

BR 12/1007



**TEORIA DE TRANSPORTE DE NÉUTRONS EM MEIOS ADJACENTES
NO MODELO DE DOIS GRUPOS E ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO**

José Rubens Maiorino

DISSERTAÇÃO E TESE - IEA 061

JUNHO/1978

**TEORIA DE TRANSPORTE DE NÉUTRONS EM MEIOS ADJACENTES
NO MODELO DE DOIS GRUPOS E ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO**

José Ribens Makrino

**Dissertação para obtenção do Título de "Mestre em
Ciências e Tecnologia Nucleares" - Orientador
Dr. Yuji Ishiguro.**

**Apresentada e defendida em 13 de setembro de 1978,
na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.**

CONSELHO DELIBERATIVO

MEMBROS

Klaus Reinach -- Presidente
Roberto D'Utra Vez
Helcio Modesto da Costa
Ivano Humbert Marchesi
Admar Cervellini

PARTICIPANTES

Regina Elisabete Azevedo Beretta
Flávio Gori

SUPERVISOR

Arnaldo Ribeiro Pieroni

INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA
Caixa Postal 11.049 (Pinheiros)
Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
SÃO PAULO - BRASIL

ÍNDICE

	Página
1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – Teoria de Transporte - Resumo Histórico e Método	1
1.2 – Revisão de Literatura (Método de Case e "Invariant Imbedding")	4
1.3 – Objetivo e Divisão do Trabalho	5
2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS	6
2.1 – Equação de Transporte de Nêutrons (Equação de Boltzmann)	6
2.2 – Modelo de Dois Grupos, Simetria Plane e Espalhamento Isotrópico	7
2.3 – Método de Expansão em Auto-Funções Singulares (Método de Case)	10
2.4 – Ortogonalidade e Completividade dos Auto-Vetores	15
2.5 – Método "Invariant Imbedding" e o Princípio da Invariância	17
2.6 – Fórmulas Explícitas	18
3 – TRANSPORTE DE NÊUTRONS EM DOIS SEMI-ESPAÇOS ADJACENTES (DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO)	22
3.1 – Problema de Milne	22
3.2 – Fonte Constante	28
4 – RESULTADOS NUMÉRICOS	30
5 – CONCLUSÕES, DISCUSSÕES E SUGESTÕES	62
APÊNDICE A – PROCEDIMENTO NUMÉRICO - COMPUTACIONAL	63
APÊNDICE B – TESTE DOS MOMENTOS	68
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72

ÍNDICE DAS FIGURAS

	Página
Figura 1 – Coeficientes Contínuos, Meio 1, $A_1(\nu)$ – Problema de Milne	39
Figura 2 – Coeficientes Contínuos, Meio 1, $A_2(\nu)$ – Problema de Milne	40
Figura 3 – Coeficiente Contínuo, Meio 2, $B_1(\eta)$ – Problema de Milne	41
Figura 4 – Coeficiente Contínuo, Meio 2, $B_2(\eta)$ – Problema de Milne	42
Figura 5 – Distribuição Angular na Interface ($x=0$), Grupo 1 – Problema de Milne (Coordenadas Polares)	43
Figura 6 – Distribuição Angular na Interface ($x=0$), Grupo 2 – Problema de Milne – (Coordenadas Polares)	44
Figura 7A – Modificação na Distribuição Angular com a Distância nos Meios – Grupo 1 – Problema de Milne (Coordenadas Polares)	45
Figura 7B – Modificação na Distribuição Angular com a Distância nos Meios – Grupo 2 – Problema de Milne (Coordenadas Polares)	46
Figura 8 – Fluxo Total e Assintótico, Grupo 1 – Problema de Milne	47
Figura 9 – Fluxo Total, Grupo 2 – Problema de Milne	48
Figura 10 – Corrente, Grupo 1 – Problema de Milne	49
Figura 11 – Corrente, Grupo 2 – Problema de Milne	50
Figura 12 – Coeficientes Contínuos – Meio 1 – $A_1(\nu)$ – Problema da Fonte Constante	51
Figura 13 – Coeficientes Contínuos Meio 1 – $A_2(\nu)$ – Problema da Fonte Constante	52
Figura 14 – Coeficiente Contínuo, Meio 2 – $B_1(\eta)$ – Problema da Fonte Constante	53
Figura 15 – Coeficiente Contínuo, Meio 2 – $B_2(\eta)$ – Problema da Fonte Constante	54
Figura 16 – Distribuição Angular na Interface ($x=0$), Grupo 1 – Problema da Fonte Constante – (Coordenadas Polares)	55
Figura 17 – Distribuição Angular na Interface ($x=0$), Grupo 2 – Problema da Fonte Constante – (Coordenadas Polares)	56
Figura 18 – Modificação na Distribuição Angular com a Distância nos Meios – Grupo 1 Problema da Fonte Constante	57
Figura 19 – Fluxo Total e Assintótico, Grupo 1 – Problema da Fonte Constante	58
Figura 20 – Fluxo Total, Grupo 2 – Problema da Fonte Constante	59
Figura 21 – Corrente, Grupo 1 – Problema da Fonte Constante	60
Figura 22 – Corrente, Grupo 2 – Problema da Fonte Constante	61
Figura A 1 – Fluxograma do Programa Utilizado	67

TEORIA DE TRANSPORTE DE NÉUTRONS EM MEIOS ADJACENTES NO MODELO DE DOIS GRUPOS E ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO

José Rubens Maiorino

RESUMO

O método de expansão em auto-funções singulares e o princípio de invariância são combinados para introduzir um método de solução de problemas de transporte de nêutrons em meios adjacentes no modelo de dois grupos e espalhamento isotrópico.

O método aqui usado, consiste na obtenção de um conjunto de equações integrais acopladas, para a distribuição angular na interface, a partir da condição de continuidade do fluxo angular na interface e do princípio de invariância. Os coeficientes do método de expansão em auto-funções singulares podem então ser obtidos usando-se os resultados das equações integrais citadas e das propriedades de ortogonalidade das auto-funções.

Mostram-se resultados numéricos para o problema de Milne e de fonte constante, em meios de água leve e água borada, a fim de mostrar a viabilidade de aplicação do método proposto.

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Teoria de Transporte - Resumo Histórico e Métodos

Historicamente a Teoria de Transporte teve sua origem em fins do século passado dado o interesse pelo estudo da difusão da luz na atmosfera. Investigações sobre a transferência de radiação luminosa levaram a estudos elementares da chamada equação de transporte ou de Boltzmann e, em 1921, Milne⁽³⁸⁾ formulou um modelo para o estudo de distribuição angular de radiação emitida por uma estrela baseado nesta teoria. Embora muitas informações de valor tenham sido obtidas para a Astrofísica, nenhum progresso matemático foi feito até a solução exata do problema proposto por Milne, por Wiener e Hopf⁽¹⁷⁾, em 1931, através da técnica da transformada de Fourier.

Com a descoberta do nêutron, da fissão nuclear e consequentemente dos reatores de fissão controlada, esta teoria foi generalizada para o estudo de distribuição neutrônica, dado que um dos fundamentais requisitos para o projeto e desenvolvimento dos reatores nucleares é o entendimento da distribuição e movimento de nêutrons dentro desses reatores.

A Teoria de Transporte de nêutrons tem por objetivo o estudo da migração desses nucleons através de meios materiais. Essa migração envolve um grande número de colisões aleatórias entre nêutrons e átomos do meio, para estudá-la deve-se primeiro conhecer as leis que governam as colisões individuais e, então, resolver o problema da determinação do resultado líquido de um grande número dessas interações aleatórias. O problema de se estabelecer as leis que governam as colisões é objeto de Física Nuclear, baseada nas leis da Mecânica (Quântica ou Clássica), sendo que a Teoria de Transporte trata da determinação da distribuição de nêutrons em termos angular, espacial e energética.

O cálculo da distribuição de nêutrons num sistema físico poderia, teoricamente, ser efetuado inserindo-se na equação de transporte um conjunto apropriado de seções de choque, que representasse as probabilidades de interação e descrevesse as colisões individuais e condições de contorno que

retratassem realisticamente o comportamento físico e geométrico do sistema. Desta forma, obter-se-iam soluções por procedimentos matemáticos convenientes.

Porém, em vista de que os sistemas físicos reais, tal como um reator nuclear, apresentam complexidades tais como: arranjo geométrico que acarretam heterogeneidades e de difícil representação matemática; quantidade de isótopos com propriedades distintas, cujas concentrações variam espacial e temporalmente; energia dos nêutrons variando do limite superior de alguns MeV, correspondente aos nêutrons emitidos em fissões, até ao inferior de frações de eV, correspondentes a nêutrons em equilíbrio térmico com o sistema; variações complexas das secções de choque com a energia.

Uma descrição matemática de tal sistema e a obtenção de soluções "razoáveis", só é possível quando se considera um "modelo" idealizado e simplificado, além do que estas complexidades dão origem a duas alternativas para a solução do problema, a primeira é propor-se uma solução "matematicamente exata" de um problema altamente idealizado e a segunda, uma solução aproximada para um modelo mais realístico.

Nos cálculos neutrônicos aproximados, para projeto de reatores, desenvolveu-se inicialmente uma versão simplificada da Teoria de Transporte, conhecida como aproximação, ou teoria de difusão⁽¹⁸⁾. Nesta aproximação omite-se considerações detalhadas da migração de nêutrons, no que concerne, principalmente as colisões individuais que alteram a direção da partícula, e se passa diretamente para a descrição da distribuição espacial, considerando-se os nêutrons como um "fluido" em analogia com as equações de condução de calor e difusão de massa. Além disso, impõe-se aos nêutrons uma direção preferencial através da chamada lei de Fick*. Essa aproximação simplifica o cálculo das variações espaciais da distribuição de nêutrons e fornece uma boa descrição para grandes distâncias (quando comparadas com o "livre caminho médio" dos nêutrons) das fontes e fronteiras físicas, sendo portanto de utilidade no cálculo de "reatores grandes", falhando porém no cálculo de pequenos sistemas ou perto de fontes e fronteiras.

Há dois métodos de tratamento para a dependência energética da equação de transporte. O primeiro, conhecido como "dependente da energia", simplesmente trata a energia como uma variável contínua, o que acarreta dificuldades na obtenção de soluções rigorosas, dado que os parâmetros nucleares normalmente são funções complexas da energia. Para contornar essa dificuldade, é comum expandir os termos dependentes da energia em polinômios tendo o mesmo intervalo de definição da energia, de zero a infinito. Como exemplo, citam-se os polinômios de Laguerre, e de Tchebycheff. O segundo é o "método de multigrupos", no qual se divide o intervalo de energia de interesse num número finito de sub-intervalos (ou grupos) sendo os parâmetros nucleares (secção de choque, fluxo angular, etc) valores médios adequados em cada grupo.

A dependência angular dos parâmetros pode ser descrita por uma expansão em termos finitos de polinômios ortogonais do ângulo. Um tratamento desse tipo, foi desenvolvido por Merk⁽³³⁾, sendo conhecido como "aproximação P_N ". Essencialmente consiste na expansão em "esféricos harmônicos" para a dependência angular, ou simplesmente em polinômios de Legendre no caso de simetria azimutal, sendo a série truncada na ordem: $(N + 1)$

Uma outra aproximação para a dependência angular, no caso de geometria plana, foi proposta por Yvon⁽⁵⁷⁾, que sugeriu expandir o fluxo angular em uma série de polinômios de Legendre separados para valores do cosseno do ângulo zenital (μ) positivos e negativos. A razão é que na interface entre dois meios, o fluxo angular tem uma descontinuidade física para o cosseno nulo do ângulo zenital ($\theta = 90^\circ$) e uma simples aproximação P_N não representa este fato, dado que uma soma finita de polinômios de Legendre é sempre uma função contínua, enquanto que numa dupla expansão polinomial (DP_N) a descontinuidade física é muito bem representada.

* A lei de Fick foi usada inicialmente para o estudo de fenômenos de difusão em líquidos e gases. Essencialmente impõe que a direção da corrente de nêutrons, seja contrária ao gradiente de densidade (ou fluxo) de nêutrons e que a intensidade seja proporcional a um parâmetro do meio, conhecido como coeficiente de difusão, e do gradiente do fluxo.

Apesar das aproximações P_N e DP_N fornecerem bons resultados para a dependência angular existe um terceiro método conhecido como "ordenadas discretas ou S_N ". Apesar de inicialmente ter sido proposto para soluções de problemas astrofísicos (transferência radiativa), foi generalizada para o transporte de nêutrons, por Carlson⁽⁶⁾. Em essência, consiste na solução da equação de transporte em termos de um conjunto de direções discretas ou seja, as integrais angulares são aproximadas por somas sobre direções discretas, normalmente pontos de quadratura de Gauss, e as derivadas angulares por diferenças de ângulos discretos.

É de interesse salientar que na solução de equação de transporte deve-se levar em conta simultaneamente a dependência angular e energética. Desta forma, os métodos de multigrupo, ou dependente da energia são usados juntos com P_N , DP_N , S_N ou outros métodos, para se obter soluções da distribuição de nêutrons. Além disso, apesar da equação de transporte ser uma equação integro-diferencial, com a aplicação destes métodos, e de um tratamento matemático adequado, reduz-se o problema à solução de um sistema de equações algébricas ou de diferenças finitas, o qual pode ser facilmente resolvido por procedimentos numéricos (14) computacionais.

Em 1960, Case⁽⁷⁾, baseado num trabalho de Van Kampen's⁽⁵⁵⁾ encontrou soluções rigorosas da equação de transporte para nêutrons monoenergéticos, introduzindo um novo método de solução que é conhecido atualmente como "método de expansão em auto-funções singulares ou método de Case". Neste método, através de uma separação de variáveis adequada à linearidade da equação de transporte, desenvolveu-se auto-funções singulares, as quais, quando linearmente combinadas, representam a distribuição angular.

Dado o fato de que o "método de Case" não usa nenhuma aproximação, tal como a expansão em polinômios truncados até determinada ordem, ele fornece soluções matematicamente exatas (analíticas). Porém, como já discutido, a vantagem da obtenção de soluções rigorosas é diminuída pelo fato do método ser restrito a uma classe de problemas limitados e idealizados. Mesmo assim, dado os esforços que vêm sendo realizados desde o trabalho pioneiro de Case, tem sido aplicado com sucesso a uma grande variedade de problemas, além de ter sido generalizado para multigrupos e em diferentes geometrias, e também, usado em outros campos, como física do plasma, transferência radiativa e propagação do som. Pode-se afirmar portanto que este método possui as seguintes vantagens:

- 1) Em certas situações é uma boa aproximação da realidade física.
- 2) Os resultados e o desenvolvimento de teoria são de interesse matemático, principalmente no que diz respeito à solução de problemas de valores de contorno.
- 3) Serve como teste das aproximações da teoria de transporte, dado que fornece soluções rigorosas.
- 4) É conveniente para problemas de engenharia nuclear, que necessita de informações sobre fenômenos que ocorram na fronteira do reator; da determinação precisa de "distância extrapolada", e de estudos da efetividade de refletores.

Por outro lado, o astrofísico Ambarzumian⁽¹¹⁾ com o intuito de solucionar problemas sobre a reflexão difusa de luz por atmosfera estelar, introduziu um método de solução de problemas de transporte, conhecido como "invariant imbedding". Esse método é radicalmente novo na formulação de problemas de transporte, na medida em que não faz uso da equação de Boltzmann. Essencialmente, formula equações integrais para as funções que descrevem a reflexão e a transmissão de radiação, com base em princípios de invariância, os quais foram generalizados e formulados sistematicamente na teoria geral de transferência radiativa por Chandrasekhar⁽¹²⁾. O método, originalmente introduzido para solucionar problemas de radiação luminosa, é aplicável a outras radiações, como nêutrons e raios- γ , sendo hoje, extensivamente estudado pela radiobiologia e engenharia nuclear na solução de problemas ligados a projetos de blindagem de reatores.

Além dos métodos citados nesta seção, existem outros de importância secundária, com exceção do "método de Monte Carlo" que é amplamente usado na solução de problemas de transporte de nêutrons e outras radiações. Neste método, a "história" da partícula é gerada seguindo-se um nêutron individual através de colisões sucessivas. A localização da colisão e o resultado de tal colisão, ou seja, a direção e a energia do nêutron emergente, é determinado a partir das possibilidades de um conjunto conveniente de números aleatórios.

1.2 – Revisão da Literatura (Método de Case e "Invariant Imbedding")

Após a publicação do trabalho de Case⁽⁷⁾, introduzindo o método de expansão em auto-funções singulares, surgiu uma avalanche de artigos com o intuito de generalizar e fundamentar este novo método.

O problema do reator homogêneo tipo placa, sem refletor, para nêutrons monoenergéticos (um grupo) foi resolvido através desse método por Zelazny⁽⁵⁸⁾ e Pahor⁽⁴³⁾. Ozisik e Siewert⁽⁴²⁾ desenvolveram uma série de soluções particulares da equação de transporte para nêutrons monoenergéticos, que possibilitou o uso desse método em problemas com fontes externas. Mika⁽³⁷⁾ usou pela primeira vez esse método na solução de problemas cujas colisões no meio são anisotrópicas. Case e Zweifel⁽⁹⁾ deram maior consistência matemática ao método, demonstrando teoremas de existência e unicidade das soluções encontradas. Kuscer et alii⁽²⁵⁾ foram os primeiros a observar propriedades de ortogonalidade das auto-funções, no intervalo (0,1) e, usando dessas propriedades, solucionaram de maneira direta problemas em um semi-espaço considerando o modelo de um grupo e espelhamento isotrópico. Problemas em um semi-espaço foram também solucionados, considerando o espelhamento anisotrópico, por Shure e Natelson⁽⁴⁸⁾ e por McCormick e Kúscar⁽³¹⁾, os quais resolveram os problemas de Milne, Albedo e fonte constante usando propriedades de ortogonalidade por eles desenvolvidas. McCormick e Mendelson⁽³²⁾, usando também propriedades de ortogonalidade no semi-intervalo, solucionaram problemas em meios finitos, como o problema de Albedo em placas. A generalização do método para outras geometrias, foi inicialmente feito por Mitsis⁽³⁹⁾, que encontrou soluções para problemas em geometrias esféricas e cilíndricas, e também por Erdman e Siewert⁽¹⁶⁾, que desenvolveram a função de Green para geometrias esféricas no modelo de um grupo. Além disso, ainda considerando um grupo de energia, o método foi estendido por Kuscer e Zweifel⁽²⁶⁾ para soluções de problemas dependentes do tempo.

O método de expansão em auto-funções singulares foi generalizado para o modelo de dois grupos de energia por Zelazny e Kuszajl⁽⁵⁹⁾, os quais solucionaram problemas em geometria plana, Albedo e placa crítica. Siewert e Shieh⁽⁵³⁾, posteriormente, deram maior consistência matemática a essa generalização, discutindo propriedades de completividade e ortogonalidade dos auto-vetores. Relações de ortogonalidade no semi-intervalo (0,1), no modelo de dois grupos, espelhamento isotrópico e geometria plana foram discutidas por Siewert e Ishiguro⁽⁵²⁾, os quais, introduziram a matriz H para relatar as propriedades de ortogonalidade e solucionaram vários problemas em um semi-espaço, Milne, Albedo e fonte constante. Siewert et alii⁽⁵⁰⁾, demonstraram a existência e a unicidade de solução de matriz H, anteriormente introduzida. Comparações do método de Case em dois grupos, com métodos aproximados de teoria de transporte (P_1 , P_3 e DP_1), foram realizadas por Metcalf e Zweifel^(35,36). Reith e Siewert⁽⁴⁶⁾, ainda no modelo de dois grupos, solucionaram problemas em meios infinitos, considerando o meio espalhador anisotrópico. Ishiguro⁽¹⁹⁾, também considerando espelhamento anisotrópico, solucionou problemas de semi-espaços e de placa crítica. Além disso, uma comparação numérica dos efeitos do espelhamento anisotrópico relativo ao isotrópico, foi feita por Ishiguro e Jorge⁽²⁰⁾. O modelo de dois grupos foi também usado em diferentes geometrias, por Kriese et alii⁽²⁴⁾, os quais encontraram soluções para o problema da esfera crítica.

A semelhança das equações de transferência radiativa com a de transporte de nêutrons, ou mais explicitamente, a analogia entre o modelo de transferência de luz não polarizada e o modelo de transporte de nêutrons monoenergéticos, e o de luz polarizada ao de dois grupos de energia, tornou possível a aplicação do método de expansão em auto-funções singulares neste campo. Siewert e

Zweifel⁽⁵⁴⁾ propuseram soluções para a equação de transferência radiativa para o modelo de luz polarizada e equilíbrio termodinâmico local. Neste trabalho desenvolveram fórmulas explícitas para os auto-vetores, que foram facilmente adaptados para o caso dos auto-vetores de solução da equação de transporte de nêutrons. Além desse trabalho, Ozisik e Siewert⁽⁴²⁾ e Ferziger e Simons⁽¹⁶⁾ também aplicaram com sucesso o método de Case a problemas de transferência de radiação.

A dependência energética, além do modelo de dois grupos, foi generalizada, no método de Case, para o caso mais geral de multigrupos por Yoshimura e Katsuragi⁽⁵⁶⁾ e Pahor e Shultis⁽⁴⁴⁾. Além do tratamento de multigrupo, Leonard e Ferziger⁽²⁸⁾ e Bednig e Mika⁽²⁾ usaram o método de Case, tratando a energia como uma variável contínua.

Problemas de transporte de nêutrons em diferentes meios adjacentes, usando o método de Case, foram solucionados pela primeira vez por Kuznetz⁽²⁷⁾ que encontrou solução do problema de criticalidade, para um conjunto de placas adjacentes para nêutrons monoenergéticos. Mendelson e Summerfield⁽³⁴⁾ solucionaram problemas de transporte em dois semi-espacos adjacentes, através da técnica de expansão em auto funções singulares, para nêutrons monoenergéticos, e Korn⁽²³⁾ solucionou o problema de Milne em dois semi-espacos adjacentes, em um grupo de energia. Porém, referindo-se ainda a meios adjacentes e um grupo de energia, o trabalho fundamental se deve a McCormick⁽²⁹⁾ e McCormick e Doyas⁽³¹⁾, os quais, considerando os meios espalhadores anisotrópicos, desenvolveram soluções a partir de propriedades das auto funções.

Jouho e Rajamaki⁽²²⁾ generalizaram o problema de diferentes meios adjacentes, levando em conta a dependência energética, e Erdmann e Lurie⁽¹⁴⁾ solucionaram o problema em diferentes regiões, considerando a dependência temporal, para nêutrons monoenergéticos.

Chandrasekhar⁽¹¹⁾ através de um artigo e não muito conhecido trabalho de transferência radiativa, encontrou a distribuição angular de radiação na interface de meios adjacentes, através do método "Invariant Imbedding" e princípios de invariância, por ele desenvolvidos. O primeiro trabalho que fez uso da idéia de combinar o método de Case com o de Chandrasekhar, foi desenvolvido por Pahor e Zweifel⁽⁴⁵⁾, que mostraram a viabilidade dessa combinação para a solução de problemas em um semi-espaco.

Recentemente, Bukart⁽⁵⁾, e Siewert e Bukart⁽⁴⁹⁾ voltaram a usar a idéia de combinar o princípio de invariância e o método "invariant imbedding", com o método de expansão em auto-funções singulares, para obter soluções de problemas críticos em placas com refletor, em um grupo de energia.

Siewert e Ishiguro⁽⁵²⁾, usando a mesma idéia, solucionaram o problema de Milne em dois semi-espacos adjacentes, considerando os meios espalhadores anisotrópicos e o modelo de um grupo de energia.

1.3 – Objetivo e Divisão do Trabalho

Neste trabalho mostra-se que a combinação do método de expansão em auto função singulares com o método "invariant imbedding" pode ser usado na solução de problemas de transporte de nêutrons em meios adjacentes, considerando-se a dependência energética através do modelo de dois grupos de energia.

Restringiu-se a aplicação do método em meios infinitos, não multiplicativos e espalhadores isotrópicos e considerou-se dois diferentes tipos de fontes de nêutrons num dos meios, fonte constante e uniformemente distribuída, e fonte não explícita (Milne).

A base teórica dos métodos empregados é apresentada na secção 2, na qual se discute a solução geral da equação de transporte no modelo de dois grupos e meio espalhador isotrópico segundo o método de expansão em auto-funções singulares, além de um resumo do método "invariant imbedding" aplicado a transporte de nêutrons.

Na secção 3, expõe-se o método aqui introduzido, solucionando-se analiticamente os problemas de Milne e fonte constante. A viabilidade numérica do tratamento analítico proposto, é apresentada na secção 4, no qual se encontra a distribuição de nêutrons em meios de água leve e água pesada.

As conclusões, discussões e sugestões encontram-se na secção 5, sendo que os apêndices A e B contêm o procedimento numérico-computacional, e testes de confiabilidade do método.

2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 – Equação de Transporte de Nêutrons (Equação de Boltzmann)

Teoria de Transporte é, em essência, a descrição matemática do movimento de partículas num meio material. Dado que não se pode especificar a posição e a velocidade de uma partícula individual em cada instante de tempo, a teoria baseia-se no comportamento médio de uma população de partículas. Nesse sentido, a Teoria de Transporte é uma descrição macroscópica da distribuição de partículas.

A equação que descreve o transporte de nêutrons, equação de Boltzmann, é essencialmente uma equação de conservação da "população média" de partículas num elemento de volume localizado numa posição r . Sendo escrita como:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, \Omega, E, t) + \Omega \cdot \nabla \Psi(r, \Omega, E, t) + \sigma(r, E) \Psi(r, \Omega, E, t) = \int_E \int_{4\pi} \sigma(r, E') f(r, \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Psi(r, \Omega', E', t) d\Omega' dE' + Q(r, \Omega, E, t) \quad (2.1.1)$$

onde tem-se:

$\Psi(r, \Omega, E, t)$ – Fluxo angular, sendo definido como função da densidade angular de nêutrons $\eta(r, \Omega, E, t)$ (número médio de nêutrons, no elemento de volume em r , com direção Ω , e energia E , no instante de tempo t , por unidade de volume, ângulo sólido e energia) por:

$$\Psi(r, \Omega, E, t) = \eta(r, \Omega, E, t) v$$

$\sigma(r, E)$ – Secção de choque macroscópica total, interpretada como a probabilidade de interação por unidade de comprimento.

$f(r, \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)$ – Função transferência, definida tal que $\sigma(r, E) f(r, \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) d\Omega' dE$ fornece a probabilidade de um nêutron com direção Ω' e energia E' ao sofrer uma colisão em r , emerge desta um nêutron com direção entre Ω e $\Omega + d\Omega$ e energia entre E e $E + dE$.

As limitações acima referidas são devidas ao número colossal de equações de movimento que se teria ao se estudar o comportamento individual da partícula, e não aquelas impostas pela Mecânica Quântica, dado que, em Teoria de Transporte, o nêutron é considerado como partícula clássica (pontual).

$Q(r, \Omega, E, t)$ – Termo de fontes externas, definido tal que $Q(r, \Omega, E, t) d\Omega dE dV dt$ fornece o número médio de nêutrons introduzidos no elemento de volume, em r , com direcção entre Ω e $\Omega + d\Omega$, energia entre E e $E + dE$, no intervalo de tempo dt , por fontes externas, i.é. por fontes que não dependem das colisões de nêutrons no sistema.

É interessante salientar que na equação de Boltzmann, não foram considerados os seguintes fatos:

- 1) Flutuações estatísticas do número médio de nêutrons, no elemento de volume considerado.
- 2) Tempo de colisão entre os nêutrons e os núcleos do meio.
- 3) Colisões nêutron-nêutron (a Eq. de Boltzmann é linear).
- 4) A energia de vibração de átomos e moléculas do meio no qual os nêutrons movimentam-se.
- 5) Outras forças diferentes das nucleares, tais como aquelas oriundas da orientação dos nêutrons (spin) e interações com o momento magnético do nêutron.
- 6) Dependência angular nas secções de choque, como a que ocorre em certos cristais.
- 7) Nêutrons atrasados.

Mesmo assim, dado que nos problemas de interesse da Engenharia Nuclear, as situações acima não são relevantes, a equação de Boltzmann é uma boa representação da distribuição de nêutrons num sistema físico.

A solução da equação de Transporte é extremamente difícil*, sendo que resultados exatos** só têm sido obtidos para sistemas físicos simplificados, portanto o estudo e a análise desta equação continuam sendo um campo de pesquisa em aberto.

2.2 – Modelo de Dois Grupos, Simetria Plana e Espalhamento Isotrópico

Nesta secção apresenta-se a equação de Boltzmann quando sujeita a simplificações.

- 1) Estado estacionário; ou seja, a solução da equação de transporte é independente do tempo.

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(r, \Omega, E, t) = 0$$

- 2) Simetria plana; ou seja, as secções de choque, função de transferência e termos de fonte dependem somente de uma coordenada espacial (z) e de coordenada angular $\mu = \Omega \cdot \kappa$ (κ é o versor da direcção z). Desta forma, os termos de equação de Boltzmann tornam-se:

* Esta dificuldade não se prende somente à razão Matemática, mas também a razões Físicas, dado a dificuldade na determinação precisa das variações das secções de choque com a energia.

