

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO MATEMÁTICO DOS ASPECTOS FÍSICOS DE FENÔME-  
NOS REGULADORES DE POPULAÇÕES DE PLANORBÍDEOS EM RIOS OU CANAIS.

Tese apresentada ao Departamento de Física da  
Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da  
Universidade de São Paulo, para o título de  
"Mestre em Ciências".

*Francisco Antonio Bezerra Coutinho*

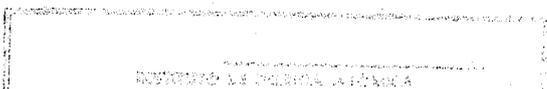
São Paulo - Julho de 1969



Este trabalho de tese foi realizado com o objetivo de preencher parte dos requisitos exigidos pelo Dep. de Física da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para a obtenção do grau de "Mestre em Ciências". Pode parecer estranho portanto que não se trate de Física propriamente dita e muito menos da Física de fronteira sujeita à competição internacional, como são a maior parte das teses apresentadas a este Departamento. Entretanto, acreditamos que possa ser considerado Física Aplicada e assim satisfatório para os fins aos quais se destina.

Para que se tornasse uma leitura mais agradável o trabalho foi dividido em três partes. A primeira parte trata dos aspectos matemáticos que serão usados nas duas restantes e exemplos de sua aplicação a fenômenos físicos. Na segunda parte, é apresentada a explicação de um fenômeno ecológico que ocorre em populações de Planorbídeos os quais serão apresentados no momento oportuno e suas relações com o Homem serão salientadas. Finalmente a terceira parte trata do mecanismo de controle que permite as populações de Planorbídios alcançar o equilíbrio estacionário.

A terceira parte é um caso particular do aspecto mais interessante que os fenômenos biológicos podem ter para Físicos. Realmente, qualquer ser vivo ou agrupamento de seres, pode ser considerado, sob algum ponto de vista como uma máquina que recebe do exterior certas mensagens e ajusta seu comportamento de acordo com estas.



A natureza das mensagens e o mecanismo da resposta dependem muitas vezes de fenômenos físicos simples. O estudo destes, além de ser útil para o entendimento dos fenômenos da vida, pode conter resultados interessantes do ponto de vista prático.

### Agradecimentos

A A.B.Coutinho a quem devo minha formação científica básica, a proposição do problema que é tratado neste trabalho e metade dos meus genes.

Ao Prof.Marcello Damy de Souza Santos pelo estímulo constante e exemplo altamente educativo de luta para o melhoramento do nível tecnológico e científico do Brasil.

Ao Prof.A.F.R. de Toledo Piza pela orientação tanto durante pós-graduação como durante a execução desta tese o que possibilitou a conclusão de ambas.

Aos meus colegas do I.E.A. e especialmente a Achilles A.Suares chefe do grupo do qual faço parte, pelo tempo que tive para os cursos de pós-graduação e para fazer esta tese. Este tempo representava para ele um acréscimo nas suas já enormes responsabilidades, visto que o Fisico experimental Brasileiro está sujeito a ter que executar muitas tarefas fora de sua especialidade.

Ao professor Frota Pessoa e à Prof.Elizabeth Frota Pessoa pela inestimável colaboração no início deste trabalho.

A todos os meus colegas de pós-graduação e particulamente à Alfredo Pio Noronha Rodrigues Galeão e José Fernando Perez pelo espírito de colaboração e amizade com que me distinguiram.

I - Parte

kl - Introdução -

Seja  $\psi_{t,x} dl d\tau$  uma função real de duas variáveis reais  $t$  e  $x$   $0 < t < \infty$   $0 < x < \infty$  e que satisfaz outras condições que serão enunciadas oportunamente.

Para fixar idéias, suponhamos por exemplo, que no retângulo de vértices  $x, x + dl, t$  e  $t + d\tau$  estejam ocorrendo, certos eventos em regime estacionário. Então podemos dizer, que o número médio de eventos por unidade de tempo, que ocorrem no retângulo de vértices  $x, x + dl, t$  e  $t + d\tau$  seja  $N = \psi_{t,x} dl d\tau$ .

Nós estamos interessados, para aplicação posterior, no caso em que  $\psi_{t,x}$  satisfaz a uma equação integro-diferencial de primeira ordem do tipo.

$$\frac{\partial \psi_{t,x}}{\partial t} = -\mu \psi_{t,x} + \epsilon \int_0^l k(x,y) \psi_{t,y} dy$$

onde  $\mu$  e  $\epsilon$  são dois números reais maiores que zero e  $k(x,y) = k(y-x)$

Esta equação, ocorre na Física, apesar de não muito frequentemente.

Tomemos como primeiro exemplo da ocorrência desta equação, um exemplo de Física Experimental. Considere um feixe de raios X, atravessando certo material tomemos como eixo dos  $x$ , a direção do feixe.

Seja então  $\psi_{\lambda,x} d\lambda dx$  o número de fótons que podem ser encontrados entre  $\lambda e \lambda + d\lambda$ .

Portanto o número de raios  $x$  encontráveis entre  $x$  e  $x + dl$  é

$$\psi_{\lambda,x} d\lambda$$

O número de raios  $x$  encontráveis entre  $x + dx$  e  $x+dx+d$  é portanto

$$\psi_{\lambda, x + dx} d\lambda d\lambda$$

A diferença entre estas quantidades

$$\psi_{\lambda, x + dx} d\lambda d\lambda - \psi_{\lambda, x} d\lambda d\lambda$$

é igual ao número de raios  $x$  que foram absorvidos,

$$-\mu \psi_{\lambda, x} d\lambda d\lambda$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de absorção do material e mais o número de raios  $x$ , que tinham comprimento de onda menor e que por espalhamento passaram a ter um comprimento de onda maior.

Se  $k(\lambda, \lambda_0) d\lambda$  é a probabilidade por unidade de comprimento, de um foton tendo comprimento de onda  $\lambda_0$  ser espalhado de modo a ter um comprimento de onda entre  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$ , este acrescimo é

$$\int_0^{\lambda} k(\lambda, \lambda_0) dx \psi_{\lambda_0, x} d\lambda_0 d\lambda$$

Igualando e passando ao limite, nós teremos

$$\frac{\partial \psi_{\lambda, x}}{\partial x} = -\mu \psi_{\lambda, x} + \int_0^{\lambda} k(\lambda, \lambda_0) \psi_{\lambda_0, x} d\lambda_0$$

O Problema é de Fisica Experimental, porque o problema do físico teórico é encontrar  $k(\lambda, \lambda_0)$  a partir de leis mais gerais e não resolver este problema em especial.

Tomemos como segundo exemplo, um problema de Fisica aplicada, abusivamente simplificado.

Suponhamos que no fundo ~~de um~~ <sup>de um</sup> rio, nós tenhamos posto entre os tempos  $t= 0$  e  $t= dt$ , e entre os pontos de abeissa  $l$  e  $l + dl$

$$\varphi = \varphi(l) dl dt$$

pedregulhoes, todos contendo uma mesma quantidade  $m$ , de substancia radioativa, com constante de desintegracao  $K\lambda$ ,  $|K| = T^{-1}$ .

Seja agora  $\psi_{t,x} dl d\tau$  a quantidade de substância radioativa que se pode encontrar entre  $x$  e  $x + dl$  entre os tempos  $t$  e  $t + d\tau$ .

Então num intervalo de tempo  $\partial t$ ,  $\psi_{t,x} dl d\tau$  diminua por dois motivos.

Primeiro, uma quantidade  $K\lambda\psi_{t,x} dl d\tau \partial t$  de substância radioativa se desintegrou.

Segundo, uma quantidade  $a\psi_{t,x} dl d\tau \partial t$  de substância radioativa foi arrastada.

Como os dois acontecimentos, ser arrastado e se desintegrar são independentes, o decrescimento total é

$$-K(\lambda + a - \lambda a)\psi_{t,x} dl d\tau \partial t.$$

Entretanto  $\psi_{t,x} dl d\tau$  também aumenta, em virtude de terem chegado à região  $l$  e  $l + dl$ , substância radioativa vinda de regiões ~~à jusante~~ <sup>momentaneamente</sup> de  $l$ .

Seja então  $k(l) dl$ , a probabilidade de um arrasto começa em  $X$  terminar entre  $X + l$  e  $X + l + dl$ .

Supondo desprezível o tempo gasto em qualquer arrasto, nós temos que o acréscimo em questão é:

$$K(a - \lambda a) \int_0^l \psi_{t,x} \left[ k(x) \right]_{l-x} dl d\tau dx \partial t$$

e portanto

$$\frac{\partial \psi_{t,l}}{\partial t} = -K(\lambda + a - \lambda a)\psi_{t,l} + K(a - \lambda a) \int_0^l \psi_{t,x} k(l-x) dx$$

Esta equação deve ser resolvida, sujeita à condição  $\psi_{0,l} = m(l)$

1-2- Nós queremos mostrar que o problema de achar a função  $\psi_{t,l}$  que satisfaça a equação

$$\frac{\partial \psi_{t,l}}{\partial t} = -\mu \psi_{t,l} + \int_0^l k(l-x) \psi_{t,x} dx \quad \mu, \xi > 0$$

e que para  $t=0$  se reduza a uma função dada.

$$\psi_{0,l} = \varphi(l)$$

é bem posto. Isto significa que o problema admite apenas uma solução.

Precisamos de algumas definições.

Definição I - Seja  $f(x)$  uma função real de variável real  $0 < x < \infty$  e suponha  $f(x)$  seccionalmente continua. Diz-se que  $f(x)$  é de ordem exponencial se existe um número real  $\sigma_0$  tal que exista a integral imprópria.

