

Consideremos $\tau = 0$. Então,

$$\vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_1 + \tau\vec{e}_k = \vec{\mu}_1,$$

$$\vec{w}(s) = \vec{\mu}_1,$$

$$\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_2) = \vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1+\tau\vec{e}_k) = \vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1)$$

e

$$\vec{z}(s) = \vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1).$$

Ainda mais

$$h^i_j(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1) = \int_0^1 \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)}{\partial x^j} ds =$$

$$= \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)}{\partial x^j}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{array}$$

e

$$h^i_{n+k}(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1) = \int_0^1 \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)}{\partial \mu^k} ds =$$

$$= \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)}{\partial \mu^k}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Resulta então que

$$H^i_j(t,\vec{\mu}_1,0) = \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)}{\partial x^j}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n, \end{array} \tag{19}$$

e que

$$H^i_{n+k}(t,\vec{\mu}_1,0) = \frac{\partial f^i(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}_1),\vec{\mu}_1)}{\partial \mu^k}, \quad i=1,\ldots,n. \qquad (20)$$

Substituindo (19) e (20) em (18), obtemos imediatamente que além da já estabelecida existência das derivadas $\frac{\partial^2 \phi^i(t,\vec{\mu}_1)}{\partial t \partial \mu^k}$, $i=1,\ldots,n$, quase sempre em $r_1 < t < r_2$, as igualdades (17) resultam verificadas em $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1$. Decorre daí, a veracidade do enunciado do Teorema 2.

16 - OBSERVAÇÕES FINAIS

Os pontos centrais deste Capítulo foram relativos a dependência contínua da solução em relação a parâmetros (Teorema 14.1), e a diferenciabilidade da solução em relação a parâmetros (Teorema 15.1 e Teorema 15.2).

A demonstração do Teorema 14.1, foi elaborada seguindo uma linha de considerações e raciocínios bastante semelhantes àqueles seguidos por Pontriaguine [4] para demonstrar a dependência contínua da solução elementar em relação a parâmetros (Teorema 2.3). Já no que diz respeito a questão da diferenciabilidade mediante a introdução da hipótese adicional conseguimos de modo análogo, demonstrar teoremas correspondentes às duas primeiras afirmações do Teorema 2.4.

RESUMO

No presente trabalho, apresentamos alguns pontos básicos da teoria de Carathéodory.

Fundamentalmente, podemos destacar três pontos centrais deste trabalho:

1. Introdução das noções de sistemas de Carathéodory e de solução segundo Carathéodory.
2. Questões pertinentes a existência e unicidade de solução segundo Carathéodory de sistemas de Carathéodory.
3. Dependência dessas soluções em relação a parâmetros.

Antes de finalizarmos, gostaríamos de mencionar que resultados mais gerais do que os que aqui foram apresentados, podem ser obtidos. Por exemplo em [1] e [6], o leitor poderá encontrar algumas de tais generalizações.

- 0 -

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] - CARATHÉODORY, C. - Vorlesungen über reelle Funktionen. 3. ed. New York, Chelsea, 1968.

[2] - HOBSON, E.W., The theory of functions of real variable and Fourier's series. 3. ed. Cambridge, Univ. Press, 1927, vol. 1.

[3] - HOBSON, E.W., The theory of functions of real variable and Fourier's series. 2. ed. Cambridge, Univ. Press, 1926, vol. 2.

[4] - PONTRYAGYN, L.S. |Pontriaguine, L.|, Equations différentieldes ordinaires, Moscou, MIR, 1969.

[5] - PONTRYAGYN, L.S., BOLTYANSKII, V.G., GAMKRELIDZE, R.V. & MISHCHENKO, E.F., The mathematical theory of optimal processes. New York, Interscience, 1962.

[6] - REID, W.T., Ordinary differential equations. New York, Wiley, 1971.

[7] - ROYDEN, H.L., Real analysis, 2. ed. London, Macmillan, 1968, reimpr. 1971.

[8] - WILLIAMSON, J.H., Lebesgue integration. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1962.

- □ -