** Nos problemas práticos de Engenharia Nuclear, os resultados são obtidos a partir de "aproximações numéricas"

$$(a) \quad \underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla} \Psi(r, \underline{\Omega}, E, t) \rightarrow \mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z, \mu, E)$$

$$(b) \quad \sigma(r, E) \Psi(r, \underline{\Omega}, E, t) \rightarrow \sigma(z, E) \Psi(z, \mu, E)$$

$$\int_E \int_{4\pi} \sigma(r, E') f(r; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \Psi(r, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' \rightarrow$$

$$(c) \quad 2\pi \int_E \int_{-1}^1 \sigma(z, E') f(z; E' \rightarrow E, \mu_0) \Psi(z, \mu', E') d\mu' dE'$$

$$(d) \quad Q(r, \underline{\Omega}, E, t) \rightarrow Q(z, \mu, E)$$

onde μ_0 é o cosseno do ângulo de espalhamento, $\mu_0 = \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}'$

3) Espalhamento isotrópico, ou seja, expande-se a função de transferência em Polinômios de Legendre de μ_0 .

$$\sigma(z, E') f(z; E' \rightarrow E, \mu_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \sigma_{\ell}(z; E' \rightarrow E) P_{\ell}(\mu_0)$$

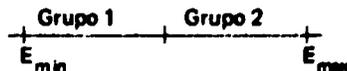
e toma-se apenas o primeiro termo da expansão. Portanto a transferência de nêutrons independe do ângulo de espalhamento (isotrópico);

$$\sigma(z, E') f(z; E' \rightarrow E, \mu_0) = \frac{\sigma_0(z, E' \rightarrow E)}{4\pi}$$

onde $\sigma_0(z, E' \rightarrow E)$ é a secção de choque de transferência^o da energia E' para a energia E .

4) Meio homogêneo; ou seja, as secções de choque (σ_0 e σ) independem da posição (z).

5) Modelo de dois grupos; ou seja, divide-se o intervalo de energia de interesse em dois grupos.



sendo o fluxo angular, secção de choque e termos de fonte, valores médios em cada grupo.

$$\Psi_i(z, \mu) = \int \Psi(z, E, \mu) dE \quad , \quad i = 1, 2$$

* No caso de meios multiplicativos deve-se incluir, à transferência devido espalhamentos, a contribuição dos nêutrons de energia E' induzirem fissões e gerarem nêutrons de energia E .

$$\sigma_i = \frac{\int_1 \sigma(E) \Psi(z, \mu, E) dE}{\int_1 \Psi(z, \mu, E) dE}, \quad i=1, 2$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}(z) = \sigma_{j \rightarrow i}^{(0)} = \frac{\int_1 dE \int_1 \sigma_0(E' \rightarrow E) \int_{-1}^1 \Psi(z, E', \mu') d\mu' dE'}{\int_j \int_{-1}^1 \Psi(z, E', \mu') dE' d\mu'}$$

e

$$q_i(z, \mu) = \int_1 Q(z, \mu, E) dE$$

onde $\sigma_{ij}^{(0)}$ é a secção de choque de transferência do grupo j para o grupo i ($i, j = 1, 2$) e admitiu-se que o fluxo angular possa ser escrito como o produto de duas funções, uma dependendo de posição e do cosseno do ângulo zenital e outra apenas de energia, a fim de eliminar-se a dependência angular nas constantes de grupo, acima definidas.

Desta maneira, com essas simplificações, a equação de transporte, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi_1(z, \mu) + \sigma_1 \Psi_1(z, \mu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{11}^{(0)} \Psi_1(z, \mu') d\mu' \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{12}^{(0)} \Psi_2(z, \mu') d\mu' + q_1(z, \mu) \end{aligned} \quad (a) \quad (2.2.1)$$

e

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi_2(z, \mu) + \sigma_2 \Psi_2(z, \mu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{21}^{(0)} \Psi_1(z, \mu') d\mu' \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{22}^{(0)} \Psi_2(z, \mu') d\mu' + q_2(z, \mu) \end{aligned} \quad (b)$$

onde $\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{s,ij}^{(0)} + \chi_j \nu_j \sigma_{fj}^{(0)}$; $\sigma_{s,ij}^{(0)}$ é a secção de choque de transferência de grupo devido espalhamento isotrópico; ν_j é o número médio de nêutrons de fissão, gerados no grupo j ; $\sigma_{fj}^{(0)}$ é a secção de choque de fissão do grupo j ; e χ_j é definido como:

$$\chi_i = \int \chi(E) dE$$

onde $\chi(E)$ é o "espectro de fissão" normalizado, $\chi_1 + \chi_2 = 1$. Obviamente para meios não multiplicativos, o termo $\chi_j \nu_j \sigma_{jt}$ é nulo.

Considerando-se, sem perda de generalidade, $\sigma_1 > \sigma_2$ e definindo-se a "variável ótica", $x = \sigma_2 z$ (variável adimensional definida em unidades do "livre caminho médio) a equação de Transporte para o modelo de dois grupos geometria plana, meio homogêneo e espalhador isotrópico, pode ser escrita na forma vetorial:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{I}(x, \mu) + \underline{\Sigma} \underline{I}(x, \mu) = \underline{Q} \int_{-1}^1 \underline{I}(x, \mu') d\mu' + \underline{S}(x, \mu) \quad (2.2.3)$$

onde os elementos do vetor coluna $\underline{I}(x, \mu)$ são os fluxos angulares de cada grupo; μ é o cosseno da direção de propagação em relação ao eixo x ; a matriz $\underline{\Sigma}$ definida como:

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > 1 \quad (2.2.4)$$

e a matriz transferência \underline{Q} definida tal que:

$$q_{ij} = \sigma_{s_{ij}}^{(0)} / 2\sigma_2 \quad (2.2.5)$$

sendo \underline{Q} não simétrica e considerando-se $\det \underline{Q} \neq 0$. Por fim \underline{S} é o vetor que considera os termos de fonte externa:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} q_1 / \sigma_2 \\ q_2 / \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

2.3 – Método de Expansão em Auto-Funções Singulares (Método de Case)

Apesar das soluções elementares da equação de Transporte em dois grupos, segundo o método de expansão em auto funções singulares, poderem ser encontradas na literatura especializada*, aqui se resumirão os principais resultados, a fim das análises posteriores tornarem-se mais compreensíveis e também para se estabelecer o formalismo usado

* O caso de $\det \underline{Q} = 0$ foi resolvido por Siewert e Zweifel⁽⁵⁴⁾.

** É interessante salientar que enquanto a teoria em um grupo é facilmente encontrada em textos padrões, tais como nos livros de Case e Zweifel⁽¹⁰⁾, Bell e Glasstone⁽³⁾, e Davison⁽¹³⁾, a teoria em dois grupos é apenas encontrada em textos recentes⁽¹⁸⁾.

Na equação anterior foi visto que a matriz transferência Q , Eq.(2.2.3), é em geral não simétrica. Porém para o desenvolvimento do método a ser exposto é preferível uma forma simétrica. Para tal seja a matriz (2×2) , \underline{P} , com elementos dados por:

$$p_{ij} = (q_{21}/q_{12})^{1/2} \delta_{ij} ; q_{12} q_{21} \neq 0 \quad (2.3.1)$$

Definindo-se um vetor $\underline{\Psi}(x, \mu)$ em função do vetor fluxo angular por:

$$\underline{\Psi}(x, \mu) = \underline{P} \underline{I}(x, \mu)$$

ou

$$\underline{I}(x, \mu) = \underline{P}^{-1} \underline{\Psi}(x, \mu) \quad (2.3.2)$$

A equação homogênea de (2.2.3) pode ser pré-multiplicada por \underline{P} , fornecendo como resultado a equação,

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{\Psi}(x, \mu) + \underline{\Sigma} \underline{\Psi}(x, \mu) = \underline{C} \int_{-1}^1 \underline{\Psi}(x, \mu') d\mu' \quad (2.3.3)$$

Com a matriz \underline{C} , simétrica, dada por:

$$\underline{C} = \underline{P} \underline{Q} \underline{P}^{-1} \quad (2.3.4)$$

Desta forma, ao invés de se procurar a solução da Eq.(2.2.3), resolver-se-á a Eq.(2.3.3), e o vetor fluxo angular poderá ser encontrado através de (2.3.2).

Propondo-se, para a Eq.(2.3.3) uma solução do tipo:

$$\underline{\Psi}(x, \mu) = \underline{F}(\nu, \mu) e^{-x/\nu} \quad (2.3.5)$$

sendo ν qualquer número complexo.

Pode-se inserir (2.3.5) em (2.3.3), para obter;

$$(\nu \underline{\Sigma} - \mu \underline{E}) \underline{F}(\nu, \mu) = \nu \underline{C} \underline{M}(\nu) \quad (2.3.6)$$

onde \underline{E} é a matriz identidade (2×2) e $\underline{M}(\nu)$ é dado por:

$$\underline{M}(\nu) = \int_{-1}^1 \underline{F}(\nu, \mu) d\mu \quad (2.3.7)$$

Dado que $\mu \in (-1, 1)$, da Equação 2.3.6) nota-se que se ν variar no intervalo $(-1, 1)$, ter-se-á auto-funções singulares. Por tal motivo, divide-se os possíveis valores de ν em dois espectros:

$\nu \notin (-1, 1)$ – espectro discreto

$\nu \in (-1, 1)$ – espectro contínuo.

Para o espectro discreto, tem-se que os possíveis auto-vetores são dados por:

$$\underline{F}(\nu, \mu) = \nu \underline{K}(\nu, \mu) \underline{C} \underline{M}(\nu) \quad (2.3.8)$$

onde

$$\underline{K}(\nu, \mu) = (\nu \underline{\Sigma} - \mu \underline{E})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma\nu - \mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\nu - \mu} \end{bmatrix} \quad (2.3.9)$$

Da condição de normalização (2.3.7), tem-se que,

$$(\underline{E} - \mu) \int_{-1}^1 \underline{K}(\nu, \mu) \underline{C} d\mu \underline{M}(\nu) = \underline{0} \quad (2.3.10)$$

Definindo-se a "matriz dispersão" por:

$$\underline{\Delta}(z) = \underline{E} - z \int_{-1}^1 \underline{K}(z, \mu) \underline{C} d\mu = \underline{E} - z \int_{-1}^1 \underline{I}(\mu) \frac{d\mu}{z - \mu} \underline{C} \quad (2.3.11)$$

onde

$$\underline{I}(\mu) = \begin{bmatrix} t(\mu) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad t(\mu) = 1; \quad \mu \in (-1/\sigma, 1/\sigma) \\ = 0; \quad \mu \text{ em outro intervalo.}$$

A Equação(2.3.10), torna-se:

$$\underline{\Delta}(\nu) \underline{M}(\nu) = \underline{0} ; \quad \nu \notin (-1, 1) \quad (2.3.12)$$

Portanto para esta equação possuir solução não-trivial, tem-se,

$$\det \Lambda(z) = \Lambda(z) = 0 \quad (2.3.13)$$

Desta maneira, os possíveis valores de ν no espectro discreto são fornecidos pela solução da Equação (2.3.13), sendo chamados "auto-valores discretos". Obviamente para cada auto-valor, tem-se o auto-vetor correspondente dado pela Equação (2.3.9).

Uma forma mais explícita para a equação (2.3.13) pode ser obtida como:

$$\begin{aligned} \Lambda(z) = & 1 - 2zc_{11} \tau(1/az) - 2zc_{22} \tau(1/z) \\ & + 4z^2 C z^2 \tau(1/z) \tau(1/az) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

onde introduziram-se as abreviações $C = \det C$ e $\tau(z) = \tanh^{-1}(z)$.

Siewert e Shieh⁽⁵³⁾ baseados no cálculo da variação do argumento da função $\Lambda(z)$, no plano complexo, resumiram o número de auto-valores discretos de acordo com o comportamento da matriz C (e portanto do meio material). Na Tabela II.3.1, reproduz-se estes resultados.

Tabela II.3.1

Zeros da matriz dispersão⁽⁵³⁾

Condição	R=izes
$C = 0$ $c_{11} + ac_{22} < a/2$ $c_{11} + ac_{22} > a/2$ $c_{11} + ac_{22} = a/2$	2 reais 2 imaginárias 2 infinitas
$C < 0$ $c_{11} + ac_{22} - 2C < a/2$ $c_{11} + ac_{22} - 2C > a/2$ $c_{11} + ac_{22} - 2C = a/2$	2 reais 2 imaginárias 2 infinitas
$C > 0$ $c_{22} > 2C\tau(1/a)$ $c_{11} + ac_{22} - 2C < a/2$ $c_{11} + ac_{22} - 2C > a/2$ $c_{11} + ac_{22} - 2C = a/2$	2 reais 2 imaginárias 2 infinitas
$C > 0$ $c_{11} \leq a/2$ e $c_{22} \geq 1/2$ ou $c_{11} > a/2$ e $c_{22} \leq 1/2$	2 reais e 2 imaginárias
$c_{22} \leq 2C\tau(1/a)$ $c_{11} \leq a/2$ e $c_{22} \leq 1/2$ $c_{11} > a/2$ e $c_{22} > 1/2$	$\begin{cases} c_{11} + ac_{22} - 2C < a/2 & 4 \text{ reais} \\ c_{11} + ac_{22} - 2C > a/2 & 2 \text{ reais e } 2 \text{ imaginárias} \\ c_{11} + ac_{22} - 2C = a/2 & 2 \text{ reais e } 2 \text{ infinitas} \end{cases}$ $\begin{cases} c_{11} + ac_{22} - 2C < a/2 & 4 \text{ imaginárias} \\ c_{11} + ac_{22} - 2C > a/2 & 2 \text{ reais e } 2 \text{ imaginárias} \\ c_{11} + ac_{22} - 2C = a/2 & 2 \text{ imaginárias e } 2 \text{ infinitas} \end{cases}$

Para o espectro contínuo, $\nu \in (-1, 1)$, existe a possibilidade de $\mu = \nu$ (lembrando que $\mu \in (-1, 1)$) e portanto deve-se adicionar ao auto-vetor um termo que leve em conta este fato. Dado que a "distribuição delta de Dirac" representa esta possibilidade matemática, os auto-vetores contínuos são escritos como:

$$\underline{F}(\nu, \mu) = [\nu \underline{K}(\nu, \mu) + \omega(\nu) \underline{\delta}(\nu, \mu)] \underline{C} \underline{M}(\nu) \quad (2.3.16)$$

onde

$$\underline{K}(\nu, \mu) = \begin{bmatrix} P\left(\frac{1}{\sigma\nu - \mu}\right) & 0 \\ 0 & P\left(\frac{1}{\nu - \mu}\right) \end{bmatrix} \quad (2.3.16)$$

$$\underline{\delta}(\nu, \mu) = \begin{bmatrix} \delta(\sigma\nu - \mu) & 0 \\ 0 & \delta(\nu - \mu) \end{bmatrix} \quad (2.3.17)$$

Sendo que $P(1/x)$ significa que a integral sobre $1/x$ deve ser efetuada em termos do "Valor Principal de Cauchy"; $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac; e $\omega(\nu)$ é uma função arbitrária. É interessante salientar que tanto o valor principal de Cauchy como a função delta de Dirac, não possuem nenhum significado, exceto quando dentro de integrais (ao menos, é claro, quando não existir a possibilidade de $\mu = \nu$ e neste caso a equação reduz-se a (2.3.8)). Portanto os auto-vetores contínuos não são funções vetoriais, no sentido usual, mas "distribuições", segundo o formalismo de Schwartz.

O auto-vetor, (2.3.15), deve satisfazer a condição de normalização, (2.3.7), e portanto:

$$[\underline{\lambda}(\nu) - \omega(\nu) \underline{I}(\nu) \underline{C}] \underline{M}(\nu) = \underline{0} \quad (2.3.18)$$

onde:

$$\underline{\lambda}(\nu) = \underline{E} + \nu P \int_{-1}^1 \underline{I}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' - \nu} \underline{C} \quad (2.3.19)$$

Desta forma, a função arbitrária $\omega(\nu)$ pode ser determinada através de condição de que a Equação (2.3.18) tenha solução não trivial, ou seja:

$$\det [\underline{\lambda}(\nu) - \omega(\nu) \underline{I}(\nu) \underline{C}] = 0 \quad (2.3.20)$$

Dependendo dos valores de ν assumir, no intervalo $(-1, 1)$, a Equação (2.3.20) fornece diferentes soluções para $\omega(\nu)$.

Região 1 $\rightarrow \nu \in (-1/\sigma, 1/\sigma)$

Região 2 $\rightarrow \nu \in (-1, -1/\sigma) \cup (1/\sigma, 1)$

Para $\nu \in 1$, tem-se que a Equação (2.3.20) fornece duas soluções, $\omega_1^{(1)}(\nu)$ e $\omega_2^{(1)}(\nu)$ e para $\nu \in 2$ uma solução $\omega^{(2)}(\nu)$. Portanto, tem-se no intervalo $(-1, 1)$ os auto-vetores contínuos.

$$\underline{F}_\alpha^{(1)}(\nu, \mu) = [\nu \underline{K}(\nu, \mu) + \omega_\alpha^{(1)}(\nu) \underline{\delta}(\nu, \mu)] \underline{C} \underline{M}_\alpha^{(1)}(\nu, \mu); \nu \in \textcircled{1}, \alpha = 1, 2$$

(2.3.21)

$$\underline{F}^{(2)}(\nu, \mu) = [\nu \underline{K}(\nu, \mu) + \omega^{(2)}(\nu) \underline{\delta}(\nu, \mu)] \underline{C} \underline{M}^{(2)}(\nu, \mu) \quad \nu \in \textcircled{2}$$

Portanto a solução geral da equação de Transporte será uma combinação linear dos auto-vetores, ou seja:

$$\psi(x, \mu) = \sum_{i=1}^{\kappa} [A(\nu_i) \underline{F}(\nu_i, \mu) e^{-x/\nu_i} + A(-\nu_i) \underline{F}(-\nu_i, \mu) e^{x/\nu_i}]$$

$$+ \int_{\textcircled{1}} [A^{(1)}(\nu) \underline{F}_1^{(1)}(\nu, \mu) + A_2^{(1)}(\nu) \underline{F}_2^{(1)}(\nu, \mu)] e^{-x/\nu} d\nu$$

$$+ \int_{\textcircled{2}} A^{(2)}(\nu) \underline{F}^{(2)}(\nu, \mu) e^{-x/\nu} d\nu$$

(2.3.22)

onde κ é o número de auto-valoros discretos, e $A(\pm \nu_i)$, $A_1^{(1)}(\nu)$, $A_2^{(1)}(\nu)$, e $A^{(2)}(\nu)$ os coeficientes da expansão, e serem determinados a partir das condições de contorno de cada problema específico.

2.4 – Ortogonalidade e Completividade dos Auto-vetores

Os problemas em que o método de Case se aplica, são tais que as condições de contorno resultam nas seguintes expansões, para uma função vetorial, $\underline{f}(\mu)$, conhecida:

$$\underline{f}(\mu) = \sum_{i=1}^{\kappa} [A(\nu_i) \underline{F}(\nu_i, \mu) + A(-\nu_i) \underline{F}(-\nu_i, \mu)]$$

$$+ \int_{\textcircled{1}} [A^{(1)}(\nu) \underline{F}_1^{(1)}(\nu, \mu) + A_2^{(1)}(\nu) \underline{F}_2^{(1)}(\nu, \mu)] d\nu$$

$$+ \int_{\textcircled{2}} A^{(2)}(\nu) \underline{F}^{(2)}(\nu, \mu) d\nu; \quad \mu \in (-1, 1)$$

(2.3.1)

$$\begin{aligned} \underline{f}(\mu) = & \sum_{i=1}^k A_i(\nu_i) \underline{F}_i(\nu_i, \mu) + \int_0^{1/\sigma} [A_1^{(1)}(\nu) \underline{F}_1^{(1)}(\nu, \mu) + A_2^{(1)}(\nu) \underline{F}_2^{(1)}(\nu, \mu)] d\nu \\ & + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(\nu) \underline{F}^{(2)}(\nu, \mu) d\nu ; \quad \mu \in (0, 1) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

A expansão (2.4.1) normalmente aparece de problemas em espaço infinito e a (2.4.2) que é de maior interesse neste trabalho, em problemas de semi-espacos.

A primeira questão que surge é saber se as expansões acima são "completas" para qualquer tipo de função vetorial, isto é, se uma dada função pode ser expandida em termos dos auto-vetores desenvolvidos. Em segundo lugar, se estes auto-vetores formam um conjunto ortogonal, possibilitando desta forma a determinação dos seus coeficientes.

As respostas a estas questões são mostradas nos teoremas abaixo, os quais aqui serão apenas enunciados, sendo suas demonstrações encontradas na bibliografia citada no Capítulo 1.

TEOREMA 1 : Os auto-vetores $\underline{F}(+\nu_i, \mu)$, $\underline{F}(-\nu_i, \mu)$; $\underline{F}_1^{(1)}(\nu, \mu)$ e $\underline{F}_2^{(1)}(\nu, \mu)$, $\nu \in \textcircled{1}$, e $\underline{F}^{(2)}(\nu, \mu)$, $\nu \in \textcircled{2}$ formam uma base completa para a expansão de um vetor de Holder $\underline{f}(\mu)$, definido no intervalo $(-1, 1)$.
(Teorema da expansão no intervalo completo).

TEOREMA 2 : Os auto-vetores $\underline{F}(\nu_i)$; $\underline{F}_1^{(1)}(\nu, \mu)$ e $\underline{F}_2^{(1)}(\nu, \mu)$, $\nu \in (0, 1/\sigma)$ e $\underline{F}^{(2)}(\nu, \mu)$, $\nu \in (1/\sigma, 1)$ formam uma base completa para a expansão de um vetor de Holder, $\underline{f}(\mu)$, definido no intervalo $(0, 1)$.
(Teorema da expansão no semi-intervalo).

TEOREMA 3 : Os auto-vetores $\underline{F}(\nu_i)$, $\underline{F}(-\nu_i)$; $\underline{F}_1^{(1)}(\nu, \mu)$ e $\underline{F}_2^{(1)}(\nu, \mu)$, $\nu \in \textcircled{1}$ e $\underline{F}^{(2)}(\nu, \mu)$, $\nu \in \textcircled{2}$ formam um conjunto ortogonal no intervalo $\mu \in (-1, 1)$, no sentido que,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \underline{F}(\xi', \mu) \underline{F}(\xi, \mu) \mu d\mu = 0 ; \quad \xi \neq \xi' \\ \xi', \xi = \pm \nu_i \text{ ou } \epsilon \in (-1, 1) \end{aligned}$$

(Teorema da ortogonalidade no intervalo completo).

NOTA: O til colocado acima dos vetores, indica a operação de transposição de matrizes.

TEOREMA 4 : Os auto-vetores $\underline{F}(\nu_i)$; $\underline{F}_1^{(1)}(\nu, \mu)$, $\underline{F}_2^{(1)}(\nu, \mu)$, $\nu \in (0, 1/\sigma)$ e $\underline{F}^{(2)}(\nu, \mu)$, $\nu \in (1/\sigma, 1)$ formam um conjunto ortogonal no intervalo $\mu \in (0, 1)$, tendo como funções pesos os vetores $\underline{G}(\nu_i, \mu)$, $\underline{G}_1^{(1)}(\nu, \mu)$ e $\underline{G}_2^{(1)}(\nu, \mu)$ e $\underline{G}^{(2)}(\nu, \mu)$, $\nu \in (0, 1)$ no sentido que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underline{G}(\xi', \mu) \underline{F}(\xi, \mu) \mu d\mu = 0 ; \quad \xi \neq \xi' \\ \xi, \xi' = \nu_i \text{ ou } \epsilon \in (0, 1) \end{aligned}$$

* Uma função vetorial é dita ser um "vetor de Hölder", quando as suas componentes satisfizerem a condição de Hölder $|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq A |t_1 - t_2|^\lambda$, A e λ , constantes positivas⁽⁴⁰⁾. É interessante salientar que as funções de Hölder estão contidas na classe das funções contínuas.

onde

$$G(\xi, \mu) = [\xi K(\xi, \mu) + \omega(\xi) \delta(\xi, \mu)] \underline{h}(\mu) \underline{H}^{-1}(\xi) \underline{C} \underline{M}(\xi)$$

(Teorema da ortogonalidade no semi-intervalo)

$\underline{H}(z)$ é a matriz-H introduzida por Siewert e Ishiguro⁽⁵²⁾ (vide secção 2.5) e $\underline{h}(z)$ é escrita em função da matriz- \underline{H} , por:

$$\underline{h}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z/0) & H_{12}(z/0) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

Os teoremas expostos constituem a base teórica para aplicação do método de Case à problemas de Transporte, em particular os teoremas 2 e 4 são de fundamental importância neste trabalho.

2.5 – Método "Invariant Imbedding" e o Princípio da Invariância

Este método é um novo tratamento para problemas de Transporte da radiação, e consiste na derivação de uma equação integral para a função reflexão (ou para a função espalhamento) de um semi-espaço, utilizando-se do "Princípio da Invariância", o qual, como originalmente foi estabelecido na Astrofísica, estabelece:

"É invariante a radiação emergente de um semi-espaço plano, infinito de atmosfera pela adição (ou subtração) de camadas arbitrárias da atmosfera".

Apesar do método ter-se originado e ter sido estudado sistematicamente em Transferência Radiativa (Astrofísica), aqui se mostra, de maneira resumida o seu uso em Teoria de Transporte de nêutrons.

Para tal, define-se a matriz espalhamento $\underline{S}(\mu, \mu')$, para um semi-espaço homogêneo, não-multiplicativo, relacionando na interface a distribuição angular emergente com a incidente, por:

$$\underline{\Psi}(0, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}(\mu, \mu') \underline{\Psi}(0, \mu') d\mu' ; \quad \mu \in (0, 1) \quad (2.5.1)$$

onde $\underline{\Psi}(x, \mu)$; $\mu \in (-1, 1)$, satisfaz a Eq. (2.3.3).

O "princípio da invariância", assegura que a Eq.(2.5.1) vale para qualquer espessura x , ou seja,

$$\underline{\Psi}(x, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}(\mu, \mu') \underline{\Psi}(x, \mu') d\mu' ; \quad x \geq 0 ; \quad \mu \in (0, 1) \quad (2.5.2)$$

Inserindo-se (2.5.2) em (2.3.3) e após um tratamento matemático conveniente, encontra-se que a matriz espalhamento é dada por:

$$\underline{S}(\mu, \mu') = \begin{bmatrix} s_{11}(\mu/\sigma, \mu'/\sigma) & s_{12}(\mu/\sigma, \mu') \\ s_{21}(\mu, \mu'/\sigma) & s_{22}(\mu, \mu') \end{bmatrix} \quad (2.5.3)$$

onde $s_{\alpha\beta}$ são os elementos da matriz.

$$\underline{s}(\mu, \mu') = \frac{2\mu\mu'}{\mu + \mu'} \underline{H}(\mu) \underline{C} \underline{\bar{H}}(\mu') \quad (2.5.4)$$

A Matriz-H, introduzida por Siewert e Ishiguro⁽⁵²⁾ como uma generalização da função H de Chandrasekhar⁽¹²⁾ para o modelo de dois grupos, pode ser calculada da equação integral.

$$\underline{H}(\mu) = \underline{E} + \mu \underline{H}(\mu) \underline{C} \int_0^1 \underline{\bar{H}}(\mu') \underline{T}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' + \mu} \quad (2.5.5)$$

É interessante salientar que Siewert et alii⁽⁵⁰⁾ mostraram a unicidade de solução da Eq.(2.5.5) e portanto, de (2.5.4), é única a solução da matriz espalhamento, para um dado meio material. Desta forma, calculando-se a matriz H pode-se calcular a matriz \underline{S} , e portanto o fluxo angular emergente, se o fluxo angular incidente é dado como condição de contorno.