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma_0 x} f(x) dx.$$

$\sigma_0$  é chamada de alcissa de convergência.

Definição 2- Seja  $s$  uma variável complexa. Se  $f(x)$  é de ordem exponencial então.

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

define uma função  $\bar{f}(s)$ , análitica no semiplano  $T\{s = \sigma + in \mid \sigma > \sigma_0\}$ .

$\bar{f}(s)$  é chamada Transformada de Laplace de  $f(x)$  é escrita

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(s)$$

Suponhamos agora que  $\psi_{t,l}^{(1)}$  e  $\psi_{t,l}^{(2)}$  sejam duas soluções da equação e que satisfaça a condição de contorno i.é

$$\psi_{0,l}^{(1)} = \psi_{0,l}^{(2)} = \varphi(l).$$

Neste caso, consideremos a função  $\Delta_{t,l}$

$$\Delta_{t,l} = \psi_{t,l}^{(1)} - \psi_{t,l}^{(2)}$$

Obviamente

$$\Delta_{0,l} = 0$$

e

$$\frac{\partial \Delta_{t,l}}{\partial t} = -\mu \Delta_{t,l} + \xi \int_0^l k(l-x) \Delta_{t,x} dx$$

Suponhamos agora que  $\psi_{t,l}^{(1)}$  e  $\psi_{t,l}^{(2)}$  são contínuas para todo  $l$  pertencente a  $0 \leq l < \infty$  é de ordem exponencial.

Portanto  $\Delta_{t,l}$  é contínua para todo  $l$  pertencente a  $0 \leq l < \infty$

Logo  $\Delta_{t,\ell}$  admite transformada de Laplace.

$$L\{\Delta_{t,\ell}\} = \bar{\Delta}_{s,\ell} = \int_0^{\infty} e^{-st} \Delta_{t,\ell} dt$$

É fácil ver que, como  $\Delta_{t,\ell}$  é contínua por hipótese para todo  $\ell$  pertencente a  $0 \leq \ell < \infty$

$$L\left\{\frac{\partial \Delta_{t,\ell}}{\partial t}\right\} = s \bar{\Delta}_{s,\ell} - \Delta_{0,\ell} = s \bar{\Delta}_{s,\ell}$$

e portanto  $L\{\Delta_{t,\ell}\}$  obedece à eq. integral.

$$(s + \mu) \bar{\Delta}_{s,\ell} - \xi \int_0^{\ell} K(\ell-x) \bar{\Delta}_{s,x} dx = 0$$

Esta é uma equação integral de Volterra

cujas únicas soluções são  $\bar{\Delta}_{s,\ell} \equiv 0$ , se o "Kernel" for bounded"

(Morse-1953)

E portanto, pelo teorema de Leach  $\Delta_{t,\ell}$  é uma função nula i.é, é diferente de zero apenas em um número finito de pontos para todo intervalo finito  $[t_1, t_2]$

(1) (2)

Logo  $\psi = \psi$  a menos de uma função nula.

Notemos que em todos os exemplos apresentados o "Kernel" é bounded, pela sua própria interpretação.

## II PARTE

## 2.1-Introdução

Esta parte trata de um aspecto da ecologia dos hospedeiros intermediários da doença Schistosomose Mansônica, certos "caranujos" da família dos Planorbidae.

Como esta doença é muito difundida no Brasil (cêrca de 2.000.000 de pessoas infectadas- Pelegrino 1968) julgamos que tenha importância.

A maioria dos autores brasileiros (S.Pessoa 1963) admite que existe no Brasil apenas um gênero entre os planorbídeos hospedeiros da Schistosomose Mansônica, o gênero *Biomphalaria*.

O quadro abaixo, mostra as diversas espécies deste gênero, que são distinguidas principalmente pelo tamanho das "conchas" que os animais podem atingir (S.Pessoa 1963 )

ESPECIE	DIÂMETRO	MÁXIMO (Milim.)
B. Glabatus	30	- 40
B. NIGRICAS	25	- 30
B. STRAMINEUS	10	- 12
B. JANEIRENSES	7	- 9
B. INCERTUS	5	- 6

A.B.Coutinho e colaboradores mostraram (A.B.Coutinho et al-1957) que, pelo menos entre os Planorbídeos de diversas lagoas de Pernambuco, cujas populações estavam em equilíbrio estacionário, não havia diferenças morfológicas ou genéticas que justificassem a classificação dos mesmos em espécies separadas. A única diferença observada entre os Planorbídeos dos diversos "habitats", era apenas que eles alcançavam nos diversos lugares, tamanhos máximos diferentes.

Posteriormente (A.B.Coutinho et al-1961 e 1968) mostraram que a variação nos tamanhos máximos podia ser explicada pela

variação da taxa de infecção por miracídeos do Schistosomose Mansônica nas populações, tratando-se portanto de um efeito puramente ecológico.

A finalidade desta parte do trabalho é mostrar que o parâmetro Diâmetro Máximo da Concha, que é atingido pelos Planorbídeos e fortemente influenciado por outras condições ecológicas, não podendo portanto ser usado como base de uma classificação nem como índice ou prova da existência de diversas espécies de Planorbídeos do gênero *Biomphalaria*.

## 2.2- Aspectos Experimentais.

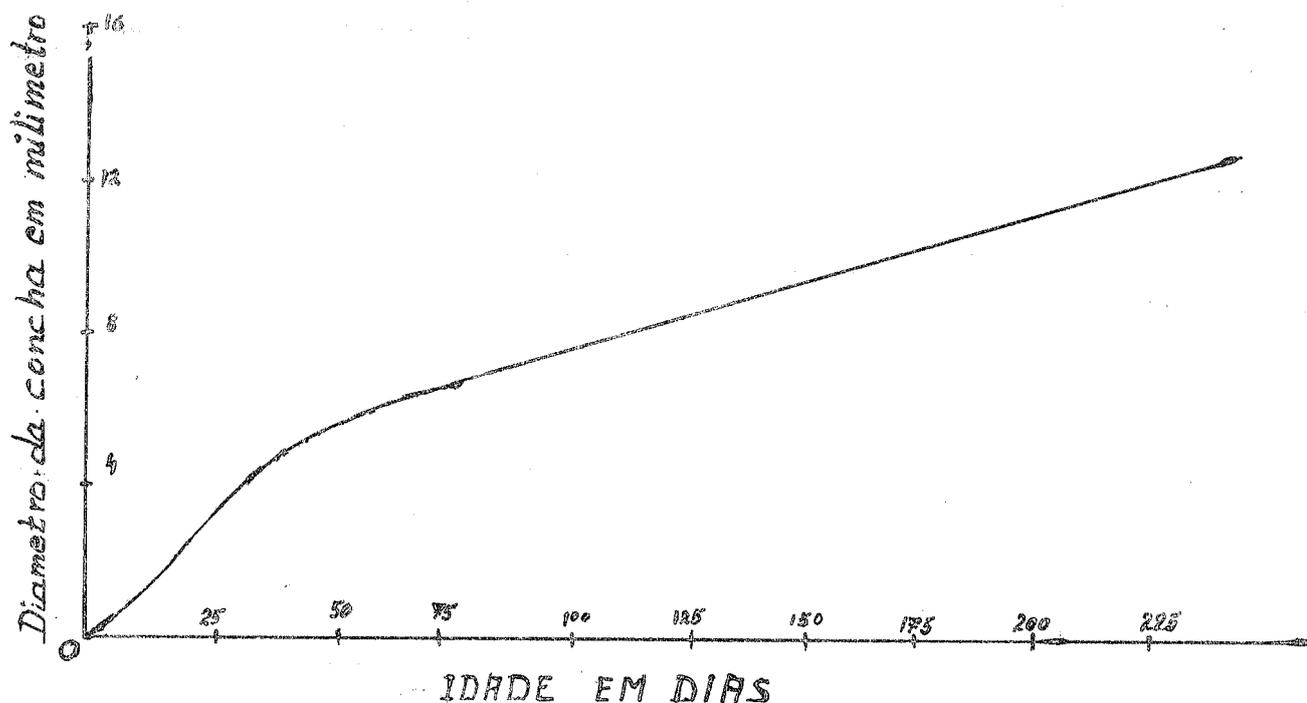
Suponha uma população de Planorbídeos e admitamos que esta população esteja em equilíbrio **estacionário**, i.é, uma população onde o número de indivíduos entre duas idades arbitrárias não varie com o tempo. Pode-se então definir uma grandeza, Diâmetro Máximo Médio ( $D_{max}$ ) como sendo a média aritmética dos maiores diâmetros encontrados em várias amostras da população.

A observação de que nas populações de Planorbídeos que vivem em riachos de descarga apreciavelmente rápidas o  $D_{max}$  cresce à medida que se caminha da fonte para a fôz, constitui o efeito que vamos estudar.

Este fenômeno, foi descoberto por G.Dobovolny em 1952 em riachos do estado de Pernambuco.

## 2.3- Interpretação

Os planorbídeos do gênero *Biomphalaria* têm uma característica não muito incomum no reino animal, a saber crescem enquanto estão vivos.



A figura acima mostra uma curva média de crescimento de uma amostra de 33 exemplares, provenientes de uma única postura de um planorbídeo. (F.S.Barbosa-1961)

Como se pode observar, o diâmetro da "concha" é uma função simples da idade do animal.

O diâmetro máximo médio, de uma população é, portanto uma medida da idade máxima que pode ser atingida a população.

É razoável, portanto, atribuir a existência do efeito a uma deformação da pirâmide etária, de tal modo que a probabilidade de atingir idades grandes aumente à medida que se caminha da fonte para a foz do Riacho. A primeira hipótese que se pode fazer, de que a taxa de infecção aumente, quando se passa da fonte para a foz, não resiste à verificação experimental (A.B.Coutinho et al-1963).

