BR7902443

INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA
IEA
- SÃO PAULO -

CÁLCULOS EM TEORIA DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS DE DOIS GRUPOS, COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO E LINEARMENTE ANISOTRÓPICO

Elisabete Jorge Pessine

DISSERTAÇÃO E TESE - IEA 066 **IEA - DT - 066**	**AGOSTO/1978**

DISSERTAÇÃO E TESE · IEA 066
IEA · DT · 066

AGOSTO/1978

CÁLCULOS EM TEORIA DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS DE DOIS GRUPOS, COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO E LINEARMENTE ANISOTRÓPICO

Elisabete Jorge Pessine

Dissertação para obtenção do Título de "Mestre em Ciências e Tecnologia Nucleares" – Orientador Prof. Dr. Yuji Ishiguro. Apresentada e defendida em 10 de janeiro de 1977, à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA
SÃO PAULO · BRASIL

Série DISSERTAÇÃO E TESE IEA

Nota: A redação, ortografia e conceitos são de responsabilidade dos autores.

ÍNDICE

Página

ÍNDICE DAS FIGURAS

Página

CÁLCULOS EM TEORIA DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS DE DOIS GRUPOS, COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO E LINEARMENTE ANISOTRÓPICO

Elisabete Jorge Pessine

RESUMO

Problemas típicos de semi-espaço, em teoria de transporte de nêutrons de dois grupos, são resolvidos numericamente através do método de expansão em autofunções singulares, ~~assumindo~~ espalhamento isotrópico e linearmente anisotrópico.
admitindo-se

Utilizando-se secções de choque de espalhamento isotrópico fornecidas por Metcalf e Zweifel apresentam-se os resultados numéricos para os problemas do Albedo, Milne e Fonte Constante para um semi-espaço de água leve pura considerando-se vários graus de anisotropia.

1 – INTRODUÇÃO

Como é notório, a demanda futura de energia mobilizará recursos até hoje não exaustivamente utilizados. Sabe-se, também, que a quantidade de combustível fóssil, hoje responsável pela demanda quase completa de energia do mundo, é limitada; segundo cálculos mais otimistas, as reservas deste tipo de combustível, ao nível de crescimento de consumo energético atual, não durariam mais que meio século.

A energia provinda de combustíveis fósseis, na geração de energia elétrica, vem sendo substituída gradativamente, com sucesso, pela energia nuclear.

Assim, a importância do reator nuclear, como fonte de energia, já é hoje reconhecida e responderá no futuro pela maior parcela da energia mundial a ser consumida.

O conhecimento do comportamento dos nêutrons dentro de um reator nuclear constitui um dos requisitos fundamentais necessários ao desenvolvimento do sistema. Entretanto, tal comportamento (movimento, distribuição, ...) não foi ainda bem estabelecido, embora existam complexas teorias a respeito e numerosos reatores tenham sido projetados com sucesso.

À procura de sistemas cada vez mais eficientes, a tecnologia se desenvolve tornando-se mais complexa, exigindo detalhes específicos sobre a movimentação e distribuição da população neutrônica dentro dos reatores; torna-se, pois, imperativo obter soluções mais rigorosas da equação de transporte de nêutrons.

Entretanto, a estrutura das equações de transporte é bem diferente e mais complicada do que as da física matemática clássica; por conseguinte suas soluções só são possíveis para problemas bem simples ou situações ideais.

Porém, a teoria de transporte é capaz de fornecer soluções exatas para vários problemas básicos, apesar de ter aplicação restrita na engenharia nuclear, em cálculos práticos. O conhecimento das soluções teóricas pode ser utilizado como padrão de comparação entre os métodos aproximativos.

Aprovado para publicação em julho/1977.

Um reator nuclear é um sistema dinâmico composto de vários elementos de diferentes propriedades. Durante sua operação, devido às reações que nele ocorrem, sua composição varia com o tempo. A energia dos nêutrons dentro do sistema também é um parâmetro que varia, podendo-se ter ao mesmo tempo nêutrons desde altas energias, nêutrons de fissão, até nêutrons de energia em torno de alguns elétrons volt (eV). Nota-se pois, que um reator nuclear é um sistema complexo. Um modelo matemático que o descreva e produza soluções satisfatórias só é mesmo possível se se fizer ou simplificações ou tratá-lo como um sistema ideal. Dentre as várias filosofias existentes, preferiu-se neste trabalho, dedicar-se à obtenção de soluções exatas de problemas ideais, para melhor compreensão do reator nuclear; e que, aquelas soluções possam servir como base de teste entre os vários métodos aproximativos existentes.

Assim, quando se considera o reator nuclear operando sob condições normais, admitindo-se que as propriedades do sistema não se modificam, a dependência temporal da distribuição dos nêutrons pode ser desprezada.

Quanto à dependência energética dos nêutrons nas secções de choque, considera-se que os nêutrons pertencem a um intervalo selecionado de energia, como um grupo, e define-se secções de choque para cada grupo como uma idéia apropriada sobre a energia considerada.

Quanto ao comportamento da distribuição dos nêutrons, sabe-se que em geral o espalhamento é anisotrópico, porém, quando se trabalha com nêutrons de fissão, admite-se que sua emissão é isotrópica; e que o espalhamento de nêutrons lentos por núcleos pesados é aproximadamente isotrópico.

Deste modo, admitindo-se o espalhamento isotrópico consegue-se obter um significado real deste comportamento.

Entretanto, faz-se necessário que se aprofunde no estudo do comportamento da distribuição dos nêutrons quando se incorporam altos graus de espalhamento anisotrópico na teoria de transporte.

Assim, considera-se neste trabalho a teoria de transporte de nêutrons de dois grupos, independente do tempo, em geometria plana com espalhamento isotrópico e linearmente anisotrópico.

1.2 – Estudos Anteriores

Desde a identificação do nêutron verificada em 1932 por Chadwick, muitos trabalhos e pesquisas sobre o fenômeno de transporte dos nêutrons tiveram lugar entre 1932 e 1939, sendo a fissão evidenciada neste