2.6 – Fórmulas Explícitas

Embora as representações dos auto-vetores na região ①, anteriormente desenvolvidas, serem convenientes nas demonstrações das propriedades de ortogonalidade e completividade, para uso em aplicações numéricas é conveniente introduzir-se novas fórmulas explícitas, dado que para $\nu \in ①$ a equação que define a função $\omega(\nu)$, (2.3.20) é quadrática e portanto as soluções $\omega_1^{(1)}$ e $\omega_2^{(1)}$ envolvem radicais. Para eliminar essa dificuldade, Siewert e Zweifel⁽⁵⁴⁾, sugeriram usar-se a combinação linear:

$$\underline{\psi}_\alpha^{(1)}(\nu, \mu) = T_{\alpha 1}(\nu) \underline{F}_1^{(1)}(\nu, \mu) + T_{\alpha 2}(\nu) \underline{F}_2^{(1)}(\nu, \mu) ; \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.6.1)$$

e uma normalização do tipo,

$$\int_{-1}^1 \underline{\psi}_\alpha^{(1)}(\nu, \mu) d\mu = \underline{U}_\alpha^{(1)} \quad (2.6.2)$$

onde

$$\underline{U}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bullet \quad \underline{U}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desta maneira, desenvolvendo-se algebricamente as expressões acima, e usando-se o formalismo já desenvolvido, obtém-se as formas explícitas para os auto-vetores:

$$\psi_1^{(1)}(\nu, \mu) = \begin{bmatrix} c_{11} \nu P\left(\frac{1}{\sigma\nu - \mu}\right) + \lambda_{11}(\nu) \delta(\sigma\nu - \mu) \\ c_{21} \nu P\left(\frac{1}{\nu - \mu}\right) + \lambda_{21}(\nu) \delta(\nu - \mu) \end{bmatrix} \quad (2.6.3)$$

$$\psi_2^{(1)}(\nu, \mu) = \begin{bmatrix} c_{12} \nu P\left(\frac{1}{\sigma\nu - \mu}\right) + \lambda_{12}(\nu) \delta(\sigma\nu - \mu) \\ c_{22} \nu P\left(\frac{1}{\nu - \mu}\right) + \lambda_{22}(\nu) \delta(\nu - \mu) \end{bmatrix} \quad (2.6.4)$$

Para os outros auto-vetores tem-se a normalização:

$$\underline{U}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \mu) d\mu \quad (2.6.5)$$

onde, de (2.3.12) e (2.3.18) tem-se:

$$\underline{U}(\pm\nu_i) = \begin{bmatrix} -\Lambda_{12}(\nu_i) \\ \Lambda_{11}(\nu_i) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{U}^{(2)}(\nu) = \begin{bmatrix} -\lambda_{12}(\nu) \\ \lambda_{11}(\nu) \end{bmatrix} \quad ; \quad \nu \in \textcircled{2} \quad (2.6.6)$$

Desta forma, obtém-se as correspondentes formas explícitas para os auto-vetores:

$$\Psi(\pm\nu_i, \mu) = \begin{bmatrix} c_{12} \nu_i / (\sigma\nu_i \mp \mu) \\ \nu_i f(\nu_i) / (\nu_i \mp \mu) \end{bmatrix} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.6.7)$$

$$\psi_2^{(2)}(\nu, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{c_{12} \nu}{\sigma\nu - \mu} \\ \nu f(\nu) P\left(\frac{1}{\nu - \mu}\right) + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \end{bmatrix} \quad (2.6.8)$$

onde:

$$f(\xi) = c_{22} - 2C\nu \tau(1/\sigma\nu) \quad (2.6.9)$$

e

$$\lambda(\nu) = \det \underline{\lambda}(\nu) = 1 - 2c_{11} \nu \tau(1/\sigma\nu) - 2c_{22} \nu \tau(\nu) + 4C\nu^2 \tau(\nu) \tau(\sigma\nu) \quad (2.6.10)$$

Siewert e Zweifel⁽⁵⁴⁾ mostraram que os auto-vetores, quando expressos pelas fórmulas explícitas acima, são ortogonais. Aqui resumem-se os resultados relativos as relações de ortogonalidade.

$$\int_{-1}^1 \bar{X}(\xi', \mu) \psi(\xi, \mu) \mu d\mu = 0 ; \xi \neq \xi' , \xi \xi' = \pm \nu_i \text{ ou } \epsilon(-1,1) \quad (a)$$

$$\int_0^1 \bar{\Theta}(\xi', \mu) \psi(\xi, \mu) \mu d\mu = 0 ; \xi \neq \xi' , \xi \xi' = \nu_i \text{ ou } \epsilon(0,1) \quad (b) \quad (2.6.11)$$

e

$$\int_{-1}^1 \bar{X}(\pm \nu_i, \mu) \psi(\pm \nu_i, \mu) \mu d\mu = \pm N(\nu_i) ; i = 1, 2, \dots, k \quad (a)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{X}_\alpha^{(1)}(\nu', \mu) \psi_\beta^{(1)}(\nu, \mu) \mu d\mu = N^{(1)}(\nu) \delta(\nu - \nu') \delta_{\alpha\beta} ; \nu, \nu' \in \textcircled{1}, \alpha, \beta = 1, 2 \quad (b)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{X}^{(2)}(\nu', \mu) \psi^{(2)}(\nu, \mu) \mu d\mu = N^{(2)}(\nu) \delta(\nu - \nu') ; \nu, \nu' \in \textcircled{2} \quad (c) \quad (2.6.12)$$

e

$$\int_0^1 \bar{\Theta}(\nu_i, \mu) \psi(\nu_i, \mu) \mu d\mu = N(\nu_i) ; i = 1, 2, \dots, k \quad (a)$$

$$\int_0^1 \bar{\Theta}_\alpha^{(1)}(\nu', \mu) \psi_\beta^{(1)}(\nu, \mu) \mu d\mu = N^{(1)}(\nu) \delta(\nu - \nu') \delta_{\alpha\beta} ; \nu, \nu' \in (0, 1/\sigma), \alpha, \beta = 1, 2 \quad (b)$$

$$\int_0^1 \bar{\Theta}^{(2)}(\nu', \mu) \psi^{(2)}(\nu, \mu) \mu d\mu = N^{(2)}(\nu) \delta(\nu - \nu') ; \nu, \nu' \in (1/\sigma, 1) \quad (c) \quad (2.6.13)$$

onde

$$\bar{X}(\pm \nu_i, \mu) = \psi(\pm \nu_i, \mu) \quad (a)$$

$$\bar{X}_1^{(1)}(\nu, \mu) = N_{22}(\nu) \psi_1^{(1)}(\nu, \mu) - N_{12}(\nu) \psi_2^{(1)}(\nu, \mu) \quad (b)$$

(2.6.14)

$$\bar{X}_2^{(1)}(\nu, \mu) = N_{11}(\nu) \psi_2^{(1)}(\nu, \mu) - N_{21}(\nu) \psi_1^{(1)}(\nu, \mu) \quad (c)$$

$$\bar{X}^{(2)}(\nu, \mu) = \psi^{(2)}(\nu, \mu) \quad (d)$$

e

$$\Theta(\nu_i, \mu) = \nu_i K(\nu_i, \mu) h(\mu) H^{-1}(\nu_i) C U(\nu_i) \quad (a)$$

$$\underline{V}_a^{(1)}(\nu, \mu) = [\nu \underline{K}(\nu, \mu) \underline{H}(\mu) \underline{H}^{-1}(\nu) \underline{C} + \delta(\nu, \mu) \lambda(\nu)] \underline{V}_a^{(1)}(\nu) ; \nu \in (0, 1/\sigma), \sigma = 1, 2 \quad (b)$$

$$\underline{\Theta}^{(2)}(\nu, \mu) = [\nu \underline{K}(\nu, \mu) \underline{H}(\mu) \underline{H}^{-1}(\nu) \underline{C} + \delta(\nu, \mu) \lambda(\nu)] \underline{U}^{(2)}(\nu) ; \nu \in (1/\sigma, 1) \quad (c) \quad (2.6.15)$$

onde

$$\begin{aligned} N_{11}(\nu) &= 1 - 4c_{11} \nu \tau(\sigma \nu) + 4\nu^2 [c_{11}^2 \tau^2(\sigma \nu) + c_{12} c_{21} \tau^2(\nu)] \\ &\quad + \pi^2 \nu^2 (c_{11}^2 + c_{12} c_{21}) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} N_i(\nu) &= c_{ii} [4c_{11} \nu^2 \tau^2(\sigma \nu) + 4c_{22} \nu^2 \tau^2(\nu) - 2\nu \tau(\sigma \nu)] \\ &\quad - 2\nu \tau(\nu) + \pi^2 \nu^2 (c_{11} + c_{22}) ; i \neq j \end{aligned} \quad (b) \quad (2.6.16)$$

$$\begin{aligned} N_{22}(\nu) &= 1 - 4c_{22} \nu \tau(\nu) + 4\nu^2 [c_{22}^2 \tau^2(\nu) + c_{12} c_{21} \tau^2(\sigma \nu)] \\ &\quad + \pi^2 \nu^2 (c_{22}^2 + c_{12} c_{21}) \end{aligned} \quad (c)$$

e

$$\underline{V}_1^{(1)}(\nu) = N_{22}(\nu) \underline{U}_1^{(1)} - N_{12}(\nu) \underline{U}_2^{(1)} \quad (a)$$

$$\underline{V}_2^{(1)}(\nu) = N_{11}(\nu) \underline{U}_2^{(1)} - N_{21}(\nu) \underline{U}_1^{(1)} \quad (b) \quad (2.6.17)$$

Os "fatores de normalização" sendo dados por:

$$N(\nu_i) = 2\nu_i^2 \left\{ c_{12}^2 \left[\frac{\sigma \nu_i}{(\sigma \nu_i)^2 - 1} - \tau(1/\sigma \nu_i) \right] + [c_{22} - 2C\nu_i \tau(1/\sigma \nu_i)]^2 \right.$$

$$\left. \left[\frac{\nu_i}{\nu_i - 1} - \tau(1/\nu_i) \right] \right\} \quad (a)$$

$$N^{(1)}(\nu) = \nu \Lambda^+(\nu) \Lambda^-(\nu), \quad \nu \in \textcircled{1} \quad \text{ou} \quad \nu \in (0, 1/\sigma) \quad (b) \quad (2.6.18)$$

$$N^{(2)}(\nu) = \nu \Lambda^+(\nu) \Lambda^-(\nu), \quad \nu \in \textcircled{2} \quad \text{ou} \quad \nu \in (1/\sigma, 1) \quad (c)$$

onde $\Lambda^\pm(\nu)$ são os valores limites quando se aproxima da região de singularidade de $\Lambda(z)$, por dentro e abaixo. Sendo dados por^(1b).

$$\Lambda^{\dagger}(\nu) = 1 - 2\nu c_{11} \tau'(\sigma\nu) - 2\nu c_{22} \tau(\nu) + 4\nu^2 C \tau'(\sigma\nu) \tau(\nu) - \pi^2 \nu^2 C \tau(\nu) \\ + i\pi\nu [c_{11} t(\nu) + c_{22} - 2\nu C t(\nu) \tau(\nu) - 2\nu C \tau'(\sigma\nu)]; \quad \nu \in (-1, 1) \quad (2.6.19)$$

onde

$$\tau'(\sigma\nu) = \tau(\sigma\nu); \quad \nu \in (1)$$

$$\tau'(\sigma\nu) = \tau(1/\sigma\nu); \quad \nu \in (2)$$

Para finalizar, mostram-se os resultados de integrais, que são úteis na aplicação deste método em problemas de semi-espacos adjacentes:

$$\int_0^1 \bar{\Theta}(\nu, \mu) \psi(-\nu, \mu) \mu d\mu = \frac{\nu \nu_1}{\nu_1 + \nu_1} \bar{U}(\nu_1) \underline{C} \bar{H}^{-1}(\nu_1) \underline{C}^{-1} H^{-1}(\nu_1) \underline{C} U(\nu_1) \quad (a)$$

$$\int_0^1 \bar{\Theta}_{\alpha}^{(1)}(\nu, \mu) \psi(-\nu, \mu) \mu d\mu = \frac{\nu \nu_1}{\nu + \nu_1} \bar{V}_{\alpha}^{(1)}(\nu) \underline{C} \bar{H}^{-1}(\nu) \underline{C}^{-1} H^{-1}(\nu_1) \underline{C} U(\nu_1) \quad (b)$$

$$\int_0^1 \bar{\Theta}^{(2)}(\nu, \mu) \psi(-\nu, \mu) \mu d\mu = \frac{\nu \nu_1}{\nu + \nu_1} \bar{U}^{(2)}(\nu) \underline{C} \bar{H}^{-1}(\nu) \underline{C}^{-1} H^{-1}(\nu_1) \underline{C} U(\nu_1) \quad (c) \quad (2.6.20)$$

3 – TRANSPORTE DE NÉUTRONS EM DOIS SEMI-ESPAÇOS ADJACENTES* (DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO)

Neste capítulo introduz-se um novo método de solução de problemas de transporte de nêutrons em dois semi-espacos adjacentes, no modelo de dois-grupos, e espalhamento isotrópico, através de uma combinação de técnica de expansão em auto-funções singulares e do princípio de invariança. Este novo método de solução reduz este tipo de problema a uma forma viável de ser numericamente solucionável.

3.1 – Problema de Milne

Pretende-se neste problema determinar a distribuição de nêutrons em dois semi-espacos adjacentes, num dos quais existe uma fonte de nêutrons no infinito.

Desta maneira, distante da fonte e distante da interface (tomada como $x=0$), espera-se que os nêutrons sigam a mesma distribuição assintótica, obtida por uma fonte plana em um meio infinito, isto

* Este trabalho foi publicado por Ishiguro e o autor, no Transaction of American Nuclear Society, vide referência 21.

é, que a solução decaia exponencialmente, com um "comprimento de relaxação" ν_1 (ν_1 sendo o maior auto-valor discreto), relativamente à fonte.

Aqui, os meios são considerados homogêneos, espalhadores isotrópicos e não multiplicativos. Denota-se o meio do lado direito ($x > 0$), no qual está a fonte, por "meio 1", e o da esquerda ($x < 0$) como "meio 2", sendo que se diferencia as funções e parâmetros aos meios 1 e 2 com os índices 1 e 2, respectivamente. Portanto a equação de transporte em cada meio é da forma:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{l}_i(x, \mu) + \Sigma_i \underline{l}_i(x, \mu) = Q_i \int_{-1}^1 \underline{l}_i(x, \mu') d\mu' ; \quad i = 1, 2 \quad (2.3.1)$$

sendo as "condições de contorno" escritas como:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{l}_2(x, \mu) = \underline{0} \quad (a)$$

$$\underline{l}_1(0, \mu) = \underline{l}_2(0, \mu) ; \quad \mu \in (-1, 1) , \quad \mu \neq 0 \quad (b) \quad (3.1.2)$$

$$\underline{l}_1(x, \mu) \rightarrow \underline{\psi}_1(-\nu_1, \mu) e^{x/\nu_1} ; \quad \text{para } x > 0 \text{ e bem distante da interface } (x \rightarrow \infty) \quad (c)$$

(ν_1 denota o maior auto-valor).

As "condições de contorno" acima refletem as seguintes situações físicas:

- a) A distribuição de nêutrons deve-se anular em $x \rightarrow -\infty$, dado o meio 2 ser absorvedor e não possuir termos de fonte externa.
- b) Continuidade da distribuição angular de nêutrons na interface. Para $\mu = 0$ a continuidade não ocorre, pois sendo μ o cosseno da direcção zenital (θ) de propagação dos nêutrons, nesta "direcção angular" ($\theta = 90^\circ$) não se pode saber se os nêutrons originam-se no semi-espaço da direita (1) ou da esquerda (2).
- c) O comportamento da distribuição angular, para valores de x distantes da interface no meio 1, é igual ao comportamento devido a distribuição de uma fonte plana em um meio infinito. Dado que a equação de Boltzmann é linear, e portanto a normalização é arbitrária, tomou-se, sem perda de generalidade, o coeficiente $A(-\nu_1)$ igual a um.

Como já foi discutido, a solução da equação de transporte torna-se mais conveniente quando a matriz transferência for simétrica, desta forma a solução da Equação (2.3.1) pode ser dada por:

$$\underline{l}_1(x, \mu) = \underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_1(x, \mu) \quad (3.1.3)$$

onde a matriz \underline{P}_1 é definida por $p_{\alpha\beta} = (a_{12\alpha}/a_{1\alpha 2})^{1/2} \delta_{\alpha\beta}$, e $\underline{\Psi}_1$ é a solução da Equação (2.3.1) sujeita as condições de contorno (3.1.2) modificadas para $\underline{\Psi}_1$.

A solução geral da Equação (2.3.1) já foi discutida na secção 2.3, e portanto, utilizando-se das condições de contorno (a) e (c) e de (3.1.3), pode-se escrever a solução da equação (3.1.1) como:

$$\begin{aligned}
 \underline{\Psi}_M(x, \mu) &= P_1^{-1} \underline{\Psi}_1(x, \mu) + P_1^{-1} \underline{v}(-\nu_1, \mu) e^{x/\nu_1} ; \quad x > 0 \\
 &= P_2^{-1} \underline{\Psi}_2(x, \mu) ; \quad x < 0
 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

onde $\underline{\Psi}_1(x, \mu)$ e $\underline{\Psi}_2(x, \mu)$ são soluções típicas da Equação (2.3.1) em semi-espaços absorvedores. Sendo dadas por:

$$\begin{aligned}
 \underline{\Psi}_1(x, \mu) &= \sum_{i=1}^{\kappa_1} A(\nu_i) \underline{v}_1(\nu_i, \mu) e^{-x/\nu_i} + \int_0^{1/\sigma_1} [A_1^{(1)}(\nu) \underline{v}_{11}^{(1)}(\nu, \mu) + \\
 &+ A_2^{(2)}(\nu) \underline{v}_{12}^{(1)}(\nu, \mu)] e^{-x/\nu} d\nu + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(\nu) \underline{v}_1^{(2)}(\nu, \mu) e^{-x/\nu} d\nu ; \quad x > 0 \quad (a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\Psi}_2(x, \mu) &= \sum_{i=1}^{\kappa_1} B(-\eta_i) \underline{v}_2(-\eta_i, \mu) e^{x/\eta_i} + \int_0^{1/\sigma_2} [B_1^{(1)}(-\eta) \underline{v}_{21}^{(1)}(-\eta, \mu) + \\
 &+ B_2^{(1)}(-\eta) \underline{v}_{22}^{(1)}(-\eta, \mu)] e^{x/\eta} d\eta + \int_{1/\sigma_2}^1 B^{(2)}(-\eta) \underline{v}_2^{(2)}(-\eta, \mu) e^{x/\eta} d\eta ; \quad x < 0 \quad (b)
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

A solução do problema de Milne fornecida pela Equação (3.1.4) deve satisfazer, na interface ($x=0$), a condição de continuidade dada pela condição de contorno (b), a qual pode ser descrita por duas equações:

$$P_1^{-1} \underline{\Psi}_1(0, \mu) = P_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, \mu) - P_1^{-1} \underline{v}_1(-\nu_1, \mu) ; \quad \mu \in (0, 1) \tag{a}$$

e

$$P_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, \mu) = P_1^{-1} \underline{\Psi}_1(0, -\mu) P_1^{-1} \underline{v}_1(\nu_1, \mu) ; \quad \mu \in (0, 1) \tag{b}$$

Considerando-se um semi-espaço absorvedor, $x \geq 0$, de meio 1 e outro, $x < 0$, de meio 2, as matrizes espalhamentos $\underline{S}_i(\mu, \mu')$, $\mu, \mu' \in (0, 1)$, podem ser definidas por:

$$\underline{\Psi}_1(x, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}_1(\mu, \mu') \underline{\Psi}_1(x, \mu') d\mu' ; \quad x \geq 0, \quad \mu \in (0, 1) \tag{a}$$

e

$$\underline{\Psi}_2(x, \mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}_2(\mu, \mu') \underline{\Psi}_2(x, -\mu') d\mu' ; \quad x < 0, \quad \mu \in (0, 1) \tag{b}$$

onde as matrizes \underline{S}_i foram obtidas na secção (2.5), sendo dadas pela Equação (2.5.3).

Desta forma, considerando-se os dois semi-espacos com fluxos incidentes dados pela Equação (3.1.6), os fluxos emergentes $P_1^{-1} \Psi_1(0, -\mu)$ e $P_2^{-1} \Psi_2(0, \mu)$ podem ser obtidos a partir do "princípio da invariança", das Equações (3.1.7), e das equações de continuidade (3.1.6), como:

$$\Psi_1(0, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 S_1(\mu, \mu') [P_1 P_2^{-1} \Psi_2(0, \mu') - \Psi_1(-\nu_1, \mu')] d\mu' \quad \mu \in (0, 1) \quad (a)$$

(3.1.8)

$$\Psi_2(0, \mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 S_2(\mu, \mu') P_2 P_1^{-1} [\Psi_1(0, -\mu') + \Psi_1(\nu_1, \mu')] d\mu' \quad \mu \in (0, 1) \quad (b)$$

Estas equações constituem um conjunto de equações integrais acopladas, as quais podem facilmente ser resolvidas por iteração numérica, e portanto $\Psi_1(0, -\mu)$ e $\Psi_2(0, \mu)$ são funções conhecidas.

Das Equações (3.1.5) e (3.1.6), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{K_1} A^{(i)}(\nu) \Psi_1(\nu, \mu) + \int_0^{1/\sigma_1} [A_1^{(1)}(\nu) \Psi_{11}^{(1)}(\nu, \mu) + A_2^{(1)}(\nu) \Psi_{12}^{(1)}(\nu, \mu)] d\nu +$$

$$\int_{1/\sigma_1}^1 A^{(2)}(\nu) \Psi_1^{(2)}(\nu, \mu) d\nu = P_1 P_2^{-1} \Psi_2(0, \mu) - \Psi_1(-\nu_1, \mu) \quad ; \quad \mu \in (0, 1) \quad (a)$$

•

$$\sum_{i=1}^{K_1} B^{(i)}(-\eta) \Psi_2(\eta, \mu) + \int_0^{1/\sigma_2} [B_1^{(1)}(-\eta) \Psi_{21}^{(1)}(\eta, \mu) + B_2^{(1)}(-\eta) \Psi_{22}^{(1)}(\eta, \mu)] d\eta +$$

$$\int_{1/\sigma_2}^1 B^{(2)}(-\eta) \Psi_2^{(2)}(\eta, \mu) d\eta = P_2 P_1^{-1} [\Psi_1(0, -\mu) + \Psi_1(\nu_1, \mu)] \quad (b) \quad (3.1.9)$$

O lado direito de ambas equações são funções conhecidas, dado que $\Psi_1(0, -\mu)$ e $\Psi_2(0, \mu)$ podem ser encontradas das equações integrais acopladas (3.1.8) e $\Psi_1(-\nu_1, \mu)$ e $\Psi_2(\nu_1, \mu)$ são auto-vetores dados por (2.6.7). Desta forma as Equações (3.1.9) constituem-se em expansões típicas, no semi-intervalo $\mu \in (0, 1)$, de uma função vetorial conhecida, e portanto, usando-se as propriedades de ortogonalidade e o formalismo já estabelecido, os coeficientes podem ser facilmente encontrados:

$$A^{(i)}(\nu) = \frac{1}{N(\nu)} \int_0^1 \tilde{\Theta}_1(\nu, \mu) P_1 P_2^{-1} \Psi_2(0, \mu) \mu d\mu$$

$$\frac{1}{N(\nu)} \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \tilde{U}_1(\nu) C_1 \tilde{H}_1^{-1}(\nu) C_1^{-1} H_1^{-1}(\nu) C_1 U_1(\nu) \quad (a)$$

$$A_{\alpha}^{(1)}(\nu) = \frac{1}{N_1^{(1)}(\nu)} \int_0^1 \bar{\Theta}_{\alpha 1}^{(1)}(\nu, \mu) P_1 P_2^{-1} \Psi_2(0, \mu) \mu d\mu$$

$$- \frac{1}{N_1^{(1)}} \frac{\nu \nu_1}{\nu + \nu_1} \bar{V}_{\alpha 1}^{(1)} C_1 \bar{H}_1^{-1}(\nu) C_1^{-1} H_1^{-1}(\nu_1) C_1 U_1(\nu_1) ; \alpha = 1, 2 \quad (b)$$

$$A_{\alpha}^{(2)}(\nu) = \frac{1}{N_1^{(2)}(\nu)} \int_0^1 \bar{\Theta}_{\alpha 1}^{(2)}(\nu, \mu) P_1 P_2^{-1} \Psi_2(0, \mu) \mu d\mu$$

$$- \frac{1}{N_1^{(2)}(\nu)} \frac{\nu \nu_1}{\nu + \nu_1} \bar{U}_1^{(2)}(\nu) C_1 \bar{H}_1^{-1}(\nu) C_1^{-1} H_1^{-1}(\nu_1) C_1 U_1(\nu_1) \quad (c)$$

$$B(-\eta) = \frac{1}{N_2(\nu_1)} \int_0^1 \bar{\Theta}_2(\eta, \mu) P_2 P_1^{-1} \{ \Psi_1(0, -\mu) + \Psi_1(\nu_1, \mu) \} \mu d\mu \quad (d)$$

$$B_{\alpha}^{(1)}(-\eta) = \frac{1}{N_2^{(1)}(\eta)} \int_0^1 \bar{\Theta}_{\alpha 2}^{(1)}(\eta, \mu) P_2 P_1^{-1} \{ \Psi_1(0, -\mu) + \Psi_1(\nu_1, \mu) \} \mu d\mu ; \alpha = 1, 2 \quad (e)$$

$$B_{\alpha}^{(2)}(-\eta) = \frac{1}{N_2^{(2)}(\eta)} \int_0^1 \bar{\Theta}_{\alpha 2}^{(2)}(\eta, \mu) P_2 P_1^{-1} \{ \Psi_1(0, -\mu) + \Psi_1(\nu_1, \mu) \} \mu d\mu \quad (f) \quad (3.1.10)$$

As equações acima permitem o cálculo numérico dos coeficientes. Portanto, o vetor fluxo angular, Eq. (3.1.4) pode ser calculado para qualquer valor de x e μ , ou seja, é possível encontrar-se numericamente a distribuição de nêutrons no sistema, pelo método aqui proposto.

Para o cálculo do "vetor fluxo total", tem-se:

$$\phi_M(x) = \int_{-1}^1 I_M(x, \mu') d\mu' \quad (3.1.11)$$

e portanto

$$\phi_M(x) = P_1^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{K_1} A(\nu_i) U_1(\nu_i) e^{-x/\nu_i} + U_1(\nu_1) e^{-x/\nu_1} + \int_0^1 A^*(\nu) e^{-x/\nu} d\nu \right\} ; x > 0 \quad (3.1.12)$$

$$= P_2^{-1} \left[\sum_{i=1}^{K_1} B(-\eta_i) U_2(\eta_i) e^{x/\eta_i} + \int_0^1 B^*(-\eta) e^{x/\eta} d\eta \right]; \quad x < 0$$

onde

$$\underline{A}^*(\nu) = t(\nu) \begin{bmatrix} A_1^{(1)}(\nu) \\ A_2^{(1)}(\nu) \end{bmatrix} + (1-t(\nu)) U^{(2)}(\nu) A^{(2)}(\nu) \quad (a)$$

$$\underline{B}^*(-\eta) = t(\eta) \begin{bmatrix} B_1^{(1)}(-\eta) \\ B_2^{(1)}(-\eta) \end{bmatrix} + (1-t(\eta)) U^{(2)}(\eta) B^{(2)}(-\eta) \quad (b) \quad (3.1.13)$$

Analogamente para o cálculo do "vetor corrente", tem-se:

$$\underline{J}_M(x) = \int_{-1}^1 \mu \underline{J}_M(x, \mu) d\mu \quad (3.1.14)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \underline{J}_M(x) &= P_1^{-1} (\Sigma_1 - 2C_1) \left\{ \sum_{i=1}^{K_1} A(\nu_i) \nu_i U_1(\nu_i) e^{-x/\nu_i} + \nu_i U_1(\nu_i) e^{x/\nu_i} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \nu A^*(\nu) e^{x/\nu} d\nu \right\}; \quad x > 0 \\ &= P_2^{-1} (2C_2 - \Sigma_2) \left\{ \sum_{i=1}^{K_2} B(-\eta_i) \eta_i U_2(\eta_i) e^{x/\eta_i} + \int_0^1 \eta B^*(-\eta) e^{x/\eta} d\eta \right\}; \quad x < 0 \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Além disso a solução assintótica, ou seja aquela que não leva em conta o termo integral, pode ser escrita como:

$$\underline{\phi}_1^{Ass}(x) = P_1^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{K_1} A(\nu_i) U_1(\nu_i) e^{-x/\nu_i} + U_1(\nu_i) e^{x/\nu_i} \right\} \quad (a)$$

$$\underline{\phi}_2^{Ass}(x) = P_2^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{K_2} B(-\eta_i) U_2(\eta_i) e^{x/\eta_i} \right\} \quad (b) \quad (3.1.16)$$

Como de praxe, a "distância extrapolada" é definida como o valor z_0 que satisfaz a equação:

$$\phi_1^{Ass}(x) = 0 \quad (3.1.17)$$

Para $\kappa_1 = 1$, tem-se,

$$z_0 = -\frac{\nu_1}{2} \ln\{-A(\nu_1)\} \quad (3.1.18)$$

Para $\kappa_1 > 1$, a Equação (3.1.17) nem sempre possui solução única, podendo ter z_{01} e z_{02} diferentes, isto é, os fluxos totais assintóticos de cada grupo são extrapolados a zero em pontos diferentes⁽⁵³⁾.