Como veremos abaixo, o arrasto ocasional de animais pela correnteza é suficiente para fazer aparecer uma tal deformação da Pirâmide etária.

Os planorbídeos vivem nas margens dos riachos, agarrados no fundo e vêm periodicamente à superfície para respirar. Nestas vindas à superfície é que o caramujo pode ser ocasionalmente arrastado, apesar da água próxima às margens ser praticamente parada.

## 2.4 - Formulação Analítica.

Consideremos a figura abaixo, onde  $l$  é uma abscissa curvilínea traçada ao longo do canal ou riacho.



Sejam  $M_{t,l}(\Delta t)$  os sobreviventes em um tempo  $t$ , dos organismos nascidos entre  $t=0$  e  $t=\Delta t$  entre os pontos de abscissa,  $l=0$  e  $l$  e que habitam o mesmo trecho do canal.

Consideremos  $M_{t,l} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_{t,l}(\Delta t)}{\Delta t}$ . Então,  $M_{t,l}$  são os sobreviventes em um tempo  $t$  dos organismos nascidos entre  $t=0$  e  $t=\Delta t$  entre os pontos  $l=0$  e  $l$  e que ainda vivem no mesmo trecho de canal.

Consideremos a derivada  $\frac{\partial M_{t,l}}{\partial l} = C_{t,l}$ . Então  $C_{t,l} dl dt$  é o número de organismos que sobrevivem no tempo  $t$  entre os pontos  $l$  e  $l+dl$  dos que nasceram entre  $t$  e  $t+dt$  entre os pontos  $l=0$  e  $l$ .

Em um intervalo de tempo elementar  $dt$ ,  $C_{t,l} dl dt$  diminui por duas causas.

Em primeiro lugar existe uma probabilidade  $\lambda(t,l)$  de adquirir uma doença de morte rápida (as doenças são aqui supostas de morte rápida). Logo em um intervalo elementar  $dt$ ,  $C_{t,l} dl dt$  decresce de

$$-\lambda(t,l) C_{t,l} dl dt \quad \text{onde } [\lambda] = T^{-1}$$

Em segundo lugar existe a probabilidade  $\alpha(t,l)$  do animal ser arrastado. Logo  $C_{t,l} dl dt$  decresce também de

$$-\alpha(t,l) C_{t,l} dl dt \quad \text{onde } [\alpha] = T^{-1}$$

Como ser arrastado e adquirir doença são dois eventos independentes, a probabilidade de acontecer ambas as coisas é  $a(t, l) \lambda(t, l)$ . Portanto o decréscimo total é

$$-K\{\lambda(t, l) + a(t, l) - \lambda(t, l) a(t, l)\} C_{t, l} dl d\tau dt$$

Por outro lado, existem animais que chegam à região entre  $l$  e  $l + dl$ , provenientes de regiões à jusante de  $l$  do canal.

Para levar em conta isto, precisamos de mais algumas definições.

Seja  $P(t, X, l)$  a probabilidade de um animal tendo sido arrastado em um tempo  $t$  de um ponto  $X$  do canal, vir a encalhar em um ponto entre  $X$  e  $X + l$ .

Logo

$\frac{\partial P(t, X, l)}{\partial l} dl$  é a probabilidade do arrasto terminar entre  $X + l$  e  $X + l + dl$ .

Supondo desprezível o tempo gasto durante o arrasto (velocidade muito grande) em relação à vida do animal, o número de animais que se adicionam em um intervalo de tempo  $\partial t$  a  $C_{t, l} dl d\tau$  provenientes de regiões à jusante de  $l$  é

$$\int_0^l C_{t, x} K(a(t, x) - \lambda(t, x) a(t, x)) \left\{ \frac{\partial P(t, x, \xi)}{\partial \xi} \right\}_{\xi=l-x} dl d\tau dx \partial t$$

Suponhamos agora um canal ideal para o qual  $a(t, x) = P(t, X, l) = P(l)$  e suponhamos também  $\lambda(t, x) = \lambda$

Suposto isto, podemos escrever.

$$\frac{\partial (C_{t, l} dl d\tau)}{\partial t} = K \left[ -(\lambda + a - \lambda a) C_{t, l} dl d\tau \right] + K(a - \lambda a) \int_0^l C_{t, x} \left[ \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=l-x} dl dx d\tau \partial t$$

isto é

$$\frac{\partial C_{t, l}}{\partial t} = -K(\lambda + a - \lambda a) C_{t, l} + K(a - \lambda a) \int_0^l C_{t, x} \left[ \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=l-x} dx.$$

que é a equação integro diferencial que passamos a resolver.

Façamos algumas hipóteses

a) Suponha que  $C_{t,x}$  seja tal que  $\int_0^{\infty} e^{-\sigma x} C_{t,x} dx$  exista qualquer que seja  $\sigma > 0$

b) Como  $P(x)$  é tal que  $P(\infty) = 1$  e  $P(0) = 0$  então  $\int_0^{\infty} \frac{dP(x)}{dx} dx = 1$

Logo  $\frac{dP(x)}{dx}$  é de orden exponencial.

Suponha que a abcissa de convergência de  $\frac{dP(x)}{dx}$  seja negativa.

Tomemos agora a transformada de Laplace da equação

$$\int_0^{\infty} e^{-s\ell} \frac{\partial C_{t,\ell}}{\partial t} d\ell = -K(\lambda+a-\lambda a) \int_0^{\infty} e^{-s\ell} C_{t,\ell} d\ell + K(a-\lambda a) \int_0^{\infty} e^{-s\ell} d\ell \int_0^{\ell} C_{t,x}$$

$$\left. \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=l-x} dx$$

Logo usando o Teorema da Convolação (Smith 1966)

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}(t,s) = -K(\lambda+a-\lambda a) \bar{c}(t,s) + K(a-\lambda a) \bar{c}(t,s) \bar{f}(s) \dots (2.4)$$

$$\text{onde } \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{dP(x)}{dx} dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} dP(x).$$

A equação (2.4.1), admite como solução

$$\bar{C}(t,s) = \bar{c}(0,s) \exp\{-K(\lambda+a-\lambda a)t + K(a-\lambda a) \bar{f}(s)t\}$$

onde

$$\bar{c}(0,s) = \int_0^{\infty} e^{-s\ell} C_{0,\ell} d\ell.$$

A solução formal do problema é portanto.

$$C_{t,\ell} = \frac{e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s\ell} \bar{c}_{0,s} \exp\{K(a-\lambda a) \bar{f}(s)t\} ds.$$

onde  $\gamma$  é o ponto de intersecção com o eixo dos  $x$ s, do plano

$T\{x+i\gamma\}$  de uma reta paralela ao eixo imaginário e que fica à direita das singularidades de  $\bar{c}_{0,s} \exp\{K(a-\lambda a) \bar{f}(s)t\}$ .

Nos pontos onde  $\bar{f}(s)$  é singular,  $\exp\{K(a-\lambda a) \bar{f}(s)t\}$ .

tem uma singularidade essencial e portanto, a integral anterior não é em geral fácil de calcular.

Podemos entretanto considerar o comportamento assintótico e isto é suficiente para os nossos propositos.

## 2.5 Comportamento Assintótico.

Usaremos os seguintes resultados.

Se  $g(s) = L\{f(t)\}$  então

$$A) \lim_{s \rightarrow \infty} s g(s) \text{ corresponde a } \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

$$B) \lim_{s \rightarrow 0} s g(s) \text{ corresponde a } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \text{ se } s g(s) \text{ fôr analítica}$$

no eixo imaginário e na metade direita do plano complexo.

Ora,

$$\bar{C}_{t,s} = \bar{C}_{0,s} \exp(-K(\lambda+a-\lambda a)t) \exp(K(a-\lambda a)f(s)t)$$

então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{C}_{t,s} = \exp(-K(\lambda+a-\lambda a)t) \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{C}_{0,s} \exp(K(a-\lambda a)f(s)t)$$

e como quando  $s \rightarrow \infty$   $f(s) \rightarrow 0$  temos

$$= \exp(-K(\lambda+a-\lambda a)t) \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{C}_{0,s} \exp(K(a-\lambda a)tf(s)) =$$

$$= \exp(-K(\lambda+a-\lambda a)t) \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{C}_{0,s} \text{ que corresponde}$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} C_{t,l} = C_{0,l} \exp(-K(\lambda+a-\lambda a)t)$$

por outro lado

$$\lim_{s \rightarrow 0} s C_{t,s} = \exp(-K(\lambda+a-\lambda a)t) \lim_{s \rightarrow 0} s C_{0,s} \exp(K(a-\lambda a)tf(s))$$

e como  $\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = 1$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s C_{0,s} \exp(K(a-\lambda a)f(s)t) = \exp(K(a-\lambda a)t) \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{C}_{0,s}$$

$$\text{logo } \lim_{l \rightarrow \infty} C_{t,l} = \exp(-K\lambda t) \lim_{l \rightarrow \infty} C_{0,l}$$

Suponhamos agora que entre  $t=0$  e  $t=d\tau$  tenham nascidos  $C_{0,l} d\tau$  animais por unidade de comprimento do canal.

Então  $C_{t,l} d\tau dl$  são os que sobrevivem num tempo  $t$  entre os pontos  $l$  e  $l+d\tau$  do canal

$$\alpha(t,l) = \frac{C_{t,l} dl d\tau}{\int_0^l C_{0,l} dl d\tau} \text{ é a probabilidade de um dos animais es-}$$

colhidos ao acaso no intervalo de tempo entre  $t=0$  e  $t=d\tau$  e entre

os pontos  $l=0$  e  $l$  ser encontrado no tempo  $t$  entre  $l$  e  $l + dl$ .