3.2 – Fonte Constante

Neste problema admite-se que uma fonte isotrópica e constante é uniformemente distribuída no meio 1. Desta forma a equação de Transporte em cada meio, pode ser escrita

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I_1(x, \mu) + \Sigma_1 I_1(x, \mu) = Q_1 \int_{-1}^1 I_1(x, \mu') d\mu' + \xi \quad ; \quad x > 0 \quad (a) \quad (3.2.1)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I_2(x, \mu) + \Sigma_2 I_2(x, \mu) = Q_2 \int_{-1}^1 I_2(x, \mu') d\mu' + \eta \quad ; \quad x < 0 \quad (b)$$

onde ξ é o termo de fonte constante e com as seguintes condições de contorno:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} I_2(x, \mu) = 0 \quad (a)$$

$$I_1(0, \mu) = I_2(0, \mu) \quad ; \quad \mu \in (-1, 1), \quad \mu \neq 0 \quad (b) \quad (3.2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} I_1(x, \mu) = \text{finito} \quad (c)$$

Similarmente ao problema de Milne, ao invés de se solucionar as Equações (3.2.1), resolvem-se as equações correspondentes com matrizes transferências simétricas, ou seja, as seguintes equações:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1(x, \mu) + \Sigma_1 \Psi_1(x, \mu) = C_1 \int_{-1}^1 \Psi_1(x, \mu') d\mu' + \xi' \quad (a)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_2(x, \mu) + \Sigma_2 \Psi_2(x, \mu) = C_2 \int_{-1}^1 \Psi_2(x, \mu') d\mu' \quad (3.2.3)$$

onde $\underline{S}' = \underline{P}_1 \underline{S}$

Encontra-se o vetor fluxo angular como função de $\underline{\Psi}$ pela Equação (2.3.2).

A solução da Equação (3.2.23)b, foi discutida na secção 2 e a partir da condição de contorno (a) pode-se escrevê-la na forma da Equação (3.1.14)b. A solução de (3.2.3)a, é constituída pela soma da solução da equação homogênea com uma solução particular. A solução homogênea, com a condição de contorno (c), é uma solução típica de um semi-espaço absorvedor, do tipo de (3.1.14)a. A solução particular pode ser determinada como sendo:

$$\underline{\Psi}_p = [\Sigma_1 - 2C_1]^{-1} \underline{S}' = [\Sigma_1 - 2C_1]^{-1} \underline{P}_1 \underline{S} \quad (3.2.4)$$

Portanto a solução geral do problema da fonte constante é do tipo:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_e(x, \mu) &= \underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_1(x, \mu) + \underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_p \quad ; \quad x > 0 \\ &= \underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(x, \mu) \quad ; \quad x < 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Nota-se que a única diferença significativa entre este resultado e aquele encontrado no problema de Milne, é que o termo $\underline{\Psi}_1(-\nu_1, \mu)e^{\alpha/\nu_1}$ (que representa, no problema de Milne, o comportamento em pontos bem afastados da interface) foi substituído no problema de Milne pelo termo $\underline{\Psi}_p$. Desta forma as equações deste problema são análogas àquelas encontradas no problema de Milne, apenas com a troca dos termos acima citados. Assim, a condição de continuidade pode ser escrita como:

$$\underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_1(0, \mu) = \underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, \mu) - \underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_p \quad ; \quad \mu \in (0, 1) \quad (a)$$

$$\underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, -\mu) = \underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_1(0, -\mu) + \underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_p \quad ; \quad \mu \in (0, 1) \quad (b) \quad (3.2.6)$$

e usando-se a mesma técnica do problema de Milne, obtém-se $\underline{\Psi}_1(0, -\mu)$ e $\underline{\Psi}_2(0, \mu)$ das equações integrais acopladas:

$$\underline{\Psi}_1(0, \mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}_1(\mu, \mu') [\underline{P}_1 \underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, \mu') - \underline{\Psi}_p] d\mu' \quad ; \quad \mu \in (0, 1) \quad (a)$$

(3.2.7)

$$\underline{\Psi}_2(0, \mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}_2(\mu, \mu') \underline{P}_2 \underline{P}_1^{-1} [\underline{\Psi}_1(0, -\mu') + \underline{\Psi}_p] d\mu' \quad ; \quad \mu \in (0, 1) \quad (b)$$

Analogamente, das condições de continuidade na interface, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{K_1} A(\nu_i) \psi_1(\nu_i, \mu) + \int_0^{1/\sigma_1} [A_1^{(1)}(\nu) \psi_{11}^{(1)}(\nu, \mu) + A_2^{(1)}(\nu) \psi_{12}^{(1)}(\nu, \mu)] d\nu \\ + \int_{1/\sigma_1}^1 A^{(2)}(\nu) \psi_1^{(2)}(\nu, \mu) d\nu = P_1 P_2^{-1} \Psi_2(0, \mu) - \Psi_p \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^{K_2} B(-\eta_i) \psi_2(\eta_i, \mu) + \int_0^{1/\sigma_2} [B_1^{(1)}(-\eta) \psi_{21}^{(1)}(\eta, \mu) + B_2^{(1)}(\eta, \mu)] d\eta \\ + \int_{1/\sigma_2}^1 B^{(2)}(-\eta) \psi_2^{(2)}(\eta, \mu) d\eta = P_2 P_1^{-1} [\Psi_1(0, -\mu) + \Psi_p] \quad (b) \quad (3.2.8)$$

que constituem, também, expansões típicas no semi-intervalo. Portanto, com o mesmo procedimento anterior, pode-se determinar os coeficientes da expansão, os quais, simbolicamente, são dados por:

$$A(\xi) = \frac{1}{N_1(\xi)} \int_0^1 \tilde{\Theta}_1(\xi, \mu) \{ P_1 P_2^{-1} \Psi_2(0, \mu) - \Psi_p \} \mu d\mu ; \quad \xi = \nu_i \text{ ou } \epsilon \in (0, 1) \quad (a)$$

$$B(\xi) = \frac{1}{N_2(\xi)} \int_0^1 \tilde{\Theta}_2(\xi, \mu) \{ P_2 P_1^{-1} [\Psi_1(0, \mu) + \Psi_p] \} \mu d\mu ; \quad \xi = \eta_i \text{ ou } \epsilon \in (0, 1) \quad (b) \quad (3.2.9)$$

Determinam-se os vetores fluxo total e corrente, para o meio 2, pelas mesmas fórmulas do problema de Milne. Por outro lado, para o meio 1, notam-se algumas diferenças conforme mostram as equações abaixo:

$$\underline{J}c_1(x) = P_1^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{K_1} A(\nu_i) U_1(\nu_i) e^{-x/\nu_i} + 2\Psi_p^* + \int_0^1 A^*(\nu) e^{-x/\nu} d\nu \right\} ; \quad x > 0 \quad (3.2.10)$$

$$\underline{J}c_1(x) = P_1^{-1} (\Sigma_1 - 2C_1) \left\{ \sum_{i=1}^{K_1} A(\nu_i) \nu_i U_1(\nu_i) e^{-x/\nu_i} + \int_0^1 \nu A^*(\nu) e^{-x/\nu} d\nu \right\} ; \quad x > 0$$

4 - RESULTADOS NUMÉRICOS

A fim de ilustrar a viabilidade do método proposto na secção 3, para a solução de problemas de transporte em meios adjacentes, solucionaram-se os problemas de Milne e fonte constante em quatro diferentes meios.

Um deles (aqui denotado como "Conjunto I") consiste de água leve ordinária e os outros três, Conjuntos II, III e IV, consistem de água borada com concentrações de 1,025, 2,99 e 6,35 b/H^{*}, respectivamente. O intervalo de energia dos dois grupos, sendo:

$$\text{Grupo 1: } 0 < E < 0,0253 \text{ eV}$$

$$\text{Grupo 2: } 0,0253 \text{ eV} < E < 0,532 \text{ eV}$$

As secções de choque destes meios e grupos de energia foram encontradas por Metcalf e Zweifel⁽³⁶⁾ e são mostradas na Tabela IV.1.

Tabela IV.1

Secções de choque macroscópicas^(*) (36)

Conjunto	σ_1	σ_2	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{22}
I	4,8822	3,2343	3,8180	0,3524	1,0326	2,8669
II	4,9270	3,1686	3,7953	0,3239	1,0345	2,8005
III	5,0914	3,0707	3,7659	0,2706	1,0454	2,6828
IV	5,3220	2,9738	3,6906	0,2164	1,0481	2,5341

(*) As unidades das secções de choque são expressas em cm^{-1} .

O meio no qual se tem a fonte, meio 1, foi fixado como o Conjunto I (água leve), e variou-se a absorção no meio 2, usando-se os Conjuntos II, III e IV.

Solucionaram-se também os problemas, considerando-se o meio 2, como vácuo. No total foram estudados quatro casos para cada problema, conforme é mostrado na Tabela IV.2. Além disso, no problema de fonte constante, admitiu-se uma fonte no meio 1, do tipo $\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou seja, uma fonte unitária (para efeitos de normalização) no grupo de menor energia.

Tabela IV.2

Casos Estudados^(**)

Caso	Meio 2
1	Conj. II - Água borada; 1,025 b/H
2	Conj. III - Água borada; 2,99 b/H
3	Conj. IV - Água borada; 6,35 b/H
4	Vácuo

(**) Para todos os casos, o meio 1 é água leve ordinária (Conj. I).

* A unidade (b/H) significa a quantidade de absorção, em barns, introduzida pelo boro, por átomo de hidrogênio.

Para cada conjunto de dados foram calculados os auto-valores e a matriz H, a fim de serem usados em todo procedimento numérico posterior. Convém ressaltar que nesta secção não se explicita como os resultados foram obtidos, o que pode ser encontrado no Apêndice A. Todos os conjuntos aqui estudados são tais que o determinante da matriz transferência ($\det C$) é maior do que zero e a condição $c_{11} + ac_{22} < a/2$ é satisfeita. Desta forma, da Tabela II.3.1, existem dois auto-valores discretos reais para cada conjunto, sendo um positivo e outro negativo, porém de mesmo módulo. A Tabela IV.3 apenas lista o auto-valor positivo e a Tabela IV.4 mostra valores, em pontos selecionados, da matriz H.

Tabela IV.3

Auto-valores discretos

Conjunto	Auto-valor
I	7,190978
II	4,179546
III	2,595565
IV	1,936041

Como a matriz H, pode-se calcular a matriz espalhamento ($S_{(m, m)}$), e portanto o conjunto de equações integrais (3.1.8) para o problema de Milne, ou (3.2.7) para o problema da fonte constante, podem ser solucionadas através de um processo iterativo (vide Apêndice A) para as distribuições angulares na interface. A convergência do processo iterativo é suave, sendo que o número de iterações necessárias decresce com o aumento de absorção no meio 2. Obtém-se de oito a nove algarismos significativos após 20 a 30 iterações, conforme o caso.

Os coeficientes, discretos e contínuos, foram calculados para ambos problemas, usando-se os resultados da iteração (vide Apêndice A). A Tabela IV.5 apresenta os coeficientes discretos e a distância extrapolada para o problema de Milne, e a Tabela IV.6, os coeficientes discretos para o problema da fonte constante.

As Figuras 1, 2, 3 e 4 mostram os coeficientes contínuos para o problema de Milne, e as Figuras 12, 13, 14 e 15 para o problema da fonte constante. Nota-se, pelas figuras citadas, que a contribuição para o fluxo angular, dos coeficientes contínuos é significativa para ν pertencente à região $(1/\sigma, 1)$. É de interesse salientar que os coeficientes mostrados, são os expressos pela Equação (3.1.13) e não os expressos por (3.1.10).

Ainda com relação aos coeficientes, nota-se que na região $(1/\sigma, 1)$ exibem um comportamento ressonante e portanto, quando de sua integração numérica, para o cálculo dos fluxos angulares e totais, torna-se necessário um grande número de pontos de quadratura, nesta região (vide Apêndice A).

Os coeficientes calculados devem ser tais, que satisfaçam as condições de continuidade na interface, sendo que o melhor teste para tais condições serem satisfeitas, é o chamado "teste dos momentos":

Tabela IV.4

Matriz - H

Conjunto	z	$H_{11}(z)$	$H_{12}(z)$	$H_{21}(z)$	$H_{22}(z)$
I	0,0	1,	0,	0,	1,
	0,1	1,197472	0,080404	0,059095	1,194299
	0,2	1,327927	0,159800	0,111891	1,343715
	0,3	1,435380	0,240496	0,162987	1,479263
	0,4	1,528676	0,321778	0,212804	1,606289
	0,5	1,611980	0,403050	0,261455	1,727050
	0,6	1,687725	0,483882	0,308984	1,842764
	0,7	1,757487	0,563975	0,355421	1,954186
	0,8	1,822362	0,643117	0,400790	2,061829
	0,9	1,883148	0,72162	0,445116	2,166065
	1,0	1,940445	0,798010	0,488427	2,267180
II	0,0	1,	0,	0,	1,
	0,1	1,192948	0,073070	0,053260	1,186752
	0,2	1,316496	0,143112	0,099096	1,326605
	0,3	1,415797	0,212727	0,142306	1,450867
	0,4	1,500085	0,281448	0,183482	1,565096
	0,5	1,573750	0,348880	0,222861	1,671731
	0,6	1,639371	0,414767	0,260592	1,772145
	0,7	1,698633	0,478956	0,296786	1,867231
	0,8	1,752712	0,541364	0,331539	1,957625
	0,9	1,802468	0,601960	0,364937	2,043809
	1,0	1,848554	0,66742	0,397057	2,126167
III	0,0	1,	0,	0,	1,
	0,1	1,184222	0,061845	0,043981	1,175185
	0,2	1,295726	0,118337	0,079422	1,301404
	0,3	1,381727	0,172549	0,111405	1,410294
	0,4	1,452120	0,224449	0,140787	1,507765
	0,5	1,511643	0,273987	0,167998	1,596540
	0,6	1,563074	0,321177	0,193329	1,678231
	0,7	1,608221	0,366082	0,216995	1,753926
	0,8	1,648340	0,408793	0,239172	1,824424
	0,9	1,684342	0,449419	0,260008	1,890345
	1,0	1,716913	0,488072	0,279628	1,952189
IV	0,0	1,	0,	0,	1,
	0,1	1,172245	0,050885	0,035120	1,162358
	0,2	1,270099	0,094940	0,061356	1,275000
	0,3	1,342382	0,135690	0,083931	1,369547
	0,4	1,399448	0,173525	0,103897	1,452182
	0,5	1,446208	0,208689	0,121805	1,525849
	0,6	1,485495	0,241405	0,138016	1,592326
	0,7	1,519122	0,271883	0,152795	1,652890
	0,8	1,548325	0,300321	0,166341	1,708251
	0,9	1,573983	0,326899	0,178817	1,759285
	1,0	1,596749	0,351779	0,190352	1,806480

$$\int_{-1}^1 I_1(0,\mu) \mu^\alpha d\mu = \int_{-1}^1 I_2(0,\mu) \mu^\alpha d\mu ; \alpha = 0,1,2, \dots \quad (4.1)$$

A Equação (4.1), para $\alpha=0$, "testa" a continuidade do fluxo total na interface, e para $\alpha=1$, a corrente. Já os momentos de ordem superior ($\alpha > 2$) não possuem nenhum significado físico. Os coeficientes calculados neste trabalho foram tais que satisfizeram este teste até o momento de ordem 20, com cerca de 5 a 6 algarismos significativos, conforme se mostra no Apêndice B.

Tabela IV.5

Coeficientes discretos e distâncias extrapolada^(*)
Problema de Milne

Caso	A (ν_1)	B ($-\eta_1$)	z_0
1	- 0,26357	0,71844	4,79442
2	- 0,47037	0,47259	2,71187
3	- 0,58252	0,31503	1,94298
4	- 0,83095	-	0,66583

(*) A distância extrapolada (z_0) é expressa em unidades de livre caminho médio do meio 1.

Tabela IV.6

Coeficientes discretos
Problema da fonte constante

Caso	A (ν_1)	B ($-\eta_1$)
1	- 726,75	411,93
2	- 846,31	269,25
3	- 911,33	177,78
4	- 1054,8	-

Com os coeficientes, calculou-se a distribuição angular na interface e a modificação da distribuição angular com a distância nos meios para ambos problemas.

As Figuras 5 e 6 mostram as distribuições angulares na interface para o problema de Milne, e as Figuras 16 e 17 para o problema da Fonte Constante. Nota-se a descontinuidade da distribuição angular na interface, para valores do cosseno do ângulo zenital (μ) nulo, e ainda, o aumento desta descontinuidade com o aumento da absorção no meio 2. Convém salienter também, que para o caso 4 (meio 2 sendo vácuo) Siewert e Ishiguro⁽⁵²⁾ publicaram resultados para a distribuição angular na interface, para o mesmo conjunto de seções de choque, que se encontram inteiramente concordantes

com os mostrados nas Figuras 5 e 6. Para finalizar, nota-se que a distribuição angular na interface, torna-se isotrópica com o aumento de absorção no meio 2, sendo bastante anisotrópica para o caso em que o meio 2 é vácuo (absorvedor perfeito).

A modificação na distribuição angular com a distância em livres caminhos médios do meio 4 é mostrada nas Figuras 7A e 7B, para o problema de Milne, e na Figura 18 para o problema da fonte constante. Nota-se que para o problema da fonte constante as distribuições tornam-se progressivamente mais próximas de uma distribuição isotrópica e aumentam em magnitude, com o aumento da distância no meio 1.

O efeito ocasionado na distribuição angular emergente do meio 1, no qual se tem a fonte, pelo aumento da absorção no meio 2, é mostrado na Tabela IV.7. Nesta tabela apresenta-se a razão do fluxo angular para $\mu = 1$ e para $\mu = 0,05$, ou seja, uma medida de quão anisotrópica é a "distribuição emergente" do meio 1.

Tabela IV.7

Razão do fluxo angular, $I(0, 1) / I(0, 0,05)$, na interface

Caso	Milne		Fonte Constante	
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
1	1,18	1,25	1,16	1,24
2	1,32	1,36	1,28	1,32
3	1,46	1,53	1,39	1,44
4	2,40	2,68	1,99	2,46

Em física de reatores, as grandezas de maior interesse são os fluxos totais e a corrente. Nas Figuras 8 e 9 são mostrados os fluxos para o problema de Milne, e nas Figuras 19 e 20, para o problema da fonte constante. O fluxo assintótico, no qual se negligencia a contribuição dos termos contínuos, é mostrado apenas para o grupo 1. Nota-se, que no meio 1, após 2 a 2 livres caminhos médios o fluxo assintótico praticamente confunde-se com o fluxo total, enquanto no meio 2, esta distância é da ordem de 3 a 4 livres caminhos médios. Além disso, no meio 1 o fluxo assintótico superestima o fluxo total, enquanto no meio 2, ele o subestima.

É interessante salientar, que a região em que o fluxo total diverge do fluxo assintótico, pode ser interpretada como a região em que a correção da teoria de transporte é significativa. Essa divergência é devido à contribuição dos termos contínuos, que foram introduzidos pelo método de expansão em auto-funções singulares, de modo a fornecer uma solução "exata" da equação de transporte. Na Tabela IV.8 apresenta-se a razão entre o fluxo assintótico e o fluxo total, como função da distância nos meios para o problema de Milne, e na Tabela IV.9, para o problema da fonte constante.

A corrente de nêutrons para o problema de Milne, é mostrada nas Figuras 10 e 11, e nas Figuras 21 e 22, para o problema da fonte constante. Em todos os casos a corrente é dirigida no meio 1, no qual se encontra a fonte de nêutrons, para o meio 2.

Tabela IV.8

Fluxo assintótico ($\phi^{Ass}(x)$) e razão deste para o fluxo total ($\psi(x)$) para os grupos 1 e 2 – Problema de Milne^(*)

Caso	x	$\phi_1^{Ass}(x)$	$\phi_1^{Ass}(x) / \psi_1(z)$	$\phi_2^{Ass}(x)$	$\phi_2^{Ass}(x) / \psi_2(x)$
1	-3	0,023225	0,997	0,078342	1,000
	-2	0,029503	0,992	0,099518	1,001
	-1	0,037478	0,978	0,126418	1,002
	0 ⁻ (**)	0,047608	0,933	0,16059	1,006
	0 ⁺	0,053307	1,045	0,15888	0,996
	1	0,066584	1,008	0,19846	0,999
	2	0,081150	1,002	0,24187	1,000
	3	0,097288	1,001	0,28998	1,000
2	-3	0,0080511	0,985	0,036684	1,000
	-2	0,011835	0,962	0,053926	1,000
	-1	0,017398	0,907	0,079273	1,003
	0 ⁻	0,025575	0,756	0,11653	1,010
	0 ⁺	0,038338	1,133	0,11427	0,990
	1	0,053558	1,020	0,15963	0,998
	2	0,069816	1,004	0,20809	1,000
	3	0,087425	1,001	0,26057	1,000
3	-3	0,0027996	0,964	0,019149	0,998
	-2	0,0046926	0,911	0,032097	0,996
	-1	0,0078656	0,792	0,053801	0,994
	0 ⁻	0,013184	0,534	0,090181	0,992
	0 ⁺	0,030219	1,224	0,090072	0,990
	1	0,046494	1,028	0,13858	0,997
	2	0,063668	1,006	0,18977	0,999
	3	0,082076	1,001	0,24463	1,000
4	0 ⁺	0,012237	1,501	0,036473	1,187
	1	0,030845	1,028	0,091937	1,003
	2	0,050052	1,005	0,14918	1,000
	3	0,059994	1,002	0,17882	1,000

(*) O fluxo assintótico é expresso em unidades de: (nêutrons por unidade de comprimento ao quadrado por unidade de tempo).

(**) O valor do fluxo assintótico é calculado usando-se parâmetros do meio 2 em 0⁻ e usando-se parâmetros do meio 1 em 0⁺.

Tabela IV.9

Fluxo assintótico ($\phi^{Ass}(x)$) e razão deste para o fluxo total ($\phi(x)$) para os grupos 1 e 2 – Problema da Fonte Constante(*)

Caso	x	$\phi_1^{Ass}(x)$	$\phi_1^{Ass}(x) / \phi_1(x)$	$\phi_2^{Ass}(x)$	$\phi_2^{Ass}(x) / \phi_2(x)$
1	-3	13,316	0,994	44,919	1,000
	-2	16,916	0,996	57,061	1,001
	-1	21,489	0,956	72,485	1,004
	0-	27,297	0,866	92,078	1,013
	0+	35,093	1,113	80,688	0,987
	1	41,923	1,021	110,05	0,997
	2	47,866	1,005	127,76	0,999
	3	53,038	1,002	143,17	1,000
2	-3	4,5869	0,978	20,900	1,000
	-2	6,7429	0,946	30,724	1,001
	-1	9,9122	0,870	45,164	1,004
	0-	14,571	0,676	66,392	1,017
	0+	26,439	1,237	63,893	0,978
	1	34,392	1,035	87,598	0,995
	2	41,313	1,008	108,23	0,999
	3	47,335	1,002	126,17	1,000
3	-3	1,5799	0,954	10,806	0,997
	-2	2,6482	0,887	18,114	0,995
	-1	4,4388	0,742	30,362	0,994
	0-	7,4404	0,459	50,892	0,995
	0+	21,732	1,341	49,864	0,975
	1	30,297	1,044	75,392	0,994
	2	37,749	1,010	97,604	0,999
	3	44,234	1,003	116,93	1,000
4	0+	11,348	1,850	18,914	1,134
	1	21,281	1,054	48,459	0,998
	2	29,886	1,011	74,168	0,999
	3	37,392	1,003	96,539	1,000

(*) O fluxo assintótico é expresso em unidades de: (nêutrons por unidade de comprimento ao quadrado por unidade de tempo).

Finalizando, é conveniente esclarecer a respeito das unidades físicas das grandezas mostradas nas figuras desta secção. As grandezas não são expressas em nenhum sistema particular de unidades, isto devido ter-se solucionado a equação de Transporte, (2.2.3) numa forma adimensional e sendo o termo de fonte normalizado para ambos problemas. Desta forma, o *fluxo angular*, *fluxo total* e a *corrente* possuem apenas, as dimensões que definem estas grandezas, ou seja, (nêutrons por unidades de comprimento ao quadrado por unidade de tempo).

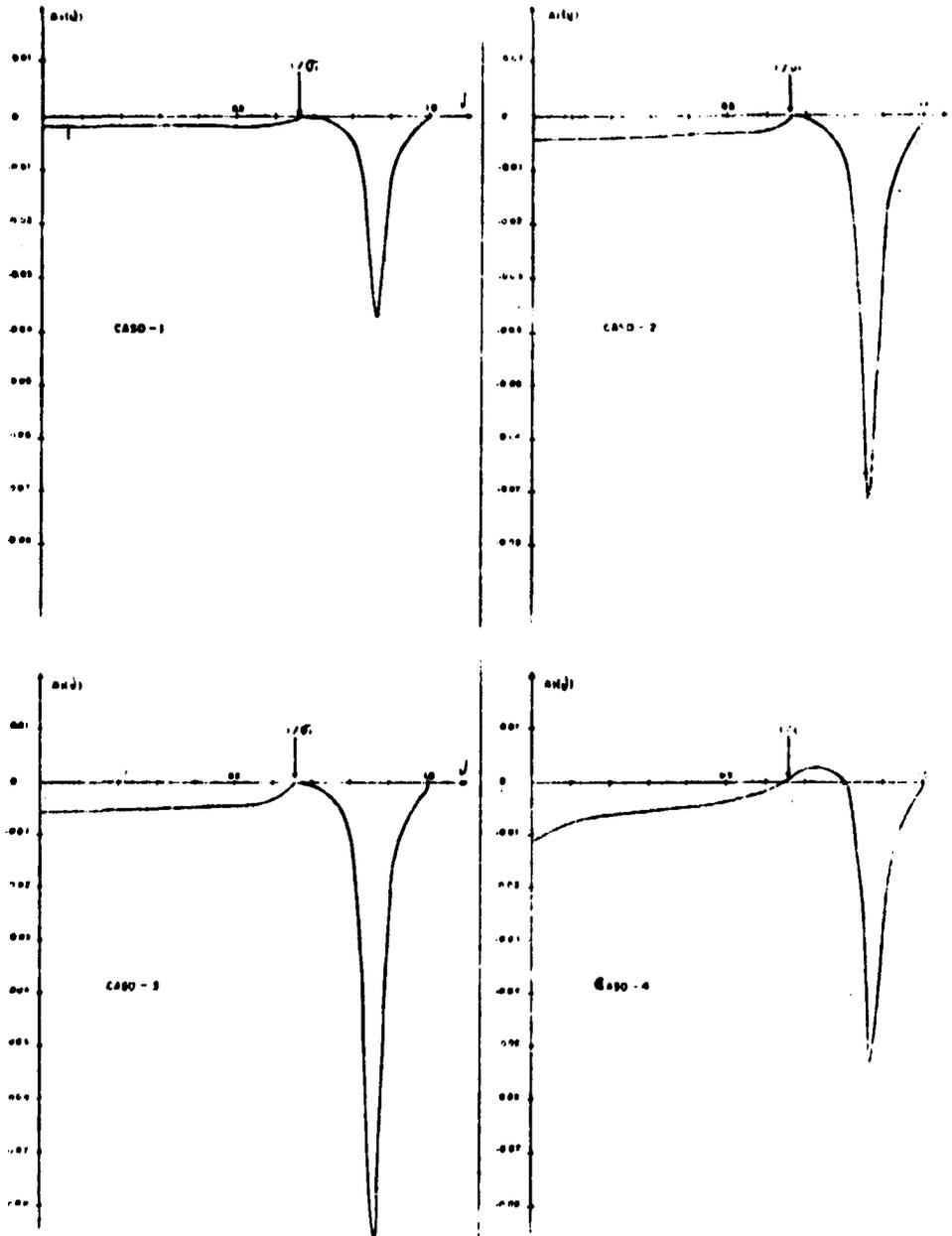


Figura 1 Coeficientes Contínuos, Meio I, $A_1(v)$ – Problema de Milne.

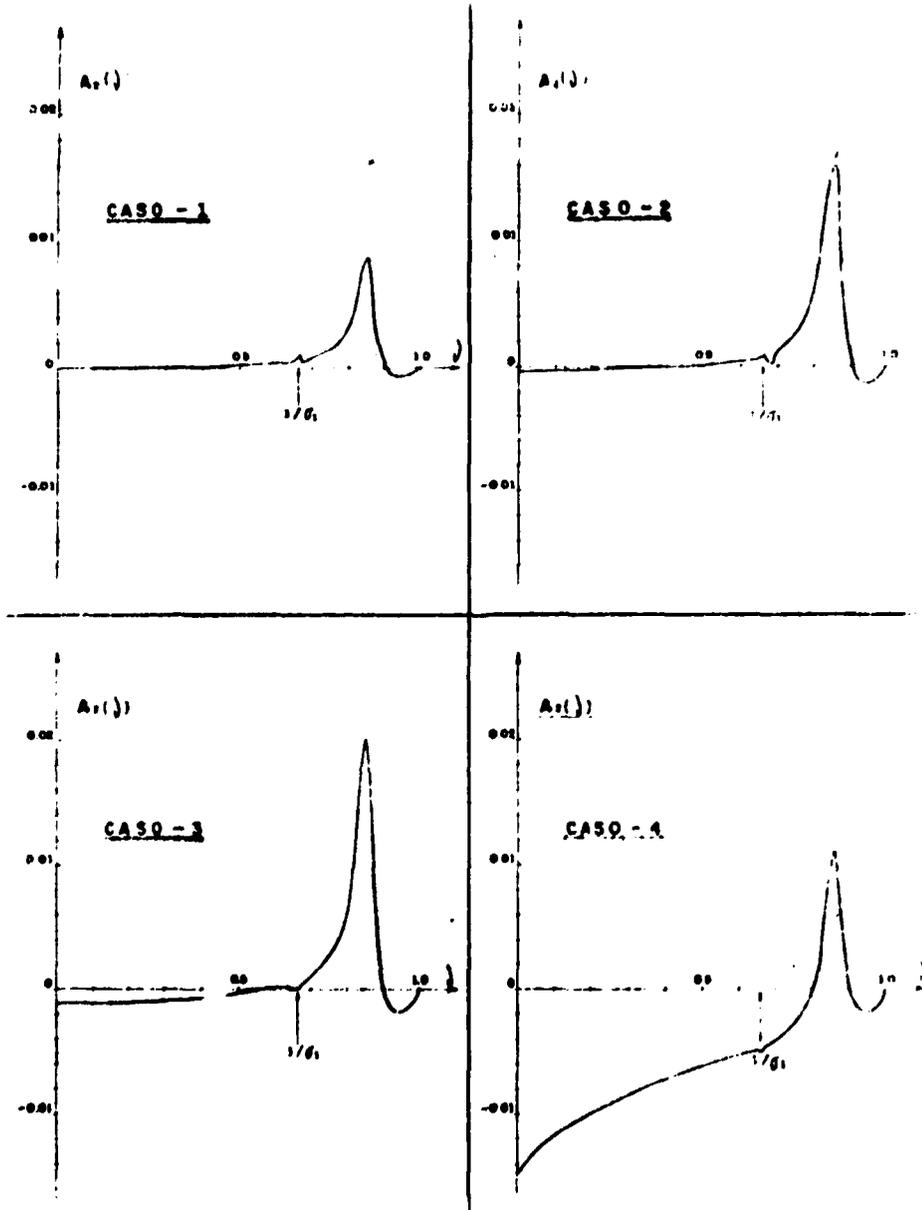


Figura 2 - Coeficientes Contínuos, Meio I, $A_2(\nu)$ - Problema de Milne.

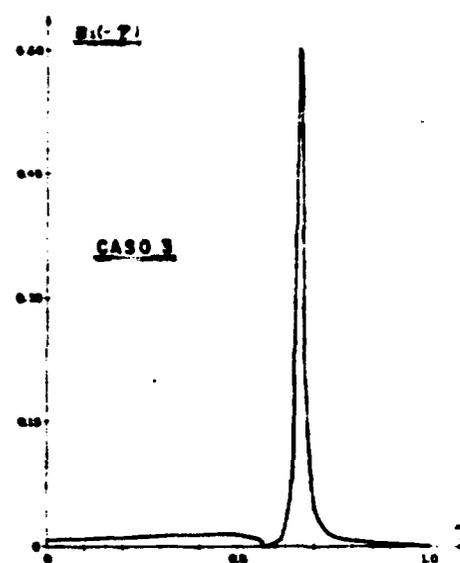
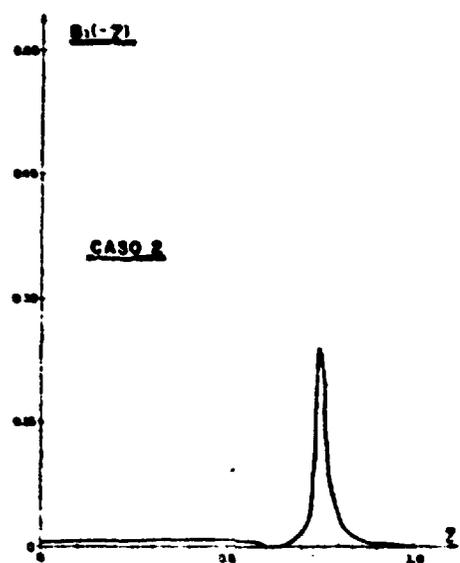
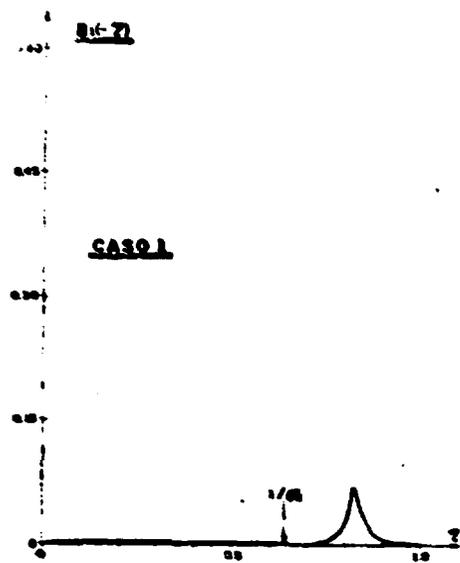


Figura 3 - Coeficiente Contínuo, Meio 2, $B_1(-\eta)$ - Problema de Milne.

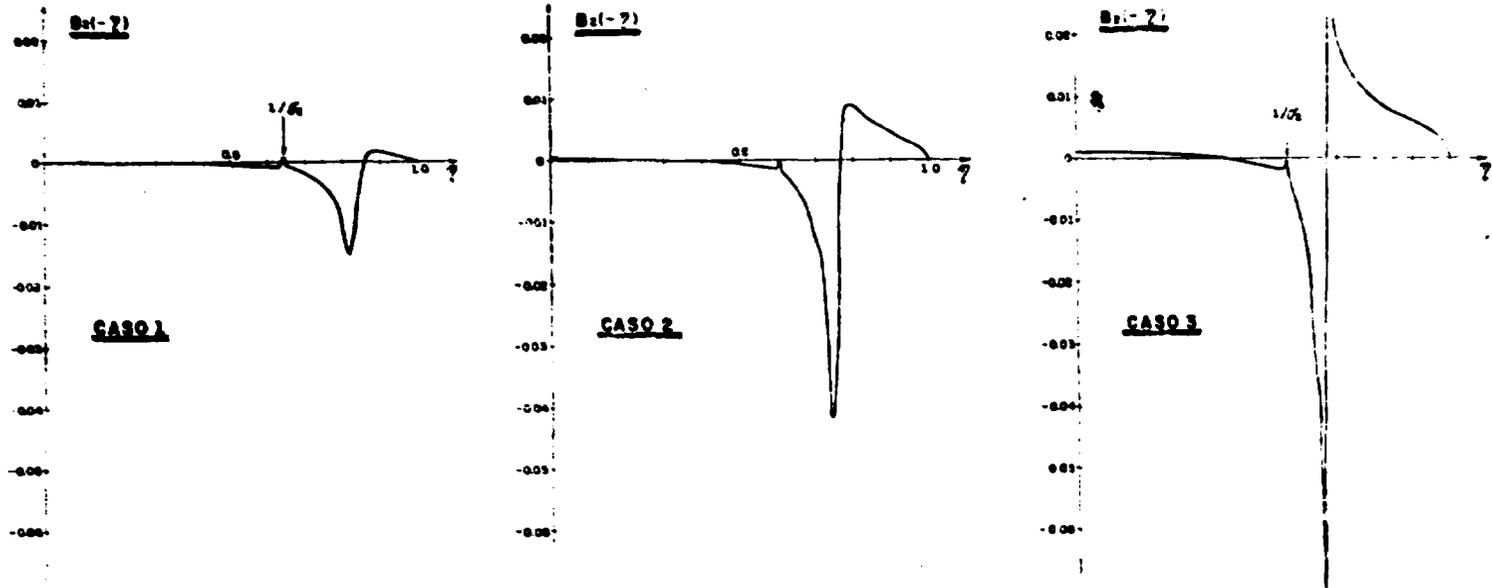


Figure 4 - Coeficiente Cont/nuo, Meio 2, $B_2(-\eta)$ - Problema de Milne.

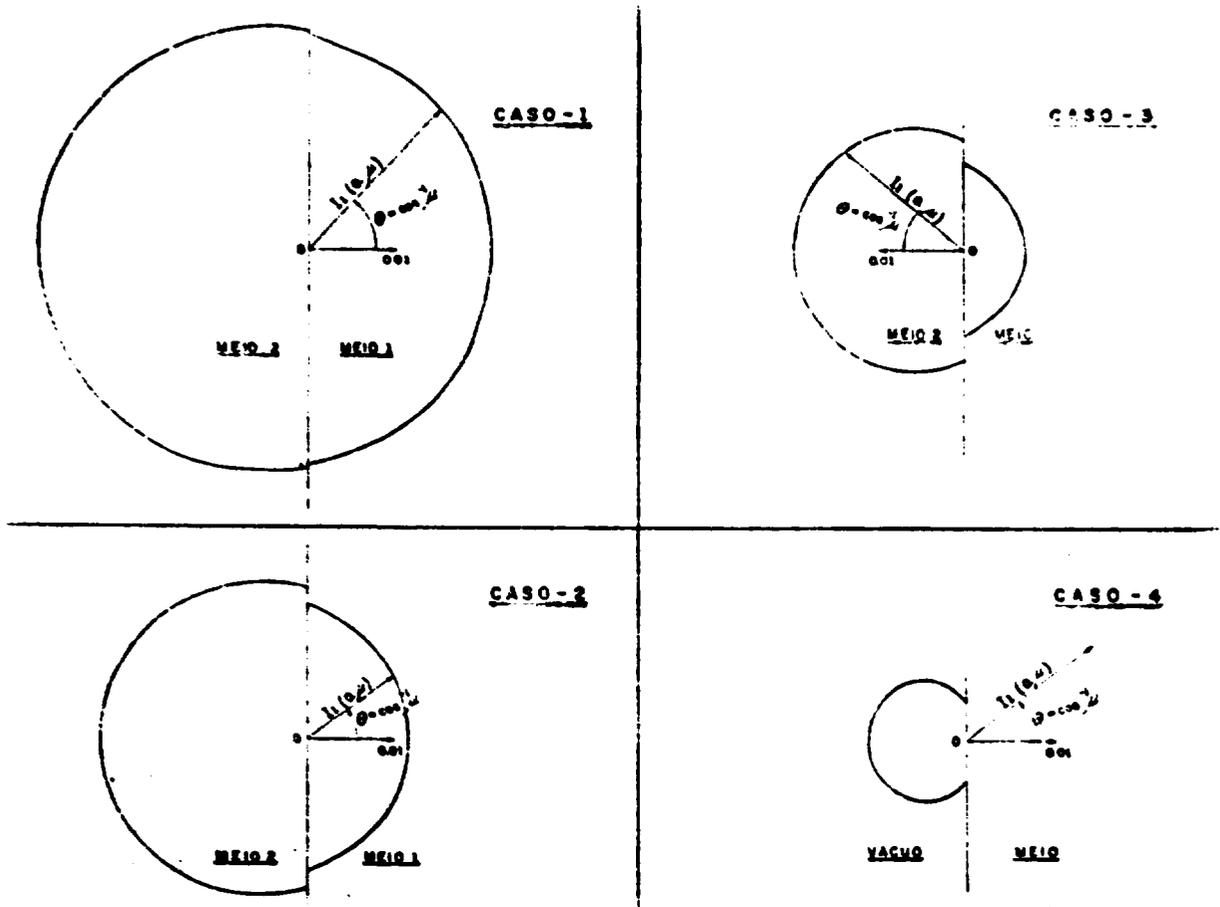


Figure 5 - Distribuição Angular na Interface ($X=0$), Grupo 1 - Problema de Milne (Coordenadas polares).

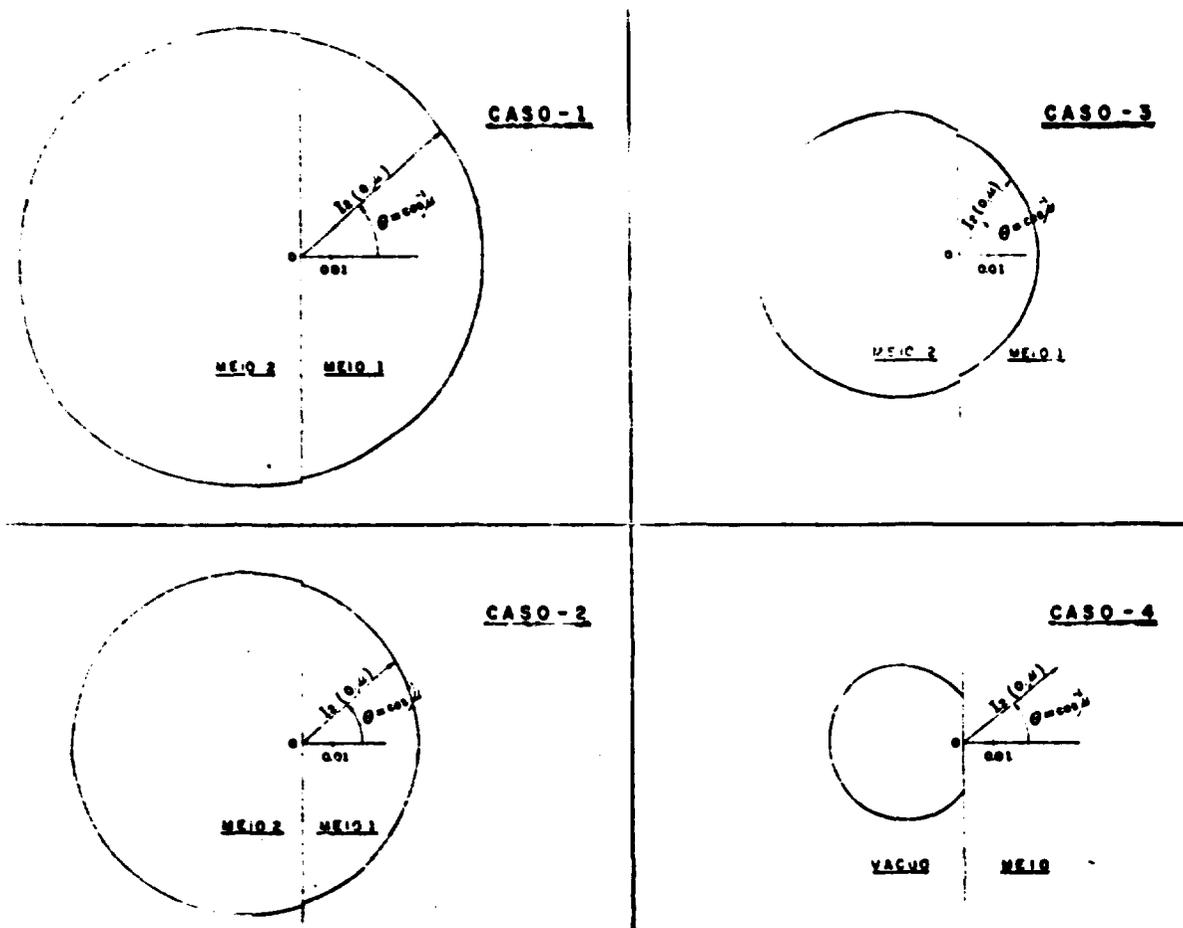


Figura 6 - Distribuição Angular na Interface ($X=0$), Grupo 2 - Problema de Milne (Coordenadas polares).

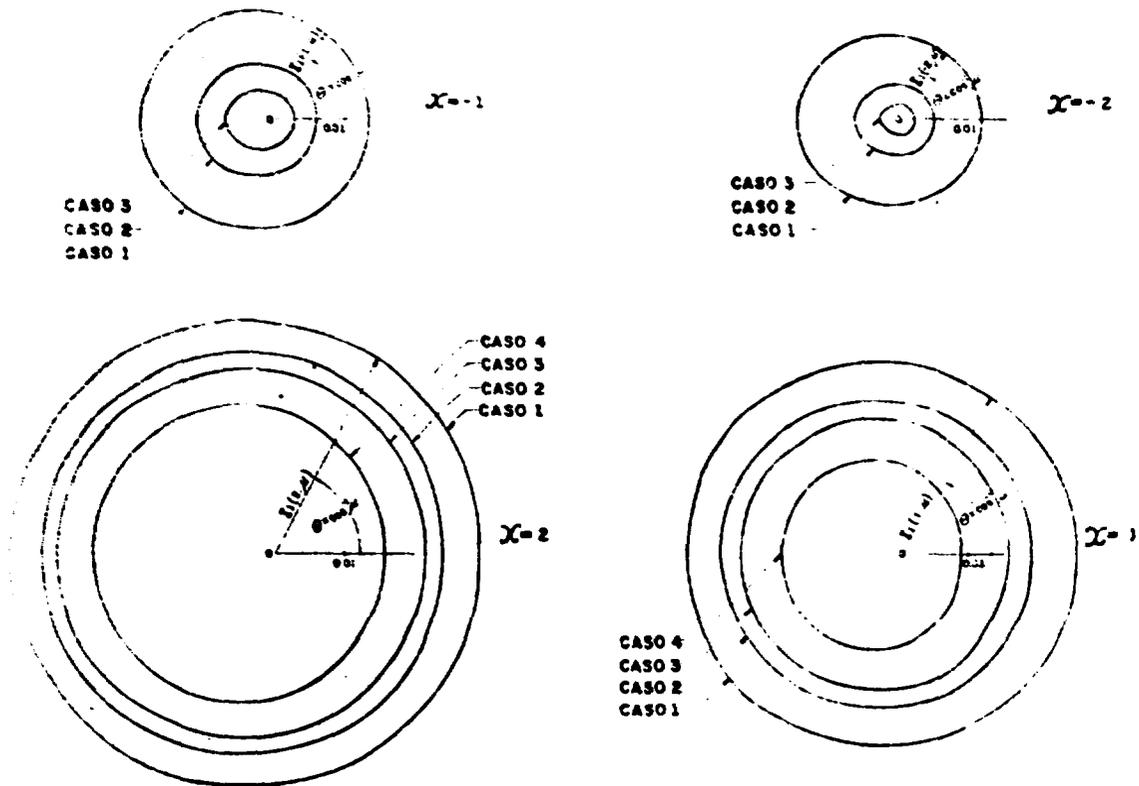


Figure 7A – Modificação na Distribuição Angular com a Distância nos Meios, Grupo 1 – Problema de Milne (Coordenadas polares).

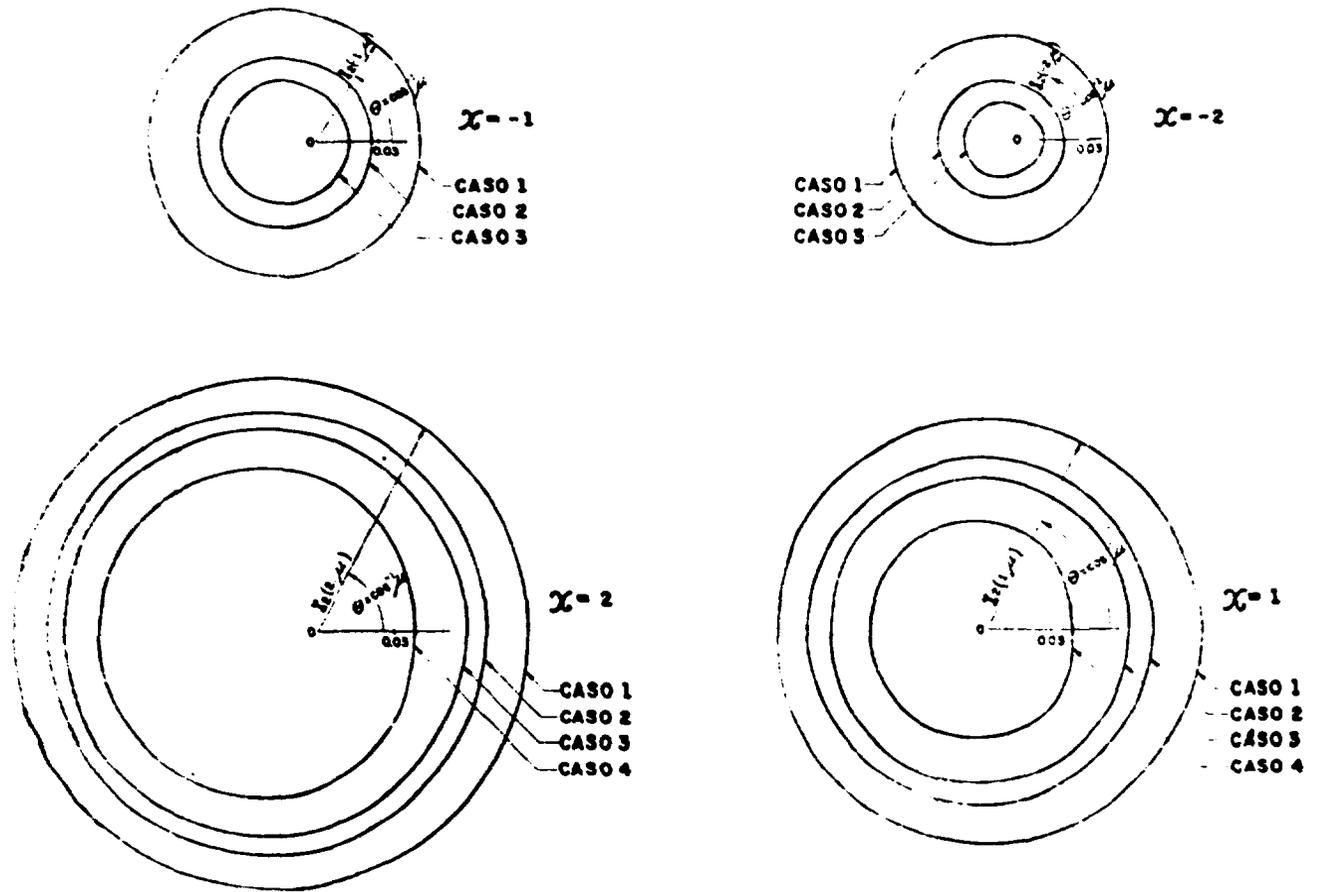


Figura 7B - Modificação na Distribuição Angular com a Distância nos Meios, Grupo 2 - Problema de Milne (Coordenadas polares).

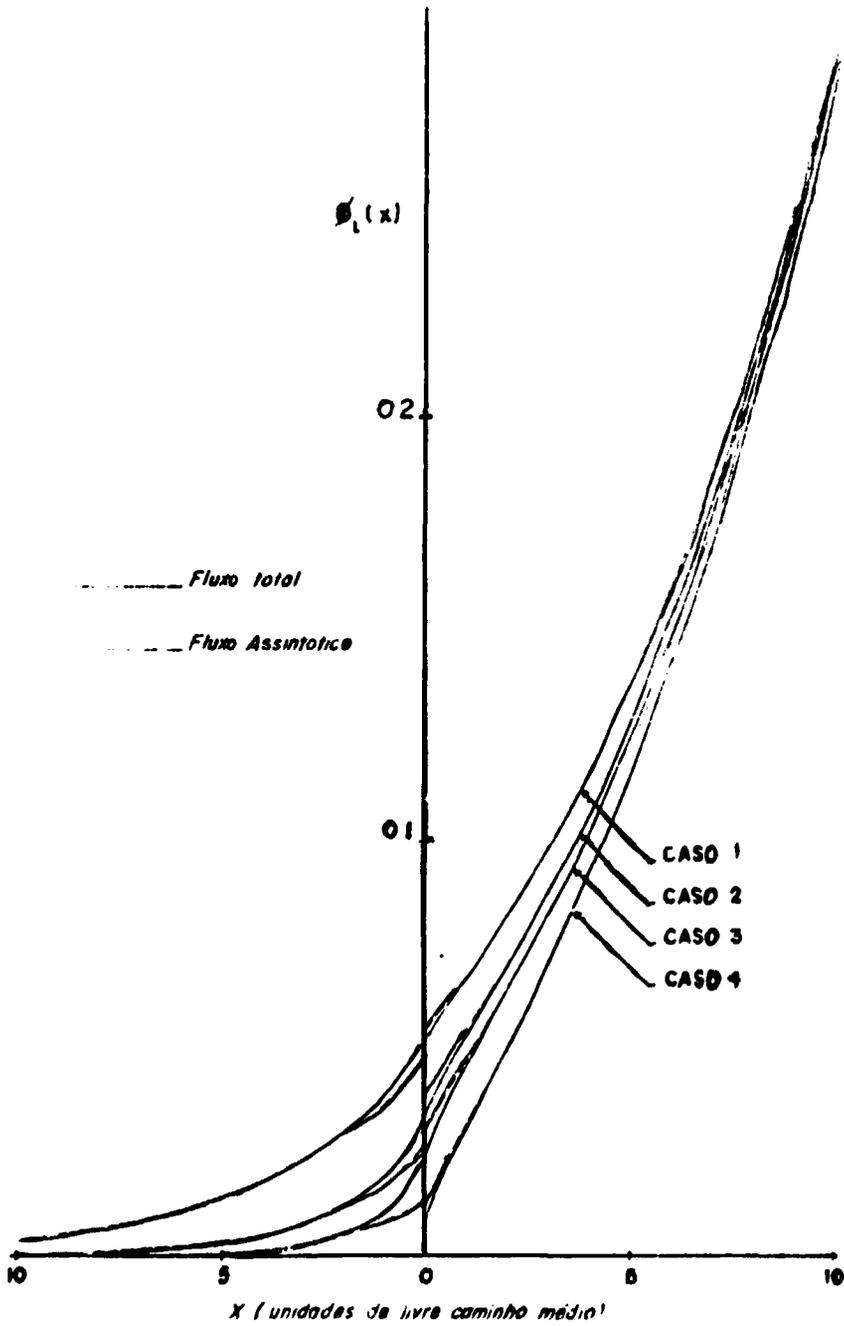


Figura 8 - Fluxo total e assintótico, Grupo 1 - Problema de Milne.

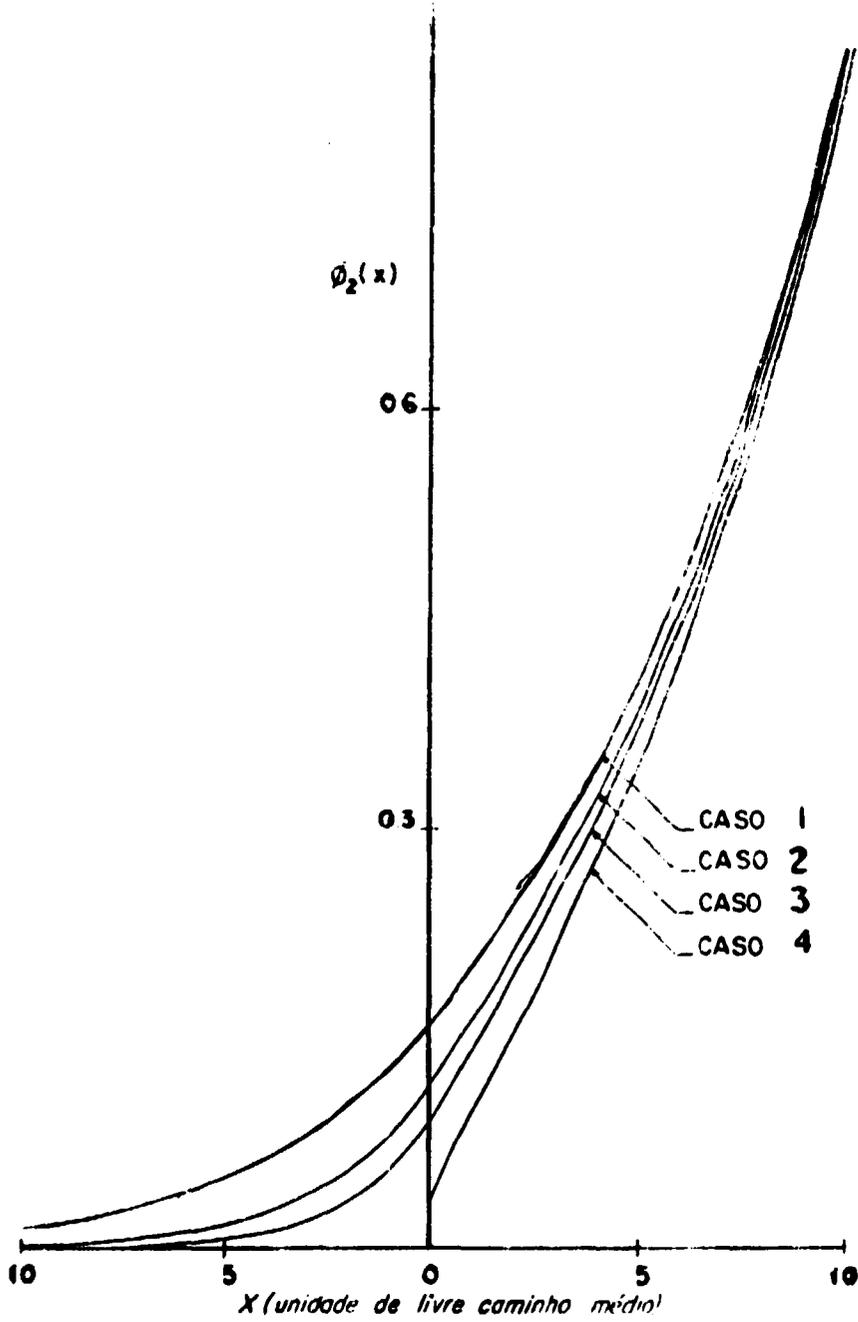


Figura 9 - Fluxo total, Grupo 2 - Problema de Milne.