$\alpha(t, l)$  decresce com o tempo  $t$ . Seja então  $\alpha_c$ , um valor de  $\alpha(t, l)$  correspondente a  $t_c(l)$  tão pequeno que consideramos como desprezível a probabilidade de encontrar animais em um tempo  $t > t_c$ .

Como vimos

$$C_{t, \infty} = \lim_{l \rightarrow \infty} C_{t, l} = C_{0, \infty} \exp(-K \lambda) t \text{ logo.}$$

$$t_c(\infty) = \frac{\log \alpha_c}{K \lambda}$$

$$\text{e } C_{t, 0} = \lim_{l \rightarrow 0} C_{t, l} = C_{0, 0} \exp -K(\lambda + a - \lambda a) t.$$

$$\text{logo } t_c(0) = \frac{-\log \alpha_c}{K(\lambda + a - \lambda a)}$$

Como vemos  $t_c(0) < t_c(\infty)$  e portanto na foz os animais nascidos entre  $t=0$  e  $t=dt$  têm a oportunidade de alcançar tamanhos de concha maiores.

2-6- Exemplo.

Suponhamos que  $P(x) = 1 - e^{-\rho x}$ . Notemos que  $P(0) = 0$  e  $P(\infty) = 1$

Derivando vem.

$$\frac{dP(x)}{dx} = \rho e^{-\rho x}.$$

Suponhamos, também que  $C_{0, l} = C$  independente de  $l$ .

Portanto

$$a) \bar{C}_{0, s} = \frac{C}{s}$$

$$b) f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{dP}{dx} dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \rho e^{-\rho x} dx = \frac{\rho}{\rho+s} \int_0^{\infty} e^{-(\rho+s)x} dx = \frac{\rho}{\rho+s} \left[ -\frac{1}{\rho+s} e^{-(\rho+s)x} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{\rho}{\rho+s}$$

Temos então

$$\bar{C}_{t, s} = \frac{C}{s} \exp(-K(\lambda + a - \lambda a)t) \exp K(a - \lambda a)t \frac{\rho}{\rho+s}.$$

chamando

$$K(a - \lambda a)t = \rho = Z.$$

$$\bar{C}_{t, s} = C \frac{\exp(-K(\lambda + a - \lambda a)t) \exp \frac{Z}{\rho+s}}{s}$$

As manipulações formais que seguem, serão justificadas depois pelo resultado.

Desenvolvendo em série, temos

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{t,s} &= C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ \frac{1 + \frac{z}{\rho+s} + \frac{1}{2!} \frac{z^2}{(\rho+s)^2} + \dots}{s} \right\} = \\
&= C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{z}{s(\rho+s)} + \frac{1}{2!} \frac{z^2}{s(\rho+s)^2} + \dots \right\} = \\
&= C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{1}{s(\rho+s)^n} \right\}
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula da Inversão

$$C_{t,\rho} = C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s\lambda} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{1}{s(\rho+s)^n} \right] ds.$$

onde  $\gamma$  fica à direita das singularidades de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{1}{s(\rho+s)^n}$$

Integrando termo a termo

$$C_{t,\rho} = C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s\lambda} \frac{z^n}{n!} \frac{1}{s(\rho+s)^n} ds.$$

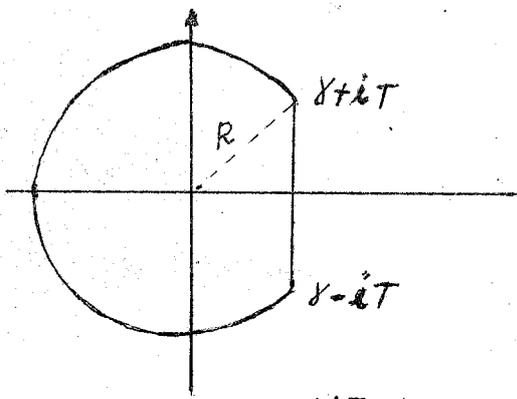
e portanto

$$C_{t,\rho} = C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{s\lambda}}{s} ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{s\lambda}}{s(\rho+s)^n} ds \right\} \dots (2.6.1)$$

Nós devemos então calcular as duas integrais da formula anterior, que são da forma

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s\lambda} f(s) ds.$$

Estas integrais são calculadas, considerando o contorno ilustrado na figura abaixo.



Ora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{s\ell} f(s) ds = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{s\ell} f(s) ds \text{ por definição}$$

Como, da figura  $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{s\ell} f(s) ds &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{s\ell} f(s) ds = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{s\ell} f(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{s\ell} f(s) ds \end{aligned}$$

onde  $C$  é o contorno completo e  $\Gamma$  é o arco de círculo, na figura anterior.

É possível mostrar, que o Teorema que segue é verdadeiro (Apostol 1960).

Teorema. - Se existem constantes  $M > 0$ ,  $k > 0$  e  $b > 0$  tais que em  $\Gamma$  (onde  $s = R e^{i\theta}$ ),

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k} \text{ para todo } R > b \text{ então a integral}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{s\ell} f(s) ds = 0$$

Logo nós podemos escrever.

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{s\ell} f(s) ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C e^{s\ell} f(s) ds.$$

e aplicando o Teorema de Cauchy.

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sl} f(s) ds = 2\pi i \sum (\text{Residuos de } e^{sl} f(s) \text{ nos polos de } f(s))$$

Voltando para o nosso caso nos vemos que temos que calcular.

$$a) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{sl}}{s} ds$$

$$b) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{sl}}{s(\rho+s)^n} ds$$

da formula (2.6.1).

a) A primeira integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{sl}}{s} ds = \text{Res} \left( \frac{e^{sl}}{s} \text{ em } s=0 \right)$$

$$\text{Como } e^{sl} = 1 + sl + \frac{(sl)^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{e^{sl}}{s} = \frac{1}{s} + l + \frac{sl^2}{2!} + \dots$$

$$\text{e portanto } \text{Res} \left| \frac{e^{sl}}{s} \text{ em } s=0 \right| = 1$$

logo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{sl}}{s} ds = 1 \dots \dots \dots (2.6.2)$$

b) A segunda integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} ds = \left[ \text{Res} \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} \text{ em } s=0 \right] + \text{Res} \left[ \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} \text{ em } s=-\rho \right]$$

$$b-1) \text{ Para calcular } \text{Res} \left[ \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} \text{ em } s=0 \right] \text{ notemos que } \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n}$$

tem um polo simples em  $s=0$

Logo.

$$\text{Res} \left[ \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} \text{ em } s=0 \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} = \frac{1}{\rho^n} \dots \dots (2.6.4)$$

b.2) - Para calcular  $\text{Res} \left[ \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} \text{ em } s=-\rho \right]$  notemos que,

$\frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n}$  tem polo de ordem  $n$  em  $s = -\rho$ .

Logo

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[ \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} \text{ em } s=-\rho \right] &= \lim_{s \rightarrow -\rho} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[ (s+\rho)^n \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -\rho} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[ \frac{e^{sl}}{s} \right] \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{e^{sl}}{s} \right) = - \left( \frac{1}{s} + l \right) \frac{e^{sl}}{s}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{e^{sl}}{s} \right) = \left( \frac{2}{s^2} - \frac{2l}{s} + l^2 \right) \frac{e^{sl}}{s}$$

$$\frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{e^{sl}}{s} \right) = \left( -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{s^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1!} \frac{l}{s^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2!} \frac{l^2}{s} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} l^3 \right) \frac{e^{sl}}{s}$$

$$\frac{d^4}{ds^4} \left( \frac{e^{sl}}{s} \right) = \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{s^4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1!} \frac{l}{s^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2!} \frac{l^2}{s^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} \frac{l^3}{s} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4!} l^4 \right) \frac{e^{sl}}{s}$$

$$\frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{e^{sl}}{s} \right) = \left( \frac{l^3}{s} + \frac{4!}{4!} l^4 \right) \frac{e^{sl}}{s}$$

$$\frac{d^n}{ds^n} \left( \frac{e^{sl}}{s} \right) = e^{sl} \sum_{q=0}^{n-1} (-)^{n+q} \frac{1}{s^{n-q+1}} \frac{n!}{q!} l^q$$

Portanto

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left( \frac{e^{sl}}{s} \right) = e^{sl} \sum_{q=0}^{n-1} (-)^{n-1+q} \frac{(n-1)!}{n-q} \frac{1}{q!} l^q$$

$$\lim_{s \rightarrow -\rho} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left( \frac{e^{sl}}{s} \right) = e^{-\rho l} \left\{ \lim_{s \rightarrow -\rho} \frac{1}{s^n} \sum_{q=0}^{n-1} (-)^{n-1+q} \right.$$

$$\left. \frac{(sl)^q}{q!} \right\} = e^{-\rho l} \left\{ \frac{1}{\rho^n} (-)^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} (-)^q (-)^q \frac{(\rho l)^q}{q!} \right\}$$

e portanto

$$\text{Res} \left[ \frac{e^{sl}}{s(s+\rho)^n} \text{ em } s = -\rho \right] = \frac{e^{-\rho l}}{\rho^n} \left\{ 1 + \frac{\rho l}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \dots (2.6.5)$$

Substituindo (2.6.4) e (2.6.5) em (2.6.3)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{s\ell}}{s(s+\rho)^n} ds = \frac{1}{\rho^n} \left[ 1 - e^{-\rho\ell} \left\{ 1 + \frac{\rho\ell}{1!} + \dots + \frac{(\rho\ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \right] \dots$$

(2.6.6)

E substituindo (2.6.2) e (2.6.6) em 2.6.1

$$C_{t,\ell} = C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^n} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho\ell} \left( 1 + \frac{\rho\ell}{1!} + \dots + \frac{(\rho\ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\}$$

Notemos, que a solução encontrada.

$$C_{t,\ell} = C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^n} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho\ell} \left( 1 + \frac{\rho\ell}{1!} + \dots + \frac{(\rho\ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\}$$

tem os seguintes casos limites.