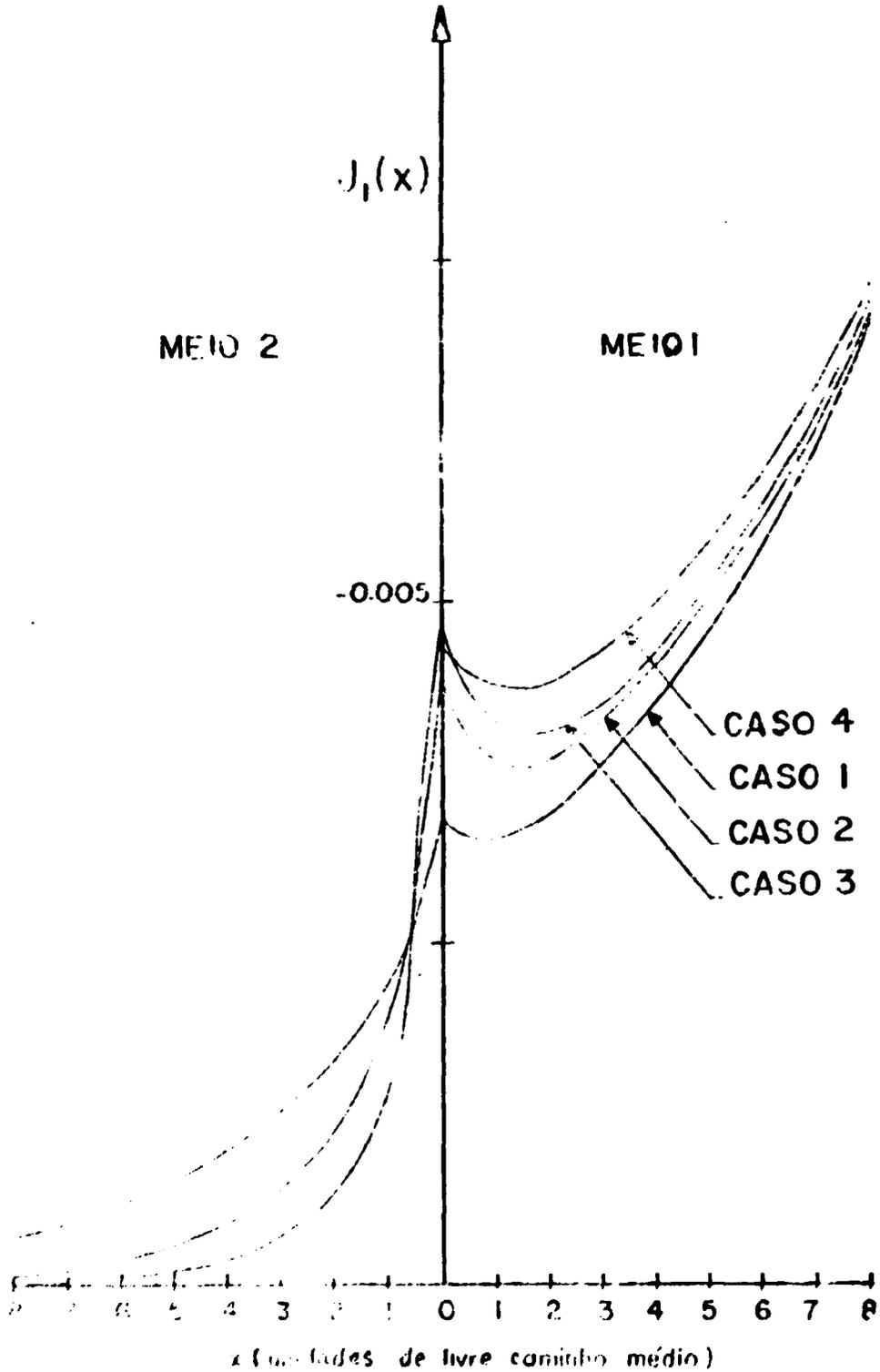


Figura 10 Corrente, Grupo 1 Problema de Milne.

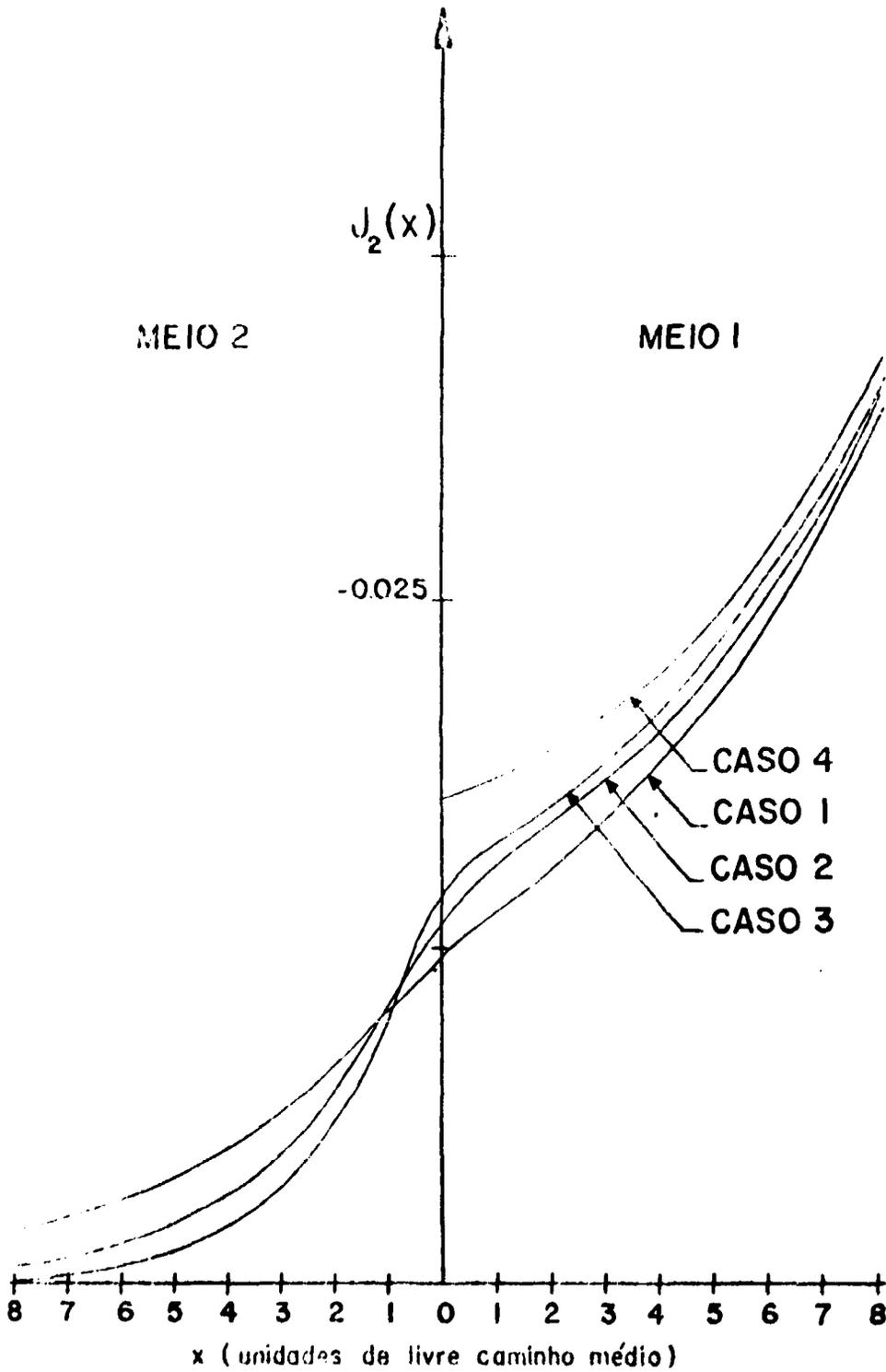


Figura 11 -- Corrente, Grupo 2 - Problema de Milne.

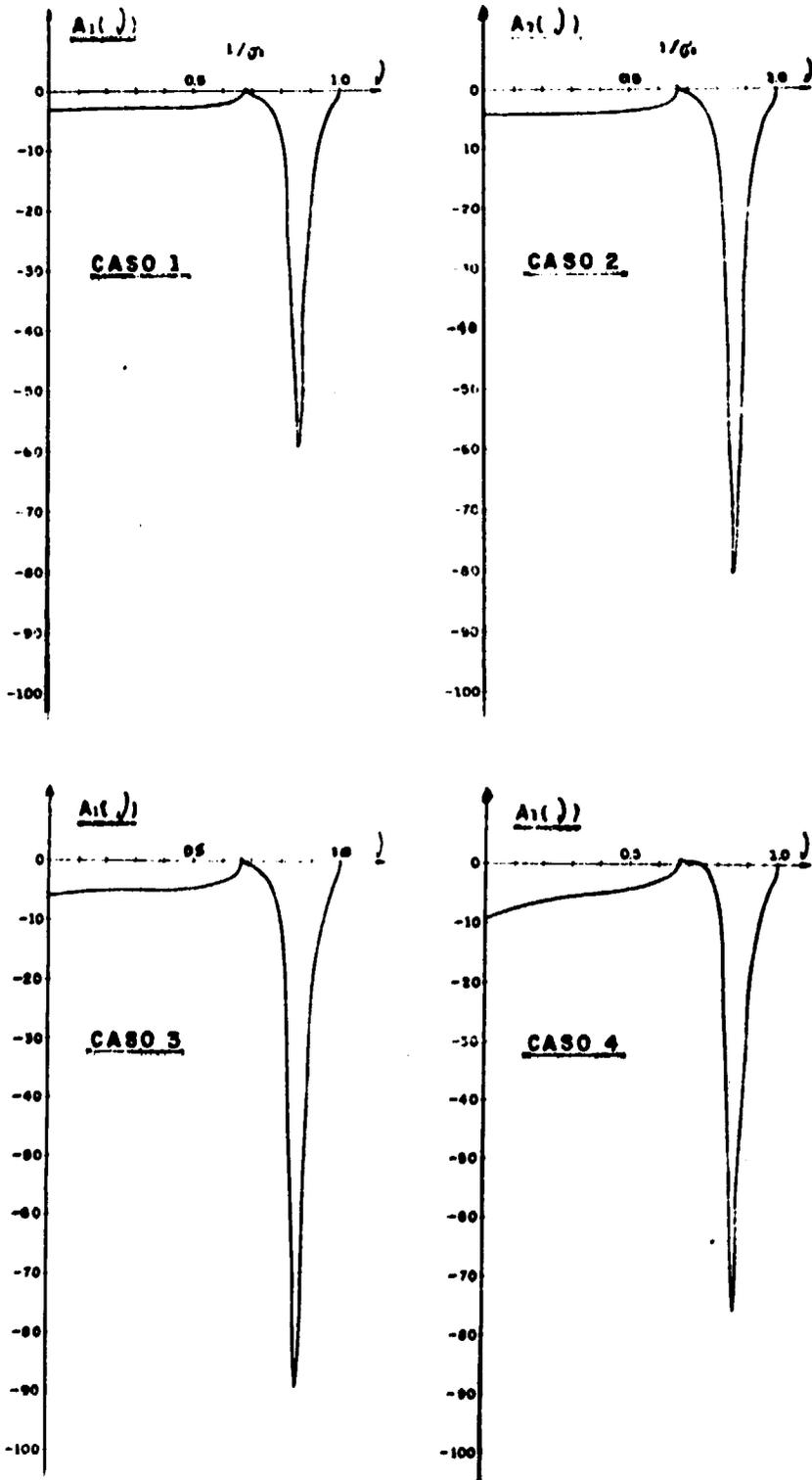


Figura 12 - Coeficientes Contínuos, Meio 1, $A_1(v)$ - Problema de Fonte Constante.

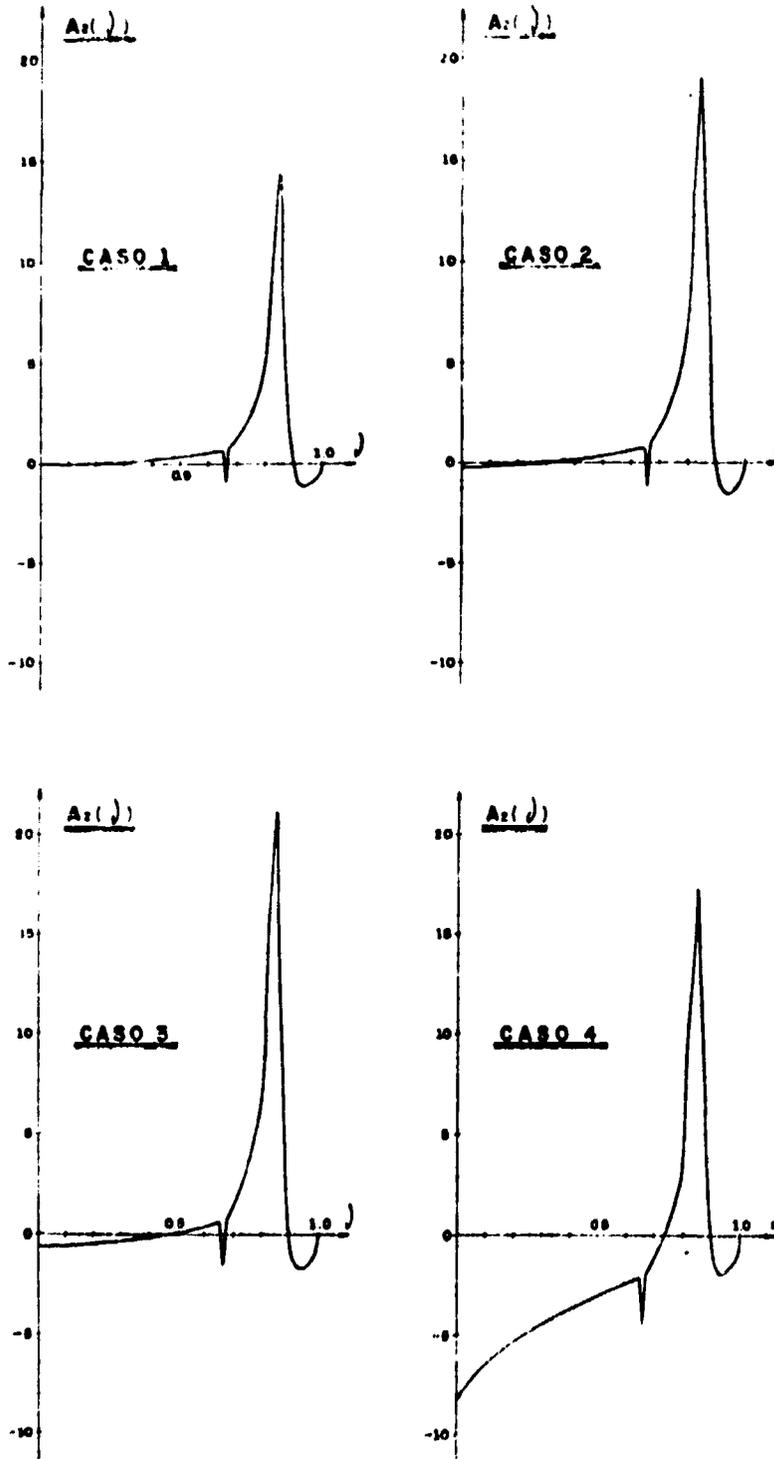


Figura 13 - Coeficientes Contínuos, Meio I, $A_2(\eta)$ Problema da Fonte Constante

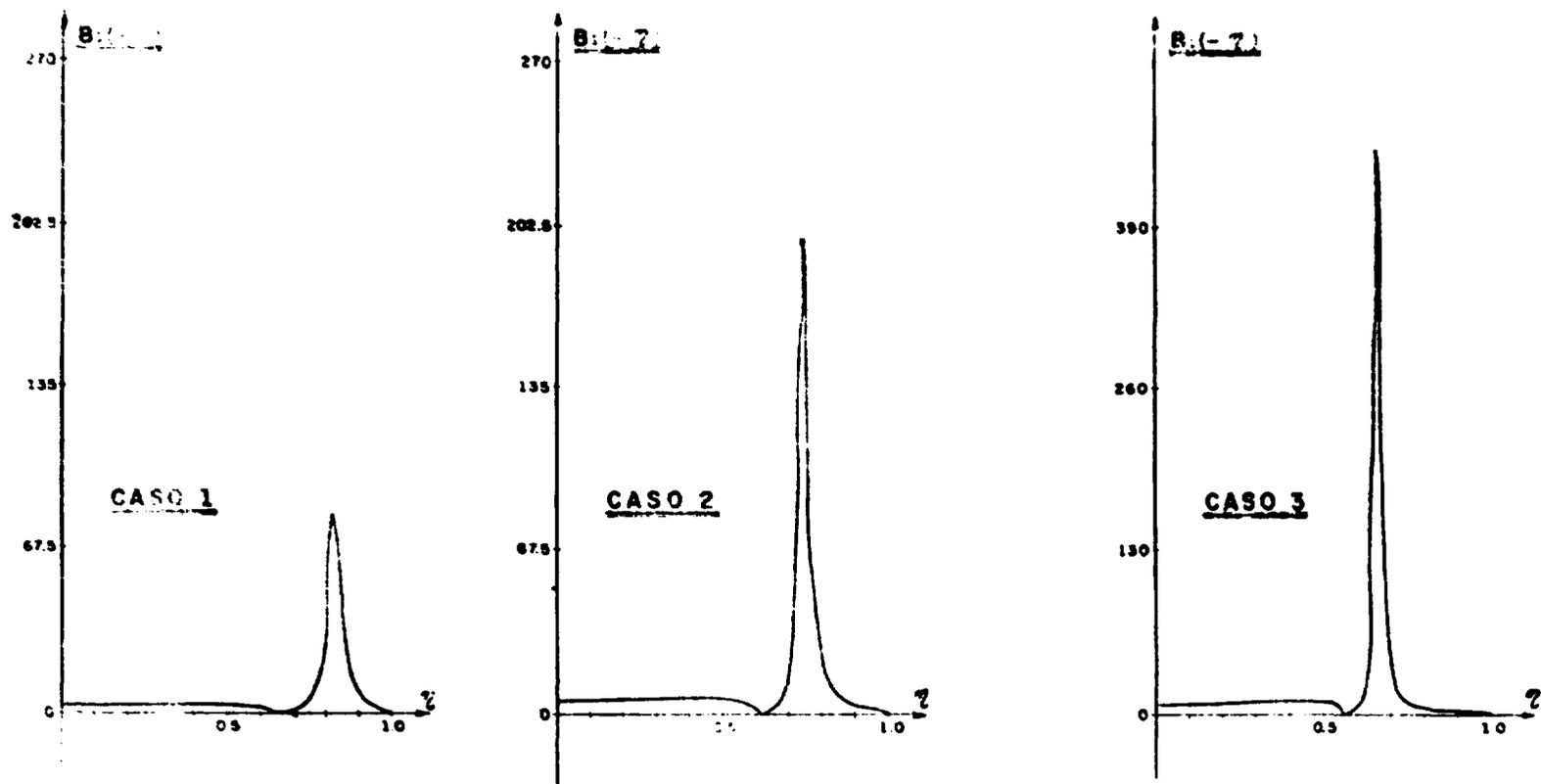


Figura 14 - Coeficiente Contínuo, Meio 2, $B_1(-\eta)$ - Problema da Fonte Constante

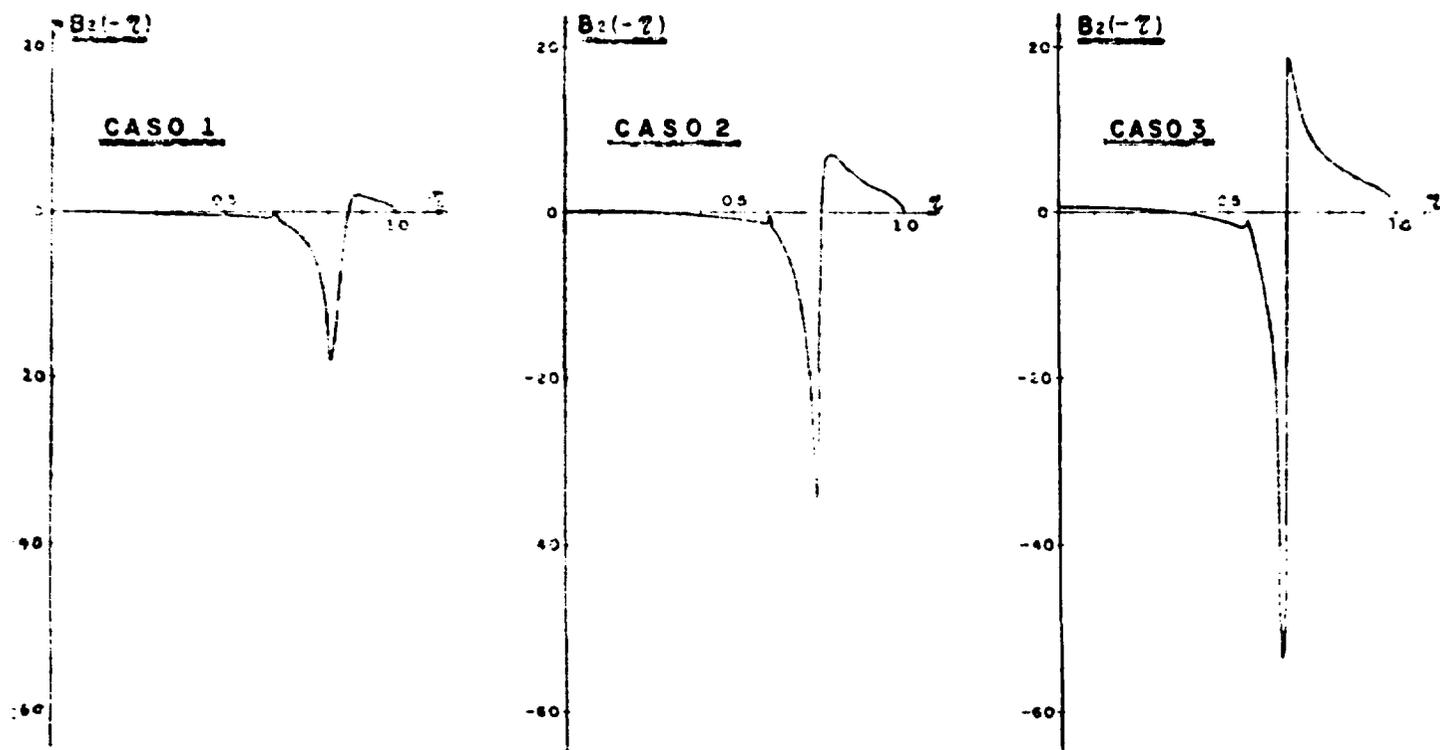


Figura 15 - Coeficiente Contínuo, Meio 2, $B_2(-\eta)$ - Problema da Fonte Constante.

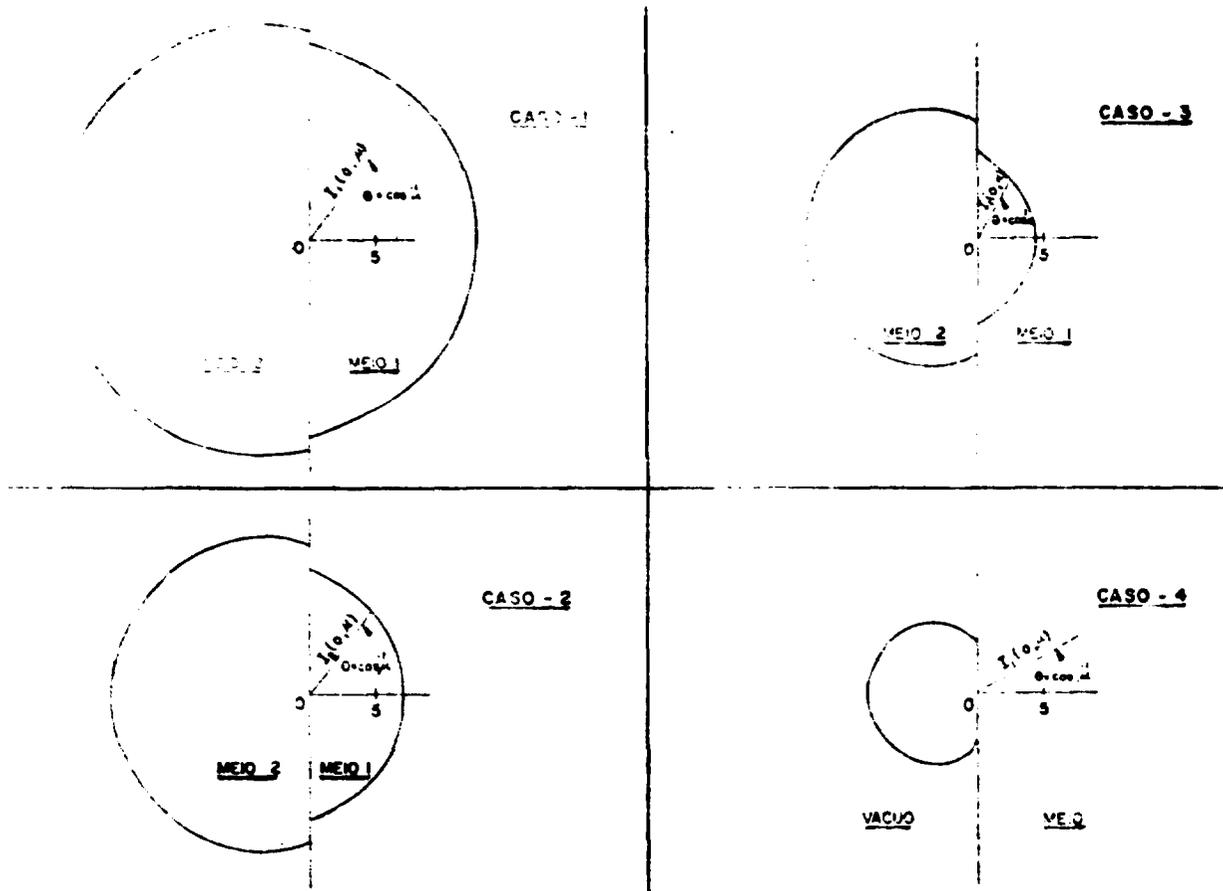


Figura 16 - Distribuição Angular na Interface ($X=0$), Grupo 1 - Problema da Fonte Constante (Coordenadas polares).

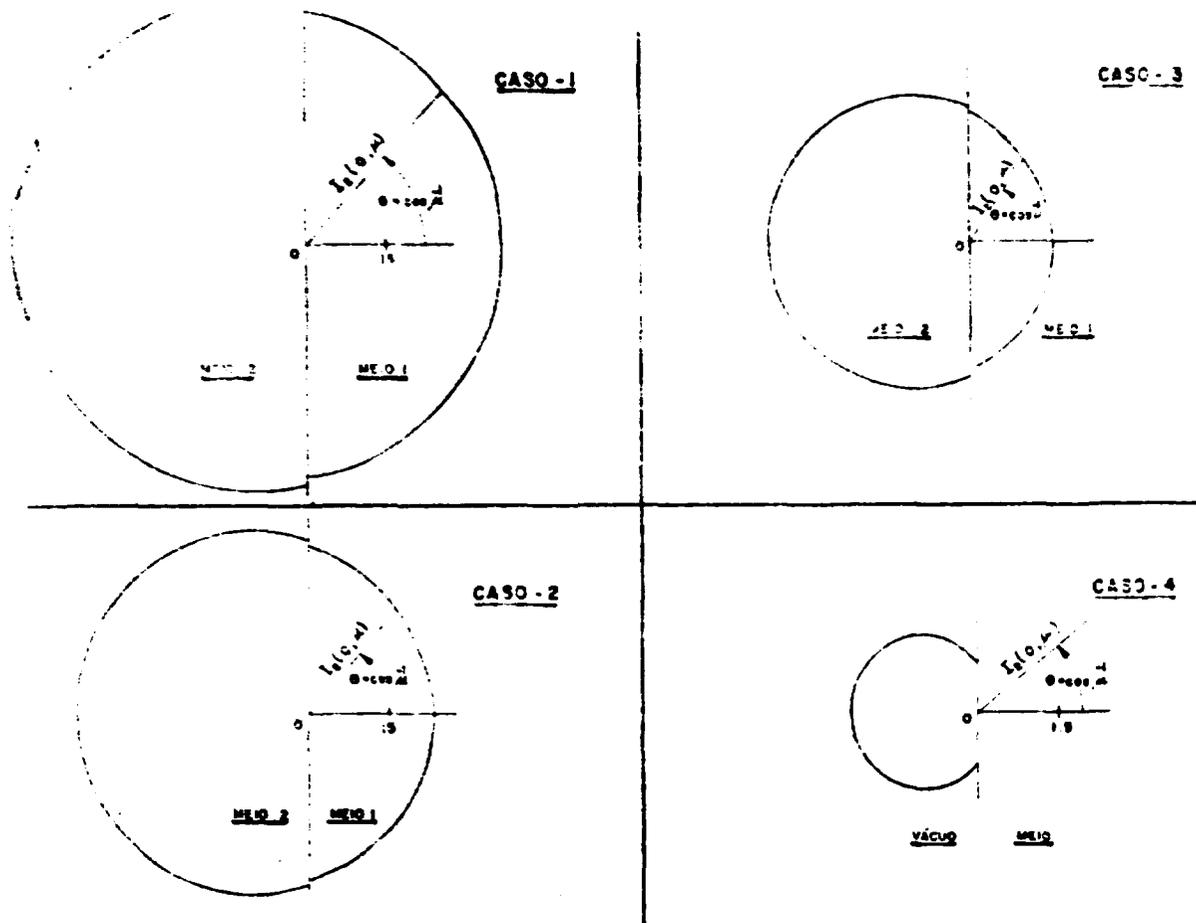


Figura 17 - Distribuição Angular na Interface ($X=0$), Grupo 2 - Problema da Fonte Constante (Coordenadas polares).