Quando  $\ell=0$

$$C_{t,0} = C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t}$$

Quando  $\ell=\infty$

$$\begin{aligned} C_{t,\infty} &= C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^n} \frac{1}{n!} \right\} = \\ &= C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ e^{z/\rho} \right\} = \\ &= C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} e^{K(a-\lambda a)t} \frac{\rho}{\rho} = C e^{-K\lambda t}. \end{aligned}$$

de acôrdo com nossos resultados anteriores.

## 2.7.- Verificação do Exemplo.

Consideremos a solução encontrada.

$$C_{t,\ell} = C e^{-K(\lambda+a-\lambda a)t} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^n} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho\ell} \left( 1 + \frac{\rho\ell}{1!} + \dots + \frac{(\rho\ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\}$$

Temos que verificar

a) Que  $C_{t,\ell}$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial C_{t,\ell}}{\partial t} = -K(\lambda+a-\lambda a) C_{t,\ell} + K(a-\lambda a) \int_0^{\ell} C_{t,\ell} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\ell} dx$$

b) Que  $C_{t,\ell}$  se reduz para  $t=0$  à função  $C_{0,\ell}$ . Isto é temos que verificar se  $C_{t,\ell}$  satisfaz à condição de contorno.  $C_{t,\ell}$  satisfaz realmente a condição de contorno pois para  $t=0$ , como  $Z=K(a-\lambda a)t_0$

$$C_{0,l} = C.$$

A série  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho n} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho l} \left( 1 + \frac{(\rho l)}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right]$

para cada  $l > 0$  é uma série de potências de  $t$ , visto que  $Z = K(a - \lambda a)t\rho$ . Como  $\left[ 1 - e^{-\rho l} \left( 1 + \frac{(\rho l)}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right]$  é menor que 1 para todo  $l > 0$  e todo  $n$ , a série é convergente para todo  $t > 0$ . Portanto a série de potências em questão pode ser derivada termo a termo.

Por outro lado, para cada  $t > 0$ , como

$$\left[ 1 - e^{-\rho l} \left( 1 + \frac{\rho l}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right]$$

é menor que 1 nós podemos aplicar o "Weirtrass M test" para mostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho n} \frac{1}{n!}$

$\left[ 1 - e^{-\rho l} \left( 1 + \frac{\rho l}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right]$  é uniformemente convergente para todo  $l > 0$  e portanto pode ser integrada termo a termo.

Substituindo  $C_{t,l}$  na equação e derivando  $\frac{\partial C_{t,l}}{\partial t}$  termo a termo nós chegamos facilmente à seguinte identidade.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n b^n t^{n-1}}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho l} \left( 1 + \frac{\rho l}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] =$$

$$= b \int_0^l \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho x} \left( 1 + \frac{\rho x}{1!} + \dots + \frac{(\rho x)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\} e^{-\rho(l-x)} dx$$

onde  $b = K(a - \lambda a)$

Para mostrar que ela é verdadeira, basta integrar o segundo membro termo a termo. Nós temos então

$$b \int_0^l \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho x} \left( 1 + \frac{(\rho x)}{1!} + \dots + \frac{(\rho x)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\} e^{-\rho(l-x)} dx.$$

$$= b \int_0^l e^{-\rho l} e^{\rho x} dx + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \int_0^l e^{-\rho l} e^{\rho x} dx$$

$$= b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \int_0^l e^{-\rho x} e^{\rho x} \left[ 1 + \frac{\rho x}{1!} + \dots + \frac{(\rho x)^{n-1}}{(n-1)!} \right] e^{-\rho l} dx.$$

Mas

$$b \int_0^l e^{-\rho l} e^{\rho x} dx = b e^{-\rho l} \left[ e^{\rho l} - 1 \right]$$

$$b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \int_0^l e^{-\rho l} e^{\rho x} dx = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} e^{-\rho l} \left[ e^{\rho l} - 1 \right] =$$

$$= b e^{-\rho l} \left[ e^{\rho l} - 1 \right] \left[ e^{bt} - 1 \right].$$

$$-b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \int_0^l e^{-\rho x} e^{\rho x} \left( 1 + \frac{\rho x}{1!} + \dots + \frac{(\rho x)^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{-\rho l} \rho dx =$$

$$= -b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} e^{-\rho l} \left( \rho l + \frac{\rho l^2}{2!} + \dots + \frac{(\rho l)^n}{n!} \right)$$

e portanto, o segundo membro fica.

$$b e^{-\rho l} (e^{\rho l} - 1) + b e^{-\rho l} (e^{\rho l} - 1) (e^{bt} - 1) - b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} e^{-\rho l} \left( \rho l + \dots + \frac{(\rho l)^n}{n!} \right) =$$

$$= b e^{-\rho l} (e^{\rho l} - 1) e^{bt} - b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} e^{-\rho l} \left( \rho l + \dots + \frac{(\rho l)^n}{n!} \right) =$$

$$= b e^{bt} - b e^{-\rho l} e^{bt} - b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} e^{-\rho l} \left( \rho l + \dots + \frac{(\rho l)^n}{n!} \right) =$$

$$= b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} - b e^{-\rho l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} - b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} e^{-\rho l} \left( \rho l + \dots + \frac{(\rho l)^n}{n!} \right) =$$

$$= b \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} - e^{-\rho l} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} e^{-\rho l} \left( \rho l + \dots + \frac{(\rho l)^n}{n!} \right) \right\}$$

$$= b \left\{ 1 - e^{-\rho l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \left( 1 - e^{-\rho l} - e^{-\rho l} \left( \rho l + \dots + \frac{(\rho l)^n}{n!} \right) \right) \right\} =$$

$$= b \left\{ 1 - e^{-\rho l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \left( 1 - e^{-\rho l} \left( 1 + \frac{\rho l}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^n}{n!} \right) \right) \right\} =$$

$$= b \left\{ 1 - e^{-\rho l} (1 - e^{-\rho l}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^{n-1}}{(n-1)!} \left[ 1 - e^{-\rho l} \left( 1 + \frac{\rho l}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

$$= b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^{n-1}}{(n-1)!} \left[ 1 - e^{-\rho l} \left( 1 + \frac{\rho l}{1!} + \dots + \frac{(\rho l)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\}$$

que é igual ao primeiro membro.

### III - Parte

#### 3.1 - Introdução.

Na segunda parte, nós deixamos de tratar um aspecto importante do problema, de saber como a população atinge o equilíbrio estacionário.

Para ver claramente a natureza dos problemas envolvidos quando se tenta considerar os mecanismos pelos quais as populações atingem o equilíbrio estacionário, consideraremos primeiramente um problema mais simples.

Suponha um certo "habitat" onde vive uma certa população. Suponha que no instante  $t=0$ , existam  $N_0$  indivíduos e que a população não esteja em equilíbrio estacionário. Seja portanto  $N_t$  o número de indivíduos no tempo  $t$ .

Suponha também, que as condições climáticas, a quantidade de alimento produzida por unidade de tempo, o número de inimigos naturais e qualquer outro fator externo, permaneçam constantes ao longo do tempo.

Seja  $g$  o "birth rate per head" e  $K\lambda$  a mortalidade por unidade de tempo e por cabeça, Portanto, em um intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + dt$ , nascem  $g N_t dt$  indivíduos e morrem  $K\lambda N_t dt$  indivíduos.

É fácil ver que se  $g$  e  $K\lambda$  são admitidos constantes a população não alcança o equilíbrio estacionário, excepto ~~em~~ <sup>quando</sup>  ~~$g=K\lambda$~~  caso em que a população já estaria em equilíbrio estacionário no tempo  $t=0$ .

$$dN_t = gN_t dt - K\lambda N_t dt \dots\dots\dots (1)$$

De fato

$$N_t = N_0 e^{(g-K\lambda)t}$$

Se  $g > K\lambda$   $N_t$  cresce exponencialmente.

Se  $g < K\lambda$   $N_t$  decresce exponencialmente.

Como o meio externo foi admitido constante, isto significa que nos não podemos admitir que  $K\lambda$  e  $g$  seja<sup>vix</sup> simultaneamente independentes de  $N$ . Isto é nós temos que incluir uma não linearidade na equação (1).

Posto desta forma, (1) podemos imaginar vários mecanismos de controle capazes de conduzir a população ao equilíbrio estacionário, todos teoricamente possíveis em princípio.

i) A população alcança o equilíbrio estacionário porque o "Birth rate per head"  $g$ , diminui quando  $N_t$  aumenta, enquanto  $K\lambda$  permanece constante. Para simplificar a linguagem nós diremos simplesmente que a população alcança o equilíbrio por ajuste de  $g$ .

ii) A população alcança o equilíbrio estacionário, porque a mortalidade por unidade de tempo e por cabeça, aumenta quando  $N_t$  aumenta enquanto  $g$  permanece constante. Para simplificar, a população alcança o equilíbrio estacionário por ajuste de  $K\lambda$ .

iii) A população alcança o equilíbrio estacionário, porque quando  $N_t$  aumenta, tanto  $g$  diminui quanto  $K\lambda$  aumenta.

Diremos que a população alcança o equilíbrio por ajuste de ambos  $K\lambda$  e  $g$ .

Naturalmente, o mecanismo que acontece realmente, dificilmente pode ser descoberto por reflexão pura e deve portanto em cada caso ser submetido a experimentação. (Alguns exemplos interessantes de experimentação em ratos pode<sup>vix</sup> ser visto em BSCS - 1967)

O mais antigo mecanismo de controle proposto (Verlhust 1835 e Volterra 1920) é supor que:

i) A população não tem meios de controlar  $g$ .

ii) Os indivíduos desta população entram em competição entre si e apenas os mais aptos, conseguem sobreviver. Desta competição

resulta, que  $K\lambda$  aumenta quando  $N_t$  aumenta e isto produz a não linearidade desejada.

Notemos de passagem que dizer que os indivíduos competem entre si, envolve um número muito grande de mecanismos possíveis. Por exemplo

- ii-a) Luta entre indivíduos
- ii-b) Corrida em busca de alimento de modo que só os mais ágeis ou fortes são capazes de se alimentar.
- ii-c) Ambas as alternativas.

Qualquer que seja o mecanismo particular, é admitido que  $\lambda = \lambda(N)$  isto é, a mortalidade é função do número de indivíduos e podemos então escrever.

$$\frac{dN_t}{dt} = r N_t - K\lambda(N_t)N_t$$

Desenvolvendo

$$K\lambda(N_t) = K\lambda_0 + K \left. \frac{d\lambda}{dN} \right|_{N=0} N + \frac{1}{2} K \left. \frac{d^2\lambda}{dN^2} \right|_{N=0} N^2 + \dots$$

e supondo que

$$K\lambda = K\lambda_0 + K\lambda_1 N$$

é aproximação suficiente, temos,

$$\frac{dN_t}{dt} = (r - K\lambda_0)N - K\lambda_1 N^2 = \epsilon N - \gamma N^2$$

Cuja solução é:

$$N_t = \frac{\frac{\epsilon}{\gamma}}{\frac{\epsilon}{\gamma} \left( \frac{1}{N_0} - \frac{\gamma}{\epsilon} \right) e^{-\epsilon t} + 1}$$

Entretanto, esta solução padece de alguns defeitos.

i) Depende de dois parâmetros que devem ser determinados experimentalmente  $\epsilon$  e  $\gamma$ , e que não tem relação clara nem com a espécie em consideração nem com o habitat onde a espécie vive.

ii) Descreve a população apenas segundo o aspecto de número total de indivíduos. Isto resulta em perda de informação, pois por exemplo, se se considerasse além do número total de animais, sua distribuição pelas idades, isto viria a elucidar o processo competitivo envolvido.

iii) Experimentos modernos, mostram que, o mecanismo de controle depende da espécie considerada e do habitat e portanto a solução acima não é satisfatória (BSCS- 1967)

### 3.2- Relação entre o Problema da Parte II e o atual.

O problema resolvido na Parte II foi calcular o número de sobreviventes  $C_{t,l} dl d\tau$  no tempo  $t$  entre  $l$  e  $l + dl$  dos planorbídeos nascidos entre  $t=0$  e  $t=d\tau$  entre os pontos  $l$  e  $l + dl$  do canal,

$$\int_0^l C_{0,l} d\tau dl.$$

O problema que nós queremos resolver entretanto é o problema de encontrar na população de Planorbídeos do canal, em equilíbrio estacionário o número de indivíduos com idade entre  $T$  e  $T + dT$  e entre os pontos  $l$  e  $l + dl$ .

Seja então  $\phi(l, T) dT dl$ , o número de indivíduos com idade entre  $T$  e  $T + dT$  que existem entre  $l$  e  $l + dl$  em um canal, de uma população de planorbídeos em equilíbrio estacionário.

Nós mostraremos na segunda parte, que se nós conhecermos o número de organismos que nascem por unidade de tempo e por unidade de comprimento do canal em cada ponto do canal,  $\phi_{0,l}$  então nós podemos calcular  $\phi(T, l)$ .

Se nós supusermos que  $C_{0,l}$  é o número de animais que nascem por unidade de tempo, por unidade de comprimento do canal quando a população está em equilíbrio estacionário, nós temos obviamente

$$C_{t=T,l} dl (d\tau = dT) = \phi(T, l) dT dl.$$

A igualdade anterior, implica em que, a distribuição de idade ao longo do canal, obedece à equação.

$$\frac{\partial \phi(T, \ell)}{\partial T} = -K(\lambda + a - \lambda a) \phi(T, \ell) + K(a - \lambda a) \int_0^{\ell} \phi(T, x) \left[ \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi = \ell - x} dx$$

Com a condição de contorno

$$\phi(0, \ell) = C_{0, \ell} \quad (\text{a ser dado}).$$

Nós sabemos da discussão da primeira parte, que dado um  $C_{0, \ell}$  nós podemos achar uma única  $\phi(T, \ell)$ . Nosso problema portanto é achar qual o  $C_{0, \ell}$  que produz o equilíbrio estacionário.

Entretanto, a equação integro diferencial acima, foi deduzida supondo  $k\lambda$  e a constantes e é uma equação linear. Isto nos traz problemas, como veremos a seguir.

Realmente, um pouco de reflexão, nos mostra que o número de animais que nascem entre  $\ell$  e  $\ell + d\ell$  do canal deve estar relacionado com o número de animais que existem entre  $\ell$  e  $\ell + d\ell$  e que chamaremos  $N(\ell)$  por meio de

$$\phi(0, \ell) d\ell = gN(\ell) d\ell \quad \text{onde } g \text{ é o "birth rate per head" definido anteriormente.}$$

Entretanto  $N(\ell) = \int_0^{\infty} \phi(T, \ell) dT$  e portanto, integrando a equação integro-diferencial.

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \phi(T, \ell)}{\partial T} dT = -K(\lambda + a - \lambda a) \int_0^{\infty} \phi(T, \ell) dT + K(a - \lambda a) \int_0^{\ell} \int_0^{\infty} \phi(T, x) dT \left[ \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi = \ell - x} dx$$

e como fisicamente  $\phi(\infty, \ell) = 0$

$$-\phi(0, \ell) = -K(\lambda + a - \lambda a) N(\ell) + K(a - \lambda a) \int_0^{\ell} N(x) \left[ \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi = \ell - x} dx$$

Esta equação, nos diz apenas, que em equilíbrio estacionário, o número de indivíduos que nascem por unidade de tempo entre  $\ell$  e  $\ell + d\ell$  ( $\phi(0, \ell) d\ell$ ) é igual ao número de indivíduos que morrem ou são

arrastados  $(K(\lambda + a - \lambda a) N(\ell) d\ell)$  menos o número de animais que estão entre  $\ell$  e  $\ell + d\ell$  mas que provieram de regiões <sup>montante</sup> a jusante do canal  $(K(a - \lambda a) \int_0^\ell N(x) \left[ \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\ell-x} dx$

Agora, notemos que fazer  $\phi(0, \ell) = \sigma N(\ell)$  conduz a  $-\sigma N(\ell) = -$   
 $= -K(\lambda + a - \lambda a) N(\ell) + \int_0^\ell N(x) \left[ \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\ell-x} K(a - \lambda a) dx$

cuja única solução é  $N(\ell) = 0$ . Isto está de acordo com a nossa discussão anterior, em que concluímos que a população não pode chegar a um equilíbrio estacionário se  $g$  e a mortalidade por unidade de tempo e por cabeça são admitidos constantes.

Para ver isto, suponhamos  $a = 0$ , i.é, em vez de um rio, temos um lago longo onde o arrasto não ocorre.

Nêste caso a nossa ultima equação se reduz a.

$$-\sigma N(\ell) = -K\lambda N(\ell)$$

ou seja ou  $\sigma = K\lambda$  (Trivial) ou  $N(\ell) = 0$  (inadmissível)

Vemos da discussão anterior, que o problema de achar  $\phi(0, \ell)$  não pode ser resolvido sem informação extra. Antes de atacar o problema com a complicação do arrasto, vamos então, em primeiro lugar examinar o mesmo problema em lagoas onde não há arrasto. As informações experimentais extras, serão introduzidas oportunamente. Em virtude da linearidade das nossas equações, nosso "aprcach" não será entretanto "dinâmico".

Talvez seja conveniente notar aqui a semelhança formal que existe entre êste problema e o problema de calcular o limiar de oscilação de um laser e a frequência por um lado e a amplitude por outro. Para calcular a amplitude da radiação, torna-se necessário introduzir não linearidades nas equações. (Nussenzveig 1968)

3.3. - O Mecanismo de Controle Populacional do Biomphalaria Glabata em Lagoas.

O estudo do mecanismo de controle populacional nas populações do Planorbideo, Biomphalaria Globata foi objeto de um trabalho do

autor com A.B.Coutinho (A.B.Coutinho et al- 1968)

Veremos que o mecanismo de controle ali proposto nos permitem solucionar nosso problema, pelo menos em Principio.

Na referência citada acima, nós admitimos a hipótese que segue, por razões experimentais, como ficará claro a seguir.

ii) - A população alcança o equilíbrio estacionário por ajuste de  $K\lambda$  e não de  $g$ .

Admitida esta hipótese, nós precisamos de algumas considerações sobre  $K\lambda$ , que são gerais bastante para se aplicar a qualquer população em equilíbrio estacionário.