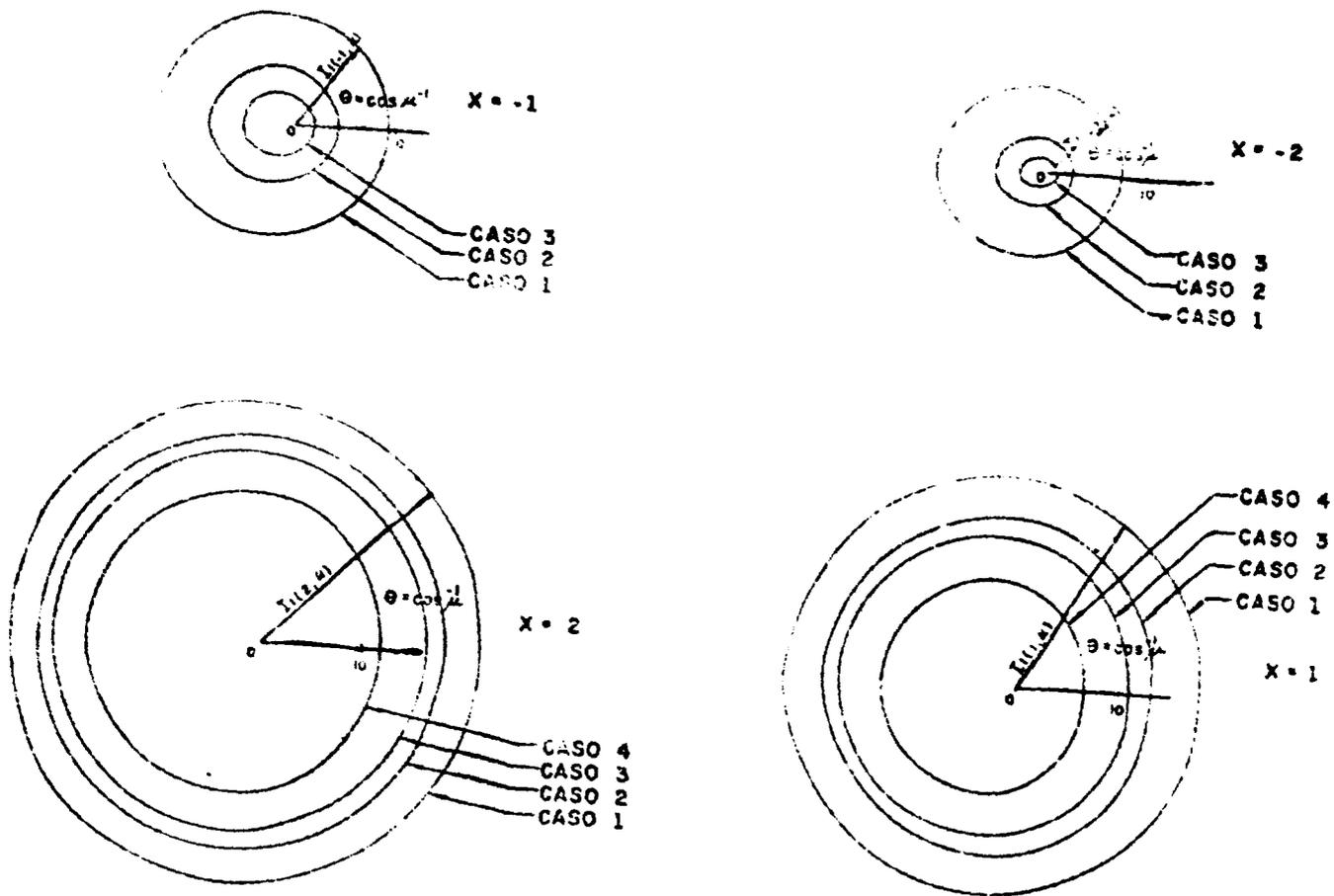


Figura 18 - Modificação na Distribuição Angular com a Distância nos Meios, Grupo 1 - Problema da Fonte Constante (Coordenadas polares).

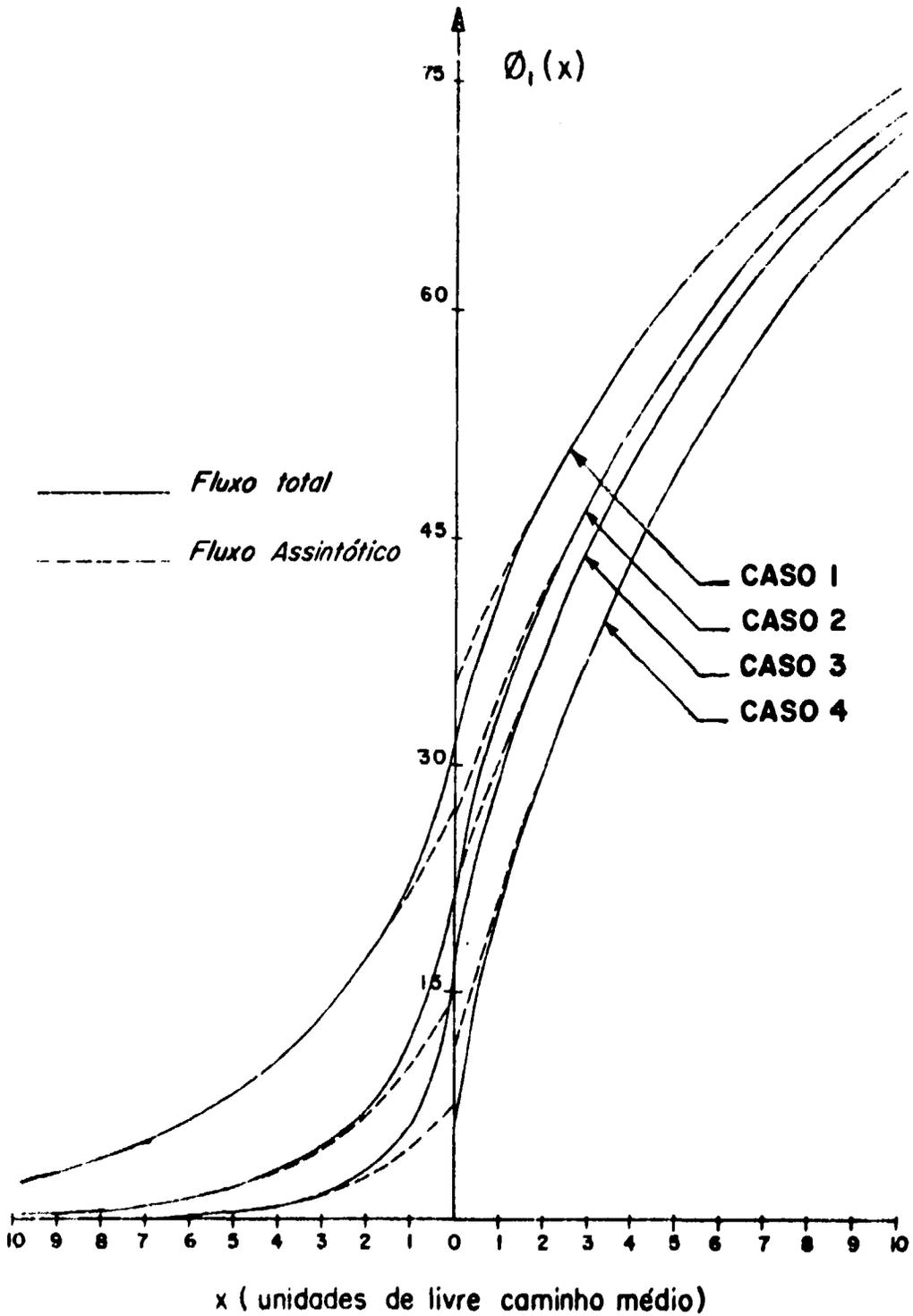


Figura 19 - Fluxo total e assintótico, Grupo I - Problema da Fonte Constante.

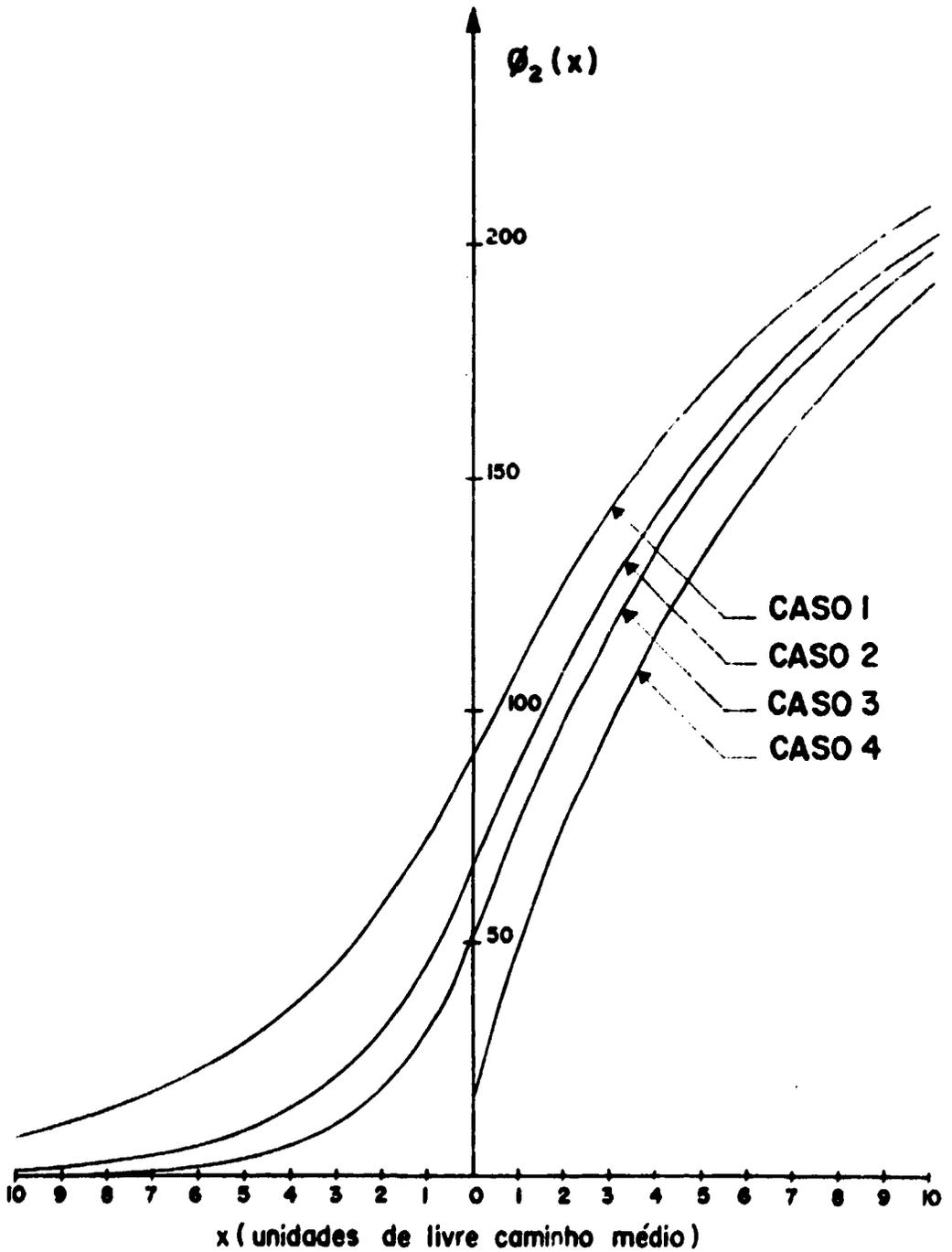


Figura 20 - Fluxo total, Grupo 2 - Problema de Fonte Constante.

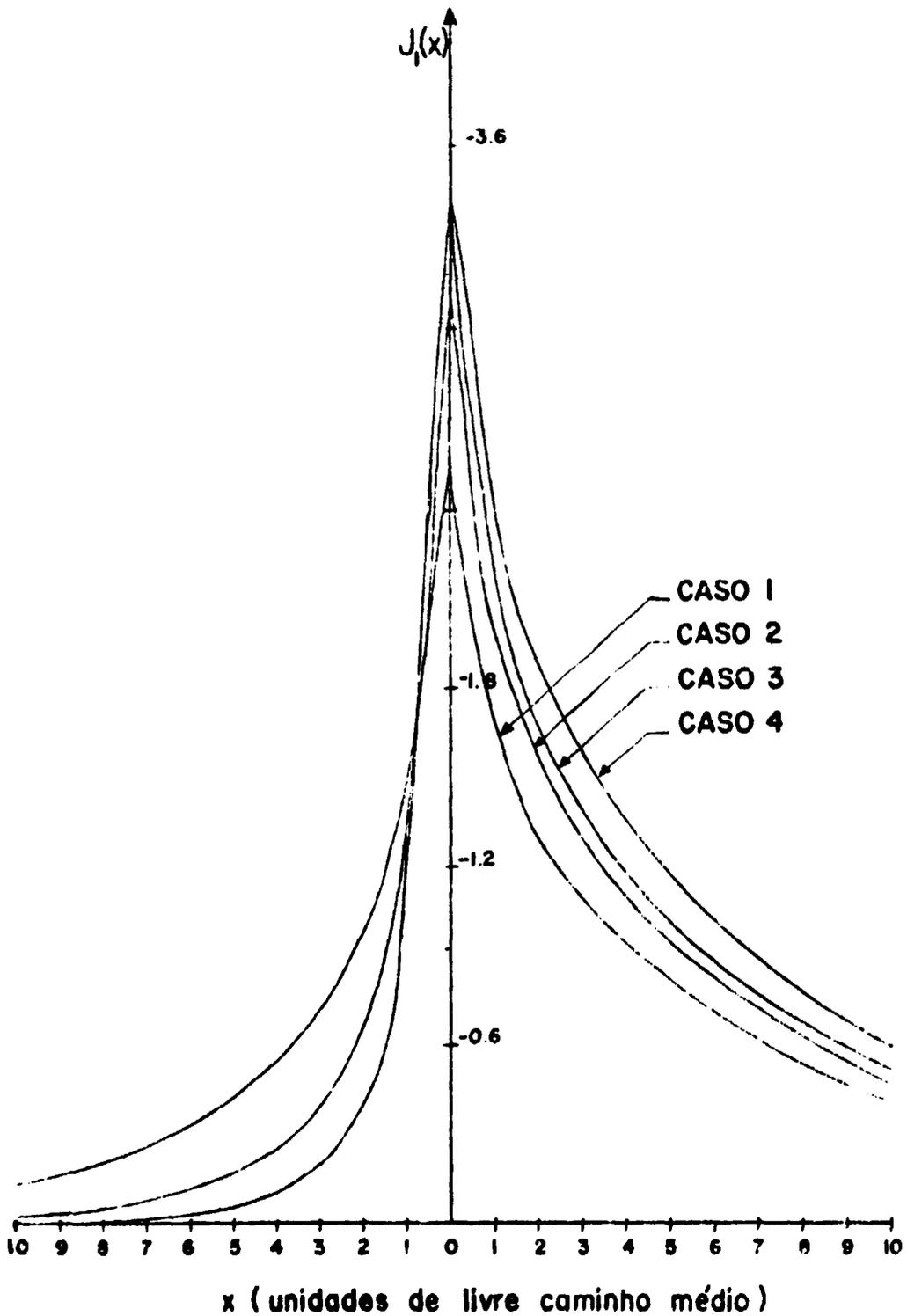


Figura 21 - Corrente, Grupo 1 - Problema da Fonte Constante.

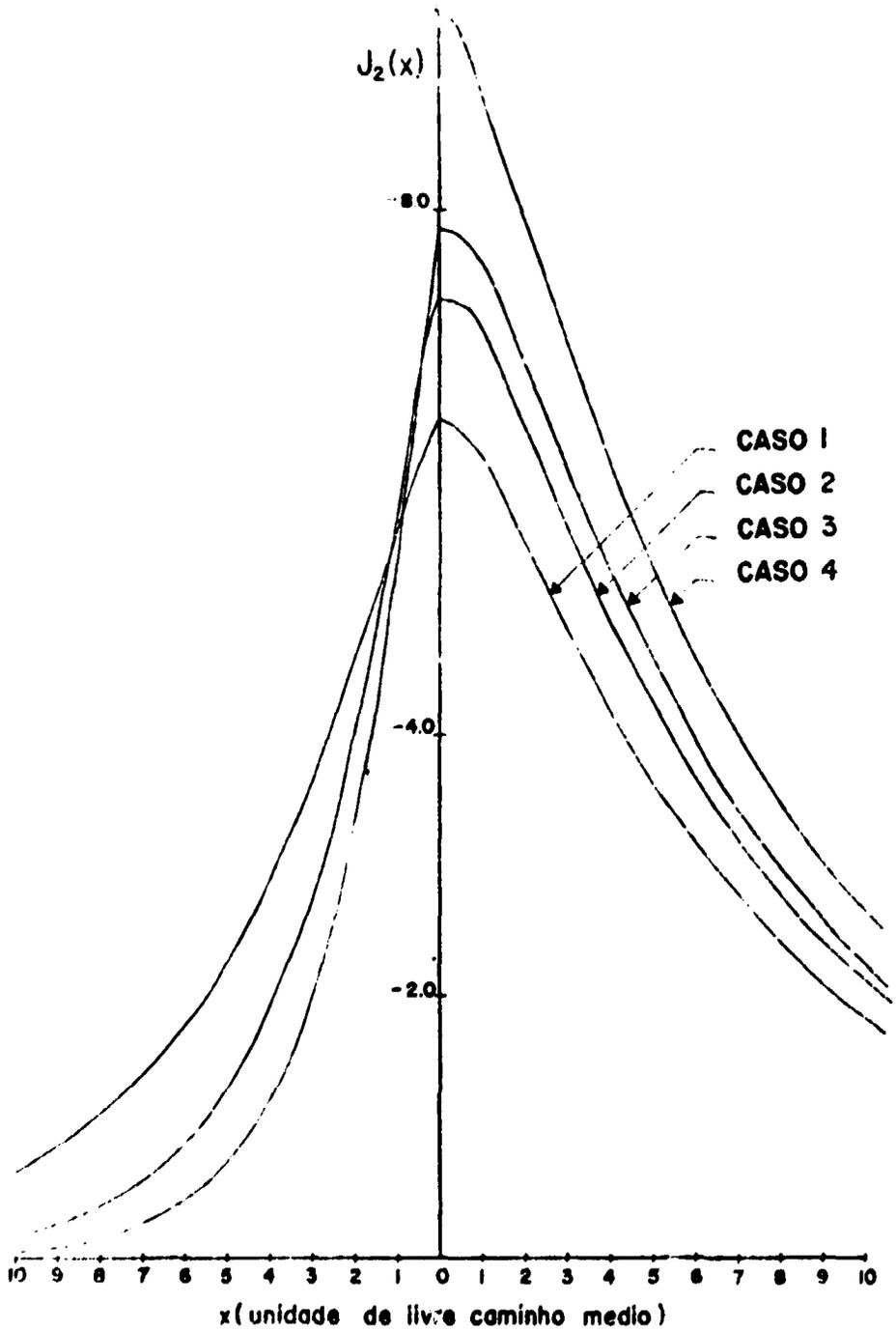


Figura 22 - Corrente, Grupo 2 - Problema da Fonte Constante.

5 - CONCLUSÕES, DISCUSSÕES E SUGESTÕES

O princípio da invariância tem sido aplicado com sucesso na solução de problemas em um semi-espaço e na derivação de relações de ortogonalidade das auto-funções singulares, no semi-intervalo. Embora Chandrasekhar⁽¹¹⁾ tivesse sugerido o uso da função S no estudo de problemas em dois meios adjacentes, os antigos trabalhos limitaram-se a um meio e somente recentemente, como discutido na secção 1, Ishiguro, Siewert e Bukart mostraram que a idéia pode ser usada com sucesso na solução de problemas em meios adjacentes na teoria de um grupo.

Neste trabalho mostrou-se que a mesma técnica é viável de ser aplicada considerando-se a dependência energética através do modelo de dois grupos, além de solucionarem-se os problemas típicos em semi-espaços infinitos.

No modelo de um-grupo, a combinação do método de expansão com o princípio da invariância, reduz, nos problemas de dois meios, o cálculo de parâmetros, a uma forma análoga a problemas de um meio, ou seja, encontram-se expressões explícitas para os coeficientes. Já, no modelo de dois grupos, tal procedimento não é possível, dado as grandezas serem vetoriais e matriciais e portanto impossibilitando as mesmas manipulações algébricas realizadas em um-grupo.

Além disso, no modelo de um grupo é possível aplicar-se esta combinação à problemas em meios finitos, e que até o momento não foi possível no modelo de dois grupos. Tal limitação ocorre, devido não se ter encontrado uma forma simples e não-singular para a matriz espalhamento em meios finitos.

Mesmo assim, a generalização para o modelo de dois grupos, proposta neste trabalho, pode ser encarada como um avanço nos métodos "exatos" de solução da equação de Transporte de nêutrons. Tal contribuição torna-se significativa, na medida em que o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos reatores nucleares exigem informações teóricas mais detalhadas e precisas da distribuição de nêutrons.

Assim, o método aqui desenvolvido pode contribuir em termos práticos para o estudo de efetividade de refletores na vizinhança de interfaces. Além do que, o conhecimento preciso da "distância extrapolada", elimina a necessidade de um tratamento numérico em refletores espessos e homogêneos, na medida em que esta grandeza pode ser usada como condição de contorno, para representar o ponto, no refletor, no qual a distribuição de nêutrons é nula.

Como sugestão, é de interesse realizar-se uma comparação do método aqui introduzido com métodos aproximados (P_N , DP_N , etc.). Tal trabalho, que tome o método exato como padrão, justificar-se-ia pois, forneceria informações a respeito das diferenças entre os diversos métodos; e também qual destes seria mais conveniente para a descrição da distribuição de nêutrons em meios adjacentes. Salienta-se que comparações entre o método "exato" e métodos aproximados só foram realizadas em problemas de um semi-espaço⁽³⁶⁾.

Sugere-se também que se realize uma aplicação do método aqui usado para o caso mais geral de multigrupos. Tal generalização forneceria uma descrição mais realista da dependência energética. Além disso, um estudo considerando a hipótese de meios espalhadores anisotrópicos, descreveria mais realisticamente a dependência angular.

APÊNDICE A – PROCEDIMENTO NUMÉRICO – COMPUTACIONAL

Neste apêndice descrevem-se os procedimentos numéricos usados, a fim de se obter os resultados apresentados na secção 4. Para a obtenção desses resultados foi feito um programa em linguagem FORTRAN-IV, o qual foi rodado no computador IBM-370/155 do Centro de Processamento de Dados, do Instituto de Energia Atômica. Este programa é sumariamente aqui descrito.

Os auto-valores, mostrados na Tabela IV.3, foram calculados encontrando-se as raízes da Equação (2.3.1), através da técnica numérica de Newton-Raphson e que essencialmente consiste num processo iterativo do tipo:

$$\nu_0^{(i+1)} = \nu_0^{(i)} - \frac{\Lambda(\nu_0^{(i)})}{\Lambda'(\nu_0^{(i)})} \quad (\text{A.1})$$

ou seja, se $\nu_0^{(i)}$ é um valor aproximado da raiz da equação, então toma-se $\nu_0^{(i+1)}$ como uma aproximação mais exata, sendo o processo repetido até a diferença entre valores consecutivos seja menor que uma determinada precisão. Neste trabalho, encontraram-se as raízes para os quatro meios estudados, sendo que a precisão exigida para o processo de iteração foi de 10^{-10} e sendo o número de iterações necessárias para a convergência 10, para o meio menos absorvedor, e 6 para o mais absorvedor. É interessante salientar que como valor inicial de ν_0 , para a iteração, pode-se usar o auto-valor, ou o comprimento de difusão, fornecido por métodos aproximados: aproximação P-1 ou teoria de difusão.

Aqui se expõe o procedimento usado para o cálculo da matriz \underline{H} , mostrada na Tabela IV.4 e definida pela Equação (2.5.5), que é de importância fundamental no desenvolvimento teórico exposto.

A equação de definição da matriz \underline{H} pode ser escrita como,

$$\underline{H}^{-1}(\mu) = \underline{E} \mu \underline{C} \int_0^1 \underline{\tilde{H}}(\mu') \underline{I}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' + \mu} \quad (\text{A.2})$$

e usando-se a equação de vínculo da matriz \underline{H} , conforme discutido por Siewert e Ishiguro⁽⁶²⁾ como:

$$[\underline{E} + \nu_1 \int_0^1 \underline{\tilde{H}}(\mu') \underline{I}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' + \mu} \underline{C}] \underline{U}(\nu_1) = 0 \quad (\text{A.3})$$

além disso, definindo-se,

$$\underline{\Delta}(\mu) = \begin{bmatrix} \frac{\nu_1(1+\mu)}{\nu_1 + \mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$Y = \begin{bmatrix} c_{11}U_1(\nu_1) + c_{12}U_2(\nu_1) & 0 \\ c_{12}U_1(\nu_1) + c_{22}U_2(\nu_1) & 1 \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

então o termo integral na Equação (A.2), multiplicado por $Y\Delta(\mu)$ pela direita, pode ser reduzido para a Equação (A.6) após o uso do vínculo (A.3) e de várias manipulações algébricas.

$$\int_0^1 \bar{H}(\mu') \underline{I}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' + \mu} Y\Delta(\mu) = \int_0^1 \bar{H}(\mu') \underline{I}(\mu') \underline{z}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' + \mu} - \frac{1 - \nu_1}{\nu_1 + \mu} [U(\nu_1) \underline{Q}] \quad (A.6)$$

onde,

$$\underline{z}(\mu) = Y\Delta(\mu) \quad (A.7)$$

e usou-se a identidade,

$$\Delta^{-1}(-\mu')\Delta(\mu) = E - \frac{\nu_1(1-\nu_1)(\mu+\mu')}{(\nu_1-\mu')(\nu_1+\mu)} \Delta^{-1}(-\mu') \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

portanto, a Equação (A.2) pode finalmente ser escrita numa forma que é facilmente solucionável numericamente*, como:

$$\bar{H}^{-1}(\mu) = E - \mu C \left[\int_0^1 \bar{H}(\mu') \underline{I}(\mu') \underline{z}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' + \mu} + P(\mu) \right] R(\mu) \quad (A.9)$$

onde,

$$P(\mu) = \frac{\nu_1 - 1}{\nu_1 + \mu} \begin{bmatrix} U_1(\nu_1) & 0 \\ U_2(\nu_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (A.10.1)$$

$$R(\mu) = \Delta^{-1}(\mu) Y^{-1}(\mu) \quad (A.10.2)$$

* Conforme notado por Ishiguro⁽¹⁹⁾ a Equação (A.9) converge cerca de 15 vezes mais rápida, em termos de número de iteração, do que a Equação original (A.2) de definição de matriz $\bar{H}(\mu)$.

A equação (A.9) foi solucionada através de um processo iterativo, no qual as integrais foram calculadas pelo método de quadratura de Gauss. O critério de convergência usado foi tal que o valor calculado $H(\mu)$ entre duas iterações consecutivas fosse menor que 10^{-8} . Nota-se, que com tal critério o número de iterações necessárias para a convergência é aproximadamente constante para os meios estudados (10 iterações). É interessante salientar, que a Equação (A.9) foi solucionada por iteração, para os pontos de quadratura usados no método de integração numérica de Gauss. Desta forma deve-se usar estes resultados e inseri-los na integral da Equação (A.2) para o cálculo da matriz H em qualquer ponto.