Realmente, qualquer população em equilíbrio estacionário, está sujeita a três tipos de mortalidade.

i)- Uma taxa de mortalidade que não depende da idade. Esta taxa de mortalidade é produzida por causas externas. (Por exemplo, Doenças infecciosas de morte rápida, ação letal de inimigos naturais atropelamento por veículos pesados).

ii)- Uma taxa de mortalidade que começa a atuar em idades elevadas e motivadas pelo "envelhecimento" do organismo (Por exemplo, Doenças degenerativas, enfraquecimento das defesas e consequentemente ação letal de doenças que normalmente não seriam mortais)

iii)- Uma taxa de mortalidade por razão de competição por alimentos escassos e que deve ser introduzida como elemento de controle. Notemos que a dependência desta taxa de mortalidade com a idade, só pode ser determinada experimentalmente.

Foi observada experimentalmente nas populações de Planorbidos os seguintes fatos.

i)- As populações tinham uma taxa de natalidade (Birth rate per head) excessiva em relação a capacidade dos seus habitats, havendo uma taxa de mortalidade infantil gigantesca.

ii)- A taxa de mortalidade por causas externas e que não dependia da idade era muito elevada de modo que as idades máximas atingidas não permitiam que atuassem causas de mortalidades devido a

envelhecimento.

Admitiu-se então que a partir de uma certa idade  $T_0$ , pequena, a população só fosse afetada por causas de mortalidade que não dependiam da idade e que o ajuste populacional era feito em idades menores que  $T_0$  por meio de eliminação do excesso de nascimentos.

Estas duas hipóteses, permitem escrever, uma distribuição etária modelística para as populações envolvidas.

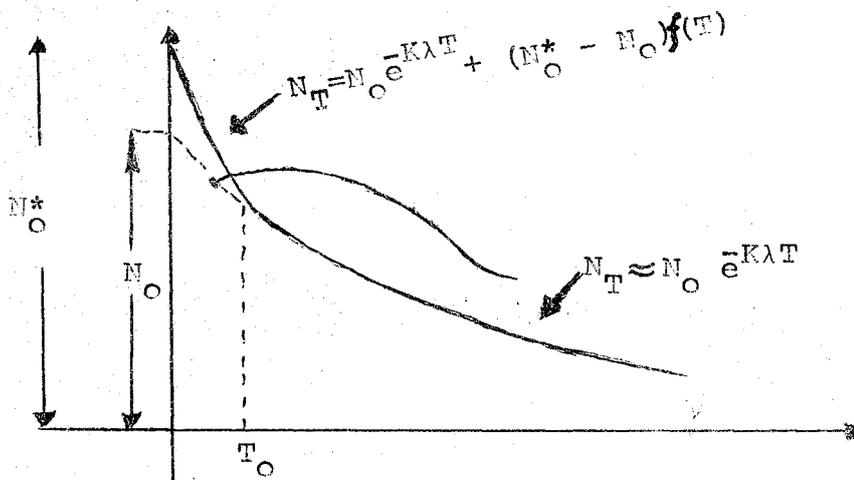
Seja  $N_T dT$  o número de animais com idade entre  $T$  e  $T + dT$  seja  $K \lambda$  a taxa de mortalidade por causas externas que não dependem da idade.

Então podemos escrever.

$$N_T dT = N_0 e^{-K\lambda T} + (N_0^* - N_0) f(T)$$

onde  $f(T)$  é uma função que decresce muito rapidamente de modo que para  $T > T_0$  nos temos  $f(T) \approx 0$

(Vêr gráfico)



O significado de  $N_0$  e  $N_0^*$  é facilmente depreendido do gráfico acima.  $N_0^*$  é o número total de organismos que nascem por unidade de tempo e  $N_0$  é uma extrapolação.

Esta distribuição modelística pôde ser testada muito facilmente, por suas consequências.

Realmente, uma das causas de morte, que não dependem da idade, nas populações de Planorbídeos é a infestação por miracídios da *Schistosomose Mansônica*. É fácil experimentalmente, verificar se um Planorbídeo, está ou não está infectado, i.é, se o Planorbídeo está ou não está em vias de morrer, visto que a infecção é absolutamente letal para eles.

Seja então  $p$ , a percentagem de caramujos infectados em um lago e  $m$  a percentagem de ocorrência de outras causas de morte que não dependem da idade. Portanto nós podemos escrever.

$$K\lambda = D ( p + m - mp )$$

para  $T > T_0$

ou

$$\frac{N}{N_0} = e^{-D(p + m - mp)T}$$

para  $T > T_0$

$T > T_0$ . Seja então  $\alpha$  um valor tão pequeno desta probabilidade que consideramos desprezível a ocorrência, de animais com idade superior a  $T_c$ .

$$\alpha = e^{-D(p + m - mp)T_c}$$

Logo

$$T_c = \frac{-\log \alpha}{D(p + m - mp)} = \frac{-1}{D(1-m)} \frac{\log \alpha}{p + \frac{m}{1-m}}$$

e portanto, a idade, máxima alcançada em uma lagoa está relacionada com a percentagem de infecção por miracídios da *Schistosomose Mansônica* na mesma lagoa.

Isto foi verificado estar de acordo com a Experiência (A.P.Coutinho et al -1961 e A.P. Coutinho et al- 1968)

Uma vez admitida a distribuição modelística, nós podemos prosseguir e calcular  $N_0$ . Antes porém, nós precisamos de mais algumas considerações.

É fácil deduzir, que em uma população em equilíbrio estacionário, e onde há um excesso de natalidade, todo o alimento produzido no habitat por unidade de tempo, está sendo consumido. Realmente em caso contrário a população crescerá por causa da alta taxa de nascimentos.

Nós veremos agora, que esta condição extra é suficiente para determinar aproximadamente o valor de  $N_0$ .

Seja então  $m(T)$  a massa de um indivíduo médio quando sua idade é  $T$ .

A quantidade da de alimentos, consumida por um indivíduo no tempo  $dt$ , pode ser dividida em duas partes

$$da = k_1 m(T) dt + k_2 dm(T)$$

A primeira parte representa a quantidade da de alimento necessária para manter a massa  $m(T)$  e a segunda parte é a quantidade de de alimento necessária para incrementar a massa do indivíduo de  $dm(T)$ .

A expressão pode ser reescrita

$$\begin{aligned} da &= k_1 m(T) dT + k_2 \frac{dm(T)}{dT} dT = \\ &= k_1 m(T) dT + k_2 \frac{dm(T)}{dT} dt \end{aligned}$$

A quantidade de alimento ingerida por  $N_T dT$ , isto é, todos os animais com idade entre  $T$  e  $T + dT$  é:

$$dA = k_1 N_T dT m(T) dt + k_2 \frac{dm(T)}{dT} N_T dT dt$$

Isto significa que a quantidade de alimentos ingerida por unidade de tempo por esta faixa da população é

$$\frac{dA}{dt} = k_1 N_T m(T) dT + k_2 \frac{dm(T)}{dT} N_T dT$$

Portanto a quantidade de alimento ingerida por toda a população, por unidade de tempo é,

$$A = \int_0^{\infty} k_1 m(T) N_T dT + \int_0^{\infty} k_2 \frac{dm(T)}{dT} N_T dT$$

A segunda parte de A é desprezível em relação à primeira, como mostra a experiência.

Logo.

$$A \approx \int_0^{\infty} k_1 m(T) N_T dT.$$

Supondo  $k_1$  independente de T.

$$M = \frac{A}{k_1} = \int_0^{\infty} m(T) N_T dT.$$

Para interpretar o parâmetro M, vamos redefinir  $N_T$ . Suponha que  $N_T dT$  seja o nº de indivíduos com idade entre T e T + dT por unidade de área da Lagoa.

Portanto A representa a quantidade de alimento consumida, por unidade de área e por unidade de tempo. Como k, é numericamente a quantidade de alimento necessária para sustentar uma unidade de massa de Planorbideo,  $\frac{M}{k_1}$  é a massa de planorbideos que pode viver por unidade de área do Habitat, caracterizado pelo parâmetro A. M é conhecida como "Biomass density".

Substituindo a expressão

$$N_T = N_0 e^{-k\lambda T} + (N_0^* - N_0) f(T)$$

em

$$M = \int_0^{\infty} N_T m(T) dT$$

nós temos.

$$M = \int_0^{\infty} N_0 e^{-k\lambda T} m(T) dT + (N_0^* - N_0) \int_0^{\infty} f(T) m(T) dT$$

O segundo termo pode ser abandonado pois  $m(T)$  é muito pequeno entre 0 e  $T_0$  e porque  $(N_0^* - N_0) \int f(T) dT$  é uma parte da população que é o resultado do excesso de nascimentos mais que se extingue para  $T$  pequenos, justamente por falta de alimentos.

Portanto

$$M = N_0 \int_0^{\infty} e^{-K\lambda T} m(T) dT = N_0 L_{K\lambda} \{m(T)\}.$$

Logo

$$N_T = \frac{M}{L_{K\lambda} \{m(T)\}} e^{-K\lambda T} + (N_0^* - N_0) f(T)$$

Em resumo, o que nós concluímos, é que nas populações em equilíbrio estacionário de Planorbídeos, da quantidade  $N_0^*$  que nasce por unidade de tempo, uma parte  $(N_0^* - N_0) \int f(T) dT$  é eliminada logo nas primeiras idades, e uma parte  $\frac{M}{L_{K\lambda} \{m(T)\}} \int_0^{\infty} e^{-K\lambda T} dT$  consegue atingir idades mais elevadas, sendo que a idade mais elevada é essencialmente determinada por  $K\lambda$ .

Vamos chamar à parte  $\frac{M}{L_{K\lambda} \{m(T)\}} e^{-K\lambda T}$  da população, de parte principal da população.

O número de animais da parte principal da população é dado por

$$N = \int_0^{\infty} \frac{M}{L_{K\lambda} \{m(T)\}} e^{-K\lambda T} dT = \frac{M}{K\lambda L_{K\lambda} \{m(T)\}}$$

E integrando por partes.

$$N = \frac{M}{L_{K\lambda} \{m'(T)\} + m(0)}$$

onde  $m'(T) = \frac{dm(T)}{dT}$

Vejamos agora uma outra verificação experimental dos resultados anteriores. Devido ao pequeno diâmetro das "conchas" dos animais quando ainda novos, qualquer amostra da população, colhida pelos meios usuais em Biologia, é composta apenas por animais da parte principal da população.

Como  $L_{k\lambda}\{m^1(T)\}$  diminui da parte principal da população.

Como  $L_{k\lambda}\{m^1(T)\}$  diminui quando  $k\lambda$  aumenta, nós temos o seguinte resultado, algo inesperado: A densidade de população aumenta com a mortalidade. Este resultado, também foi verificado corretamente experimentalmente. (A.B.Coutinho et al-1968)

Antes de deixar este assunto, vamos tomar um exemplo para referência futura.

Suponha  $m(T) = m_0$ . Portanto  $m^1(T) = 0$  e  $L_{\lambda}\{m^1(T)\} = 0$

Logo

$$N = \frac{M}{m_0} \quad \text{e} \quad N_0 = \frac{M}{m_0} \frac{1}{k\lambda}$$

### 3.4 - Equilíbrio Estacionário em populações sujeitas a arrasto (Caso de Canais e Rios).

O problema que nós nos propomos a resolver agora, é achar a parte principal da população, por unidade de canal. Nós veremos que as considerações da parte anterior, permitem resolver o problema pelo menos formalmente.

Nós precisamos achar, a solução da equação

$$\frac{\partial \phi(T, \ell)}{\partial T} = -K(\lambda + a - \lambda a) \phi(T, \ell) + K(a - \lambda a) \int_0^{\ell} \phi(T, x) \left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_{\xi = \ell - x} dx.$$

de forma que

$$M(\ell) = \int_0^{\infty} m(T) \phi(T, \ell) dT \quad \text{onde}$$

$M(\ell) d\ell$  é a Biomassa da população que vive entre  $\ell$  e  $\ell + d\ell$ .

Notemos que  $M(\ell)$  depende apenas do canal.

Para simplificar tomaremos  $M(\ell) = M$

Tomando então a transformada de Laplace em relação a  $\ell$  da equação

$$M = \int_0^{\infty} m(T) \phi(T, \ell) dT$$

nós temos.

$$\frac{M}{s} = \int_0^{\infty} m(T) \bar{\phi}(T, s) dT \dots \dots (3.4.1)$$

Tomando a Transformada de Laplace da equação integro diferencial, nós temos.

$$\bar{\phi}(T, s) = \bar{\phi}(0, s) \exp \{ -K(\lambda + a - \lambda a)T + K(a - \lambda a) \bar{P}(s) T \} \quad (3.4.2)$$

Substituindo (3.4.2) em (3.4.1) nós temos.

$$\bar{\phi}(0, s) = \frac{M/s}{\int_0^{\infty} m(T) \exp\{-K(\lambda+a-\lambda a)T + K(a-\lambda a)f(s)T\} dT}$$

Portanto, 3.4.2 nos dá

$$\bar{\phi}(T, s) = \frac{\frac{M}{s} \exp\{-K(\lambda+a-\lambda a)T + K(a-\lambda a)\bar{f}(s)T\}}{\int_0^{\infty} m(T) \exp\{-K(\lambda+a-\lambda a)T + K(a-\lambda a)\bar{f}(s)T\} dT}$$

e portanto

$$\phi(T, \ell) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\frac{M}{s} e^{s\ell} \exp\{-K(\lambda+a-\lambda a)T + K(a-\lambda a)\bar{f}(s)T\} ds}{\int_0^{\infty} m(T) \exp\{-K(\lambda+a-\lambda a)T + K(a-\lambda a)\bar{f}(s)T\} dT}$$

que é a solução formal do nosso problema.

A fim de exemplificar, suponhamos  $m(T) = m_0$  novamente.

Então

$$m_0 \int_0^{\infty} \exp\{-K(\lambda+a-\lambda a) + K(a-\lambda a)\bar{f}(s)\} T dT = \\ = \frac{-m_0}{-K(\lambda+a-\lambda a) + K(a-\lambda a)\bar{f}(s)}$$

Logo

$$\bar{\phi}(T, s) = \frac{-M}{s} \frac{1}{m_0} \left\{ -K(\lambda+a-\lambda a) + K(a-\lambda a)\bar{f}(s) \exp\{-K(\lambda+a-\lambda a) + K(a-\lambda a)\bar{f}(s)\} T \right\} \\ = - \frac{M}{m_0} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{s} \exp\left[-K(\lambda+a-\lambda a) + K(a-\lambda a)\bar{f}(s)\right] T \right\}$$

Logo

$$\phi(T, \ell) = - \frac{M}{m_0} \frac{\partial}{\partial T} \left( e^{-K(\lambda+a-\lambda a)T} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^n} \frac{1}{n!} \left\{ 1 - e^{-\rho} (1 + \dots + \frac{(\rho \ell)^{n-1}}{(n-1)!}) \right\} \right\} \right)$$

Nos verificaremos agora os seguintes pontos.

i) Se  $\phi(T, \ell)$  obedece a condição  $\int_0^{\infty} n(T) \phi(T, \ell) dT = M$   
 que neste exemplo se reduza  $\int_0^{\infty} \phi(T, \ell) dT = \frac{M}{m_0}$

Realmente,

$$\int_0^{\infty} \phi(T, \ell) dT = - \frac{M}{m_0} \left[ e^{-K(\lambda+a-\lambda a)T} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^n} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho \ell} \left( 1 + \dots + \frac{(\rho \ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\} \right]_0^{\infty} = + \frac{M}{m_0} \quad \text{c.q.d.}$$

ii) Qual o valor de  $\phi(0, \ell)$

$$\begin{aligned} \phi(T, \ell) &= - \frac{M}{m_0} \left\{ -K(\lambda+a-\lambda a) e^{-K(\lambda+a-\lambda a)T} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^n} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho \ell} \left( 1 + \dots + \frac{(\rho \ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M}{m_0} e^{-K(\lambda+a-\lambda a)T} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{K(a-\lambda a)\rho\}^n}{\rho^n} nT^{n-1} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho \ell} \left( 1 + \dots + \frac{(\rho \ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\} \right. \\ &= - \frac{M}{m_0} \left\{ -K(\lambda+a-\lambda a) e^{-K(\lambda+a-\lambda a)T} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^n} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho \ell} \left( 1 + \dots + \frac{(\rho \ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M}{m_0} e^{-K(\lambda+a-\lambda a)T} K(a-\lambda a) \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{\rho^{n-1}} \frac{1}{n!} \left[ 1 - e^{-\rho \ell} \left( 1 + \dots + \frac{(\rho \ell)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \phi(0, \ell) &= \frac{M}{m_0} K(\lambda+a-\lambda a) - \frac{M}{m_0} K(a-\lambda a) \left\{ 1 - e^{-\rho \ell} \right\} = \\ &= \frac{M}{m_0} \left\{ K(\lambda+a-\lambda a) - K(a-\lambda a) \left[ 1 - e^{-\rho \ell} \right] \right\} \end{aligned}$$

Notamos a perfeita concordância, com os resultados obtidos no fim de 3.3. De fato, no início do canal, atuam duas causas de "morte", mortalidade verdadeira  $\lambda$  e mortalidade aparente,  $a$ , por

por arrasto.

$$\text{Logo. } \phi(0, l) = \frac{M}{m_0} K(\lambda + a - \lambda a) = \frac{M}{m_0} K \lambda l$$

No fim do canal, s $\tilde{o}$   $\lambda$  atua, logo.

$$\phi(0, \infty) = \frac{M}{m_0} K \lambda .$$

## REFERÊNCIAS

- 1) Apostol T.M.-Mathematical Analysis-Addison-Wesley -1958
- 2) Barbosa F.S e Silva, G.M da - Curvas de Crescimento de *Austrorbis Glabratus* e sua aplicação à epidemiologia e à profilaxia da Esquistosomose- Publi.Avulsas do Inst.Aggeu Magalhães Vol 1-nº4-pp.35-42 1951
- 3) BSCS- Biological Sciences Curriculum Study-Editora Universidade de Brasilia-1967
- 4) Coutinho A.B., Conceiro R.de O, Barbosa A.M.de S., Freitas G.C. e Ramos H.- Taxonomia e genética no gênero *Austrorbis* .An. Fac.Med.Univ.do Recife -17:35-58,1957
- 5) Coutinho A.B e Machado J.N -Teoria dos biomassas estacionárias sujeitas à ação parasitária: ecologia do complexo holosológico da Bilhariose Mansônica-Rev.Inst. Med.Trop.São Paulo - 3:221-229-1961.
- 6) Coutinho A.B. e Coutinho F.A.B.-Efeito Dobovolny, um aspecto da ecologia do *Austrorbis Glabratus* -IIº simpósio sobre Bioquímica dos Planorbídeos-Recife-1963.
- 7) Coutinho A.B. e Coutinho F.A.B -The conservation of the Biomass Density and the age structure of the populations-Bulletim of Mathematical Biophysics- Vol 30-1968.
- 8) Morse P.M- e Feshbach H.-Methods of Teoretical Physics-Mcgraw-Hill Book Company, Inc -1953
- 9) Nussenzveig,N.H: Introdução à Teoria do Laser -Notas de Aula em São Paulo.Fevereiro 1968.
- 10) Pessoa-S.B.- Parasitologia Médica-Livraria Editora Guanabara-Koogan S.A.-1963.
- 11) SMITH-Laplace Transform Theory-D.Van Nostrand. 1966.