Com a matriz H é possível o cálculo direto das matrizes espalhamento $S(\mu, \mu')$, dada pela Equação (2.5.3), para os meios estudados. Portanto, o conjunto de equações integrais acopladas para a distribuição angular na interface, (3.1.8) para o problema de Milne, e (3.2.7) para o problema de fonte constante, pode facilmente ser resolvido através de uma iteração numérica para os fluxos angulares. O número de iterações necessárias, (segundo em critério de convergência de 10^{-10} para a diferença entre valores, dos fluxos angulares, obtidos em duas diferentes iterações consecutivas) decresce com o aumento de absorção no meio 2, e varia de 20 a 30 iterações, conforme o caso, problema, ou número de pontos de quadratura para o qual a iteração é realizada.

Como foi discutido na secção 3, com a distribuição angular na interface, obtida da iteração acima descrita, é possível o cálculo dos coeficientes da expansão em auto-funções singulares: Equação (3.1.10) para o problema de Milne e (3.2.9) para o problema da fonte constante. Os coeficientes discretos podem ser obtidos por uma integração numérica direta. Para determinação dos coeficientes contínuos é necessária a solução de integrais singulares. Isto ocorre pois a matriz $\Theta(\nu, \mu)$, que aparece nas expressões dos coeficientes, definida pela Equação (2.6.15), envolve singularidades.

Para a solução numérica de integrais singulares, usou-se o procedimento⁽⁴⁰⁾:

$$\int_a^b \frac{\phi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\phi(x) - \phi(c)}{x-c} + \phi(c) \ln \frac{b-c}{c-a} ; c \in (a,b)$$

Conhecendo-se os coeficientes o problema está solucionado, pois a distribuição de nêutrons pode ser facilmente encontrada. Assim a distribuição angular, o fluxo total e a corrente podem ser calculados pelas fórmulas discutidas na secção 3. Deve-se ressaltar, que devido o comportamento resonante dos coeficientes deve-se usar na sua integração numérica um número relativamente grande de pontos de quadratura.

Como inicialmente discutido nesta secção, os cálculos foram realizados no computador IBM/370 através de um programa, em dupla precisão e linguagem FORTRAN-IV, que consome em média cerca de 20 minutos de CPU (unidade central de processamento) para rodar cada caso, sendo constituído de uma parte principal e de vários subprogramas:

- | | |
|-----------------------------|---|
| SUBROTINA AUTO -- | Calcula os auto-valores discretos, para qualquer meio, através da técnica numérica de Newton-Raphson. |
| SUBROTINA HMATRIX -- | Calcula, por iteração, a matriz $H(\mu)$ em pontos de quadratura, e testa os valores calculados. |
| SUBROTINA SHI -- | Calcula a matriz $H(\mu)$ para qualquer ponto, usando os resultados da subrotina HMATRIX. |
| SUBROTINA LAMBDA -- | Calcula a matriz dispersão, $\Lambda(z)$, para qualquer ponto e meio. |

- SUBROTINA SMATRIX --** Calcula a matriz espalhamento, $S(\mu, \mu')$, usando resultados da subrotina SHI.
- SUBROTINA SUIN --** Calcula os fatores de normalização, definidos na secção 2.6, além de parâmetros auxiliares.
- SUBROTINA TFLU --** Calcula, usando resultados do programa principal e da subrotina SMATRIX, a distribuição angular na interface, para qualquer valor de μ , além de calcular funções auxiliares.
- SUBROTINA COEFA --** Calcula os coeficientes discretos e contínuos, usando resultados do programa principal e de vários subprogramas para qualquer ponto ou meio.
- SUBROTINA FLUTO --** Calcula fluxo total, assintótico e corrente para qualquer meio e valor de x , usando os coeficientes calculados e vários parâmetros.
- SUBROTINA ANFLU --** Calcula o fluxo angular para qualquer valor das variáveis, espacial e angular, usando os coeficientes e vários parâmetros.

A Figura A.1 mostra o esquema lógico de cálculo usado no programa

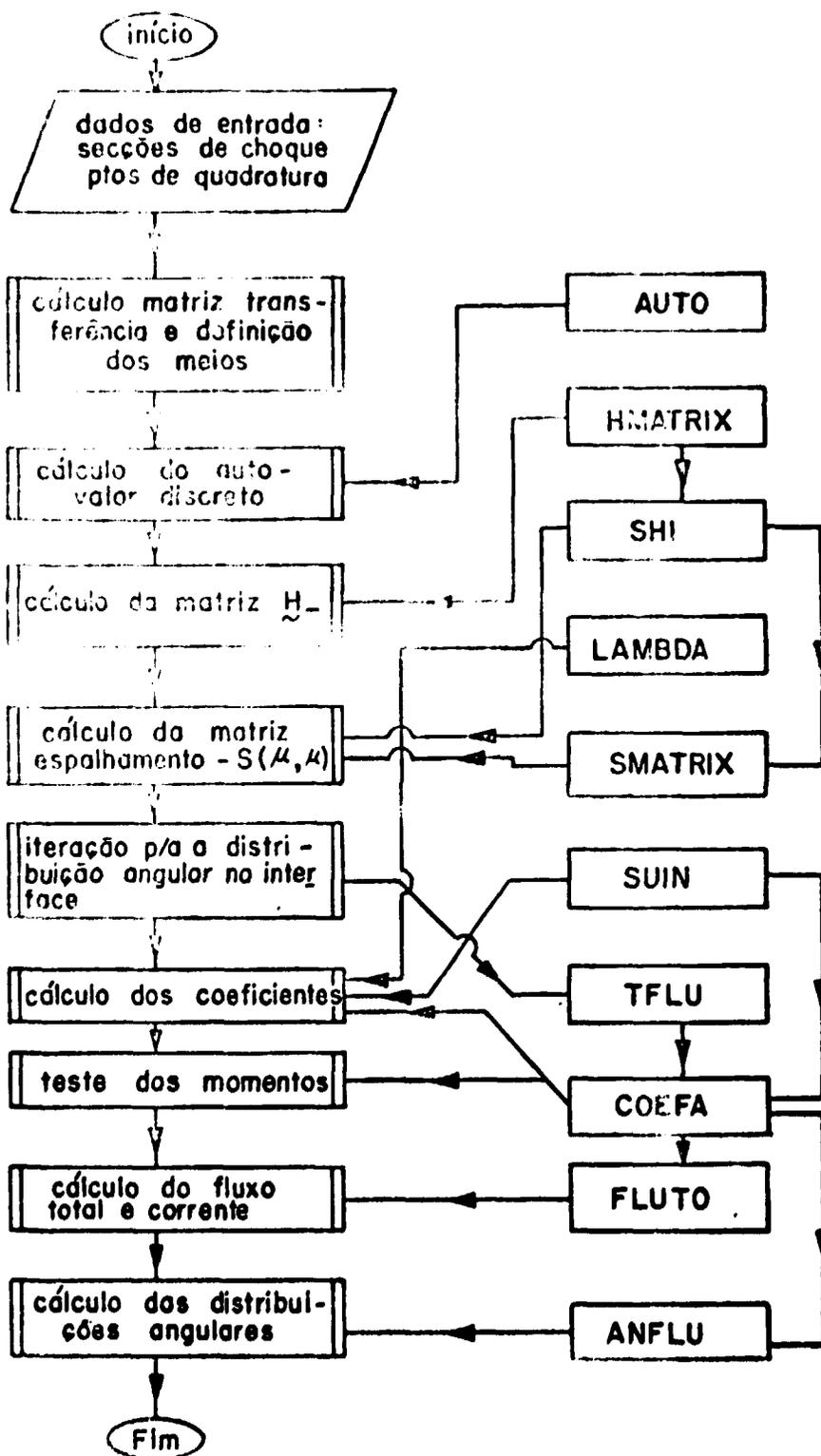


Figura A 1 Fluxograma do programa utilizado.

APÊNDICE B -- TESTE DOS MOMENTOS

Conforme discutido na secção 4, os coeficientes calculados devem ser tais que satisfaçam o chamado "teste dos momentos", ou seja, a condição de continuidade da distribuição angular na interface, deve ser satisfeita para todos seus momentos se os resultados obtidos forem corretos:

$$\int_{-1}^1 \psi_1(0, \mu) \mu^\alpha d\mu = \int_{-1}^1 \psi_2(0, \mu) \mu^\alpha d\mu \quad ; \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.1})$$

Este teste só é satisfeito para a solução da equação de transporte.

Nas soluções aproximadas o teste é satisfeito apenas para um determinado número de momentos. Por exemplo, na aproximação P-1 apenas os dois primeiros momentos (fluxo total e corrente) são satisfeitos.

Neste apêndice expõem-se os procedimentos analíticos e numérico usados neste trabalho para a verificação deste teste. Restringe-se a exposição apenas ao problema de Milne. A generalização para o problema da fonte constante é facilmente obtida, conforme se discutirá no fim desta secção.

Usando-se as Equações (3.1.4) e (3.1.5) para $x = 0$, a fim de exprimir a distribuição angular na interface, a Equação (B.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & P_1^{-1} \left\{ A(\nu_1) \int_{-1}^1 \psi_1(\nu_1, \mu) \mu^\alpha d\mu + \int_0^{1/\sigma_1} [A_1^{(1)}(\nu) \int_{-1}^1 \psi_{11}^{(1)}(\nu, \mu) \mu^\alpha d\mu \right. \\ & \quad \left. + A_2^{(1)}(\nu) \int_{-1}^1 \psi_{12}^{(1)}(\nu, \mu) \mu^\alpha d\mu] d\nu + \int_{1/\sigma_1}^1 A^{(2)}(\nu) \int_{-1}^1 \psi_1^{(2)}(\nu, \mu) \mu^\alpha d\mu d\nu \right. \\ & \quad \left. + \int_{-1}^1 \psi_1(-\nu_1, \mu) \mu^\alpha d\mu \right\} = P_2^{-1} \left\{ B(-\eta_1) \int_{-1}^1 \psi_2(-\eta_1, \mu) \mu^\alpha d\mu \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{1/\sigma_2} [B_1^{(1)}(-\eta) \int_{-1}^1 \psi_{21}^{(1)}(-\eta, \mu) \mu^\alpha d\mu + B_2^{(1)}(-\eta) \int_{-1}^1 \psi_{22}^{(1)}(-\eta, \mu) \mu^\alpha d\mu] d\eta \right. \\ & \quad \left. + \int_{1/\sigma_2}^1 B^{(2)}(-\eta) \int_{-1}^1 \psi_2^{(2)}(-\eta, \mu) \mu^\alpha d\mu d\eta \right\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Desta forma, torna-se necessário calcular-se as integrais do tipo:

$$M_\alpha^{(i)}(\xi) = \int_{-1}^1 \psi_i(\xi, \mu) \mu^\alpha d\mu \quad (\text{B.3})$$

Para tal, reescreve-se a equação de transporte, para o caso da matriz C simétrica, ou seja:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{\Psi}(x, \mu) + \sum \underline{\Psi}(x, \mu) = C \int_{-1}^1 \underline{\Psi}(x, \mu') d\mu'$$

propondo-se uma solução do tipo:

$$\underline{\Psi}(x, \mu) = \underline{\psi}(\nu, \mu) e^{-x/\nu}$$

inserindo-se na equação de transporte, obtém-se,

$$\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \underline{\psi}(\nu, \mu) + \sum \underline{\psi}(\nu, \mu) = C \underline{M}_0(\nu) \quad (B.4)$$

onde

$$\underline{M}_0(\nu) = \int_{-1}^1 \underline{\psi}(\nu, \mu) d\mu$$

Como discutido na secção 2, $\underline{M}_0(\nu)$ é uma função conhecida para qualquer valor de ν . Para ν igual ao auto-valor discreto, $\underline{M}_0(\nu)$ é dada por (2.6.6); e para $\nu \in (0, 1/\sigma)$ por (2.6.2); e para $\nu \in (1/\sigma, 1)$ também por (2.6.6).

Multiplicando-se (B.4) por $\mu^{\alpha-1}$ e integrando-se no intervalo $(-1, 1)$, obtém-se:

$$\underline{M}_{\alpha}(\nu) = \nu \sum \underline{M}_{\alpha-1}(\nu) - \frac{1}{\alpha} C \underline{M}_0(\nu) (1 - (-1)^{\alpha}) \quad \alpha \neq 1 \quad (B.5)$$

onde $\underline{M}_{\alpha}(\nu)$ é dado por (B.3). Obviamente, a Equação (B.5) é uma equação de recorrência para as integrais do tipo (B.3), e portanto dado que se conhece $\underline{M}_0(\nu)$, pode-se conhecer qualquer momento de ordem superior.

Desta forma, a Equação (B.2) quando escrita em termos de \underline{M}_{α} , tem a forma:

$$\begin{aligned} \underline{P}_1^{-1} \{ A(\nu_1) \underline{M}_{1\alpha}(\nu_1) + \int_0^{1/\sigma_1} [A_1^{(1)}(\nu) \underline{M}_{11\alpha}^{(1)}(\nu) + A_2^{(1)}(\nu) \underline{M}_{12\alpha}^{(1)}(\nu)] d\nu \\ + \int_{1/\sigma_1}^1 A^{(2)}(\nu) \underline{M}_{1\alpha}^{(2)}(\nu) d\nu + \underline{M}_{1\alpha}(-\nu_1) \} = \underline{P}_2^{-1} \{ B(-\eta_1) \underline{M}_2(-\eta_1) \\ + \int_0^{1/\sigma_2} [B_1^{(1)}(\eta) \underline{M}_{21\alpha}^{(1)}(-\eta) + B_2^{(1)}(-\eta) \underline{M}_{22\alpha}^{(1)}(\eta)] d\eta \end{aligned}$$

$$+ \int_{1/a_2}^1 B^{(2)}(\eta) M_{2\alpha}^{(2)}(\eta) d\eta \} \quad (B.6)$$

O teste dos momentos expresso através de (B.6) é facilmente realizável, pois as funções M_{α} podem ser obtidas da equação de recorrência para qualquer valor de α . Neste trabalho, aplicou-se este teste até o momento de ordem 20, tendo-se obtido 5 a 6 algarismos significantes. Convém salientar que devido ao comportamento ressonante dos coeficientes contínuos na região $(1/a, 1)$, conforme discutiu-se na secção 4, deve-se usar um número grande de pontos de quadratura (64 pontos), quando da integração numérica nesta região.

Na Tabela (A.1) mostra-se como ilustração os resultados desse teste para os casos 1 e 2. Nesta tabela as duas últimas colunas referem-se as diferenças entre o lado direito e o lado esquerdo da Equação (B.6) (Δ_{α}). As duas primeiras colunas referem-se aos valores significantes para o grupo 1 e 2, dos vinte momentos. Nota-se que a precisão diminui com o aumento de absorção no meio 2, isto devido ao comportamento dos coeficientes ser tal que aumentando-se a absorção, os picos tornam-se maiores e mais estreitos, vide secção 4, dificultando portanto a integração numérica.

Aplicação do teste é facilmente estendida ao problema da fonte constante, bastando a substituição do termo $(M_{\alpha}(\nu_1))$, do problema de Milne, por $(1/a + 1)^{-1} (1 - (-1)^{\alpha+1})^{-1} \Psi_{\alpha}$. Os resultados do teste, para este problema, são da mesma ordem de grandeza do problema de Milne, não sendo portanto necessário reportá-los.

É interessante salientar ainda que além de se testar a continuidade dos momentos da distribuição angular, testou-se também a continuidade desta distribuição ponto a ponto, ou seja:

$$I_1(0, \mu) = I_2(0, \mu) \quad \mu \in (0, 1)$$

obtendo-se a mesma precisão já discutida.

Tabela B.1

Testes dos Momentos até ordem 20(*) – Problema de Milne

Caso	α	Grupo 1	Grupo 2	Δ_{α_1}	Δ_{α_2}
1	0	,0510335	,159596	$9,5 \times 10^{-8}$	$2,0 \times 10^{-7}$
	1	-,0033923	-,012138	$1,0 \times 10^{-7}$	$1,1 \times 10^{-7}$
	2	,01711020	,05369126	$7,7 \times 10^{-9}$	$3,1 \times 10^{-9}$
	3	-,0019747	-,007257	$9,5 \times 10^{-8}$	$1,6 \times 10^{-7}$
	4	,0102901	,0323404	$1,4 \times 10^{-8}$	$2,4 \times 10^{-8}$
	5	-,0031947	-,005175	$9,2 \times 10^{-8}$	$1,9 \times 10^{-7}$
	6	,0073594	,0231500	$2,7 \times 10^{-8}$	$2,3 \times 10^{-8}$
	7	-,0010783	-,004022	$8,9 \times 10^{-8}$	$1,7 \times 10^{-7}$
	8	,0057285	,0180301	$3,7 \times 10^{-8}$	$1,8 \times 10^{-8}$
	9	-,0008790	-,003289	$8,7 \times 10^{-8}$	$1,4 \times 10^{-7}$
	10	,0046895	,0147658	$4,4 \times 10^{-8}$	$1,5 \times 10^{-8}$
	11	-,0007420	-,002782	$8,6 \times 10^{-8}$	$1,1 \times 10^{-7}$
	12	,0039696	,0125027	$5,0 \times 10^{-8}$	$1,2 \times 10^{-8}$
	13	-,0006419	-,002410	$8,4 \times 10^{-8}$	$9,5 \times 10^{-8}$
	14	,0034414	,0108414	$5,5 \times 10^{-8}$	$1,1 \times 10^{-8}$
	15	-,005656	-,0021268	$8,3 \times 10^{-8}$	$8,1 \times 10^{-8}$
	16	,0030372	,0095699	$5,9 \times 10^{-8}$	$9,5 \times 10^{-9}$
	17	-,0005055	-,0019026	$8,2 \times 10^{-8}$	$7,0 \times 10^{-8}$
	18	,0027810	,00856544	$6,3 \times 10^{-8}$	$8,7 \times 10^{-9}$
	19	-,0004570	-,0017212	$8,1 \times 10^{-8}$	$6,2 \times 10^{-8}$
20	,0024596	,00775183	$6,7 \times 10^{-8}$	$8,1 \times 10^{-9}$	
2	0	,033850	,115386	$3,3 \times 10^{-7}$	$1,5 \times 10^{-7}$
	1	-,00438319	-,0136997	$5,7 \times 10^{-9}$	$2,7 \times 10^{-8}$
	2	,0114679	,0391560	$8,9 \times 10^{-8}$	$4,3 \times 10^{-8}$
	3	-,0024962	-,008125	$2,9 \times 10^{-8}$	$1,2 \times 10^{-7}$
	4	,0069230	,0236671	$2,2 \times 10^{-8}$	$4,1 \times 10^{-8}$
	5	-,0017483	-,0057759	$4,2 \times 10^{-8}$	$1,3 \times 10^{-7}$
	6	,0049610	,0161728	$1,7 \times 10^{-8}$	$2,8 \times 10^{-8}$
	7	-,0013458	-,004480	$5,0 \times 10^{-8}$	$1,0 \times 10^{-7}$
	8	,0038662	,0132343	$4,5 \times 10^{-8}$	$1,8 \times 10^{-8}$
	9	-,0010940	-,0036596	$5,7 \times 10^{-8}$	$8,4 \times 10^{-8}$
	10	,0031676	,0108468	$6,5 \times 10^{-8}$	$1,3 \times 10^{-8}$
	11	-,0009217	-,0030929	$6,2 \times 10^{-8}$	$6,8 \times 10^{-8}$
	12	,0026829	,0091896	$8,2 \times 10^{-8}$	$1,0 \times 10^{-8}$
	13	-,0007963	-,0026783	$6,6 \times 10^{-8}$	$5,6 \times 10^{-8}$
	14	,0023269	,00797198	$9,7 \times 10^{-8}$	$9,2 \times 10^{-9}$
	15	-,0007009	-,0023616	$6,9 \times 10^{-8}$	$4,8 \times 10^{-8}$
	16	,002054	,00703940	$1,1 \times 10^{-7}$	$8,7 \times 10^{-9}$
	17	-,0006259	-,0021120	$1,2 \times 10^{-8}$	$4,2 \times 10^{-8}$
	18	,001838	,00630225	$1,2 \times 10^{-7}$	$8,4 \times 10^{-9}$
	19	-,0005655	-,00191000	$7,5 \times 10^{-8}$	$3,7 \times 10^{-8}$
20	,001664	,00570489	$1,3 \times 10^{-7}$	$1,3 \times 10^{-9}$	

(*) Para obtenção desses resultados, foram usados, 20 pontos de quadratura no intervalo (0,1/n) nas integrações numéricas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AMBARTSUMYAN, V. A. Diffuse reflection of light by a foggy medium. *C. r. Acad. Sci. USSR*, Moscow, 38:229-32, 1943.
2. BEDNARG, R. & MIKA, J. R. Energy dependent Boltzman equation in plane geometry. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 4:1285-92, 1963.
3. BELL, G. I. & GLASSTONE, S. *Nuclear reactor theory*. New York, Van Nostrand Reinhold, 1970.
4. BOWDEN, R. L.; McCROSSON, F. J. & RHODES, A. E. Solutions of transport equation with anisotropic scattering in slab geometry. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 9:753-9, 1968.
5. BUKART, A. R. *Application of invariance principles to critical problems in reflected reactors*. Raleigh, N. C, North Caroline State Univ., 1975. [Ph. D. Thesis].
6. CARLSON, B. G. *Solution of transport equation by Sn approximations*. Los Alamos, N. Mex., Los Alamos Scientific Laboratory, 1953. (LA-1599).
7. CASE, K. M. Elementary solutions of transport equation and their applications. *Ann. Phys.*, New York, 9:1-23, 1960.
8. _____; HOFFMAN, F. & PLACZEK, G. *Introduction to the theory of neutron diffusion*. Washington, D. C., Government Printing Office, 1953.
9. _____ & ZWEIFEL, P. F. Existence and uniqueness theorems for the neutron transport equation. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 4:1376-85, 1963.
10. _____ & ZWEIFEL, P. F. *Linear transport theory*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1967.
11. CHANDRASEKHARS, S. The angular distribution of the radiation at the interface of two adjoining media. *Can. J. Phys.*, Ottawa, 29:14-20, 1951.
12. _____, *Radiative transfer*. London, Oxford University Press, 1950.
13. DAVISON, B. *Neutron transport theory*. London, Oxford University Press, 1957.
14. ERDMANN, R. C. & LURIE, H. A two-region problem in time dependent monoenergetic neutron transport theory. 1. Analysis. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 28:190-7, 1967.
15. _____ & SIEWERT, C. E. Green's functions for the one-speed transport equation in spherical geometry. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 9:81-9, 1968.
16. FERZIGER, J. H. & SIMONS, G. M. Application of Case's method to plane parallel radiative transfer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Oxford, 9:972-87, 1966.
17. HOPF, E. *Mathematical problems of radiative equilibrium*. London. Cambridge University Press, 1934.
18. INONU, E. & ZWEIFEL, P. F. *Development of transport theory*. New York, Academic Press, 1967.

19. ISHIGURO, Y. *Two group neutron transport theory with linearly anisotropic scattering: half range orthogonality and critical slab problem*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, ago. 1973. (IEA-306).
20. _____ & JORGE, E. *Two-group Milne problem: a numerical study of the effect of scattering anisotropy*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, dez. 1974. (IEA-368).
21. _____ & MAIORINO, J. R. Two half-space Milne problem in two group neutron-transport theory. *Trans. Am. nucl. Soc.*, Hinsdale, Ill., 22:253-4, 1975.
22. JAUHO, P. & RAJAMAKI, M. Energy dependent neutron transport theory in adjacent half-space. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 43:145-53, 1971.
23. KORN, A. Rigorous solution of Milne problem for two adjacent half-space. *Nukleonik*, Berlin, 9:237-41, 1967.
24. KRIESE, J. T.; SIEWERT, C. E. & YENER, Y. Two group critical problems for slabs and spheres in neutron transport theory. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 50:3-9, 1973.
25. KUSCER, I.; McCORMICK, N. J. & SUMMERFIELD, G. C. Orthogonality of Case's eigen functions in one-speed transport theory. *Ann. Phys*, New York, 30:411-21, 1964.
26. _____ & ZWEIFEL, P. F. Time-dependent one-speed Albedo problem for a semi-infinite medium. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 6:1125-30, 1965.
27. KUSZELL, A. The critical problems for multilayer slab systems. *Acta phys. pol.*, Warszawa, 20:567-89, 1961.
28. LEONARD, A. & FERZIGER, J. H. Energy-dependent neutron transport theory in plane geometry. 3. Half-range completeness and half-space problem. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 26:181-91, 1966.
29. McCORMICK, N. J. Neutron transport for anisotropic scattering in adjacent half-space. 1. Theory. *Nucl. Sci. Engng.*, New York, 37:243-51, 1969.
30. McCORMICK, N. J. & DOYAS, R. J. Neutron transport for anisotropic scattering in adjacent half-space. 2. Numerical results. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 37:252-61, 1969.
31. _____ & KUSCER, I. Half-space neutron transport with linearly anisotropic scattering. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 6:1939-45, 1965.
32. _____ & MENDELSON, M. R. Transport solution of the one-speed slab Albedo problems. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 20:462-67, 1964.
33. MARK, J. C. *The spherical harmonics method*, 1. Chalk River, Ont., Atomic Energy Project, Division of Research, National Research Council of Canada, 1957. (CRT-340).
34. MENDELSON, M. R. & SUMMERFIELD, G. C. One speed neutron transport in two adjacent half space. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 5:668-74, 1964.
35. METCALF, D. R. & ZWEIFEL, P. F. Solution of two group neutron transport equation. 1 *Nucl. Sci. Engng*, New York, 33: 1-17, 1968.

36. _____ & ZWEIFEL, P. F. _____ 2. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 33:318-26, 1968.
37. MIKA, J. Neutron transport with anisotropic scattering. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 11:415-27, 1961.
38. MILNE, E. A. Radiative equilibrium in the outer layer of a star. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc. London*, 81:361, 1921.
39. MITSIS, G. J. *Transport solution to the monoenergetic critical problems*. Argonne, Ill., Argonne National Laboratory, Applied Mathematics Division, 1963. (ANL-6787).
40. MUSKHELISHVILI, N. I. *Singular integral equations*. Groningen, Noordhoff, 1963.
41. OZISIK, M. N. & SIEWERT, C. E. On the normal-mode expansion technique for radiative transfer in a scattering, absorbing and emitting slab with specular reflecting boundary. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Oxford, 12:611-20, 1969.
42. _____ & SIEWERT, C. E. Several particular solutions of the one speed transport equations. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 140:491-4, 1970.
43. PAHOR, S. One-speed neutron transport in slab geometry. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 29:248-53, 1967.
44. _____ & SHULTIS, J. K. Half-space general multigroup transport theory. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 10:2220-6, 1969.
45. _____ & ZWEIFEL, P. F. Invariant imbedding and Case Eigenfunctions. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 10:581-9, 1969.
46. REITH, D. & SIEWERT, C. E. Two-group neutron transport theory with anisotropic scattering. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 47:156-82, 1972.
47. SCHATZ, T. W. & SIEWERT, C. E. Two-group transport theory in spherical geometry. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 11:766-71, 1970.
48. SHURE, F. & NATELSON, M. Anisotropic scattering in half-space transport problem. *Ann. Phys.*, New York, 26:274-91, 1964.
49. SIEWERT, C. E. & BUKART, A. R. On the critical reactor problem for a reflector slab. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 59:263-5, 1975.
50. _____; BURNISTON, E. E. & KRIESE, J. T. Two-group neutron transport theory: existence and uniqueness of H-matrix. *J. nucl. Energy*, London, 26:469-82, 1972.
51. _____ & ISHIGURO, Y. *The Milne problem for two adjacent half-space in the theory of neutron diffusion with anisotropic scattering*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, mar. 1976. (IEA-409).
52. _____ & ISHIGURO, Y. Two-group neutron transport theory: half-range orthogonality, normalization integrals applications and computations. *J. nucl. Energy*, London, 26:251-69, 1972.

53. _____ & SHIEH, P. F. Two-group transport theory. *J. nucl. Energy*, London, 21:383-92, 1967.
54. _____ & ZWEIFEL, P. F. An exact solution of equation of radiative transfer for local thermodynamic equilibrium in the non-gray Case-Pickett fence approximation. *Ann. Phys.*, New York, 36:61-85, 1966.
55. VAN KAMPEN, N. G. On the theory of stationary waves in plasmas. *Physica*, Amsterdam, 21:949-63, 1955.
56. YOSHIMURA, T. & KATSURAGI, S. Multigroup treatment of neutron transport in plane geometry. *Nucl. Sci. Engng*, 33:297-302, 1968.
57. YVON, J. La diffusion macroscopique des neutrons: une méthode d'approximation. *J. nucl. Energy.*, London, 4:305-19, 1957.
58. ZELAZNY, R. Exact solution of a critical problem for a slab. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 2:538-42, 1961.
59. _____ & KUSZELL, A. Two-group approach in neutron transport theory in plane geometry. *Ann. Phys.*, New York, 16:81-5, 1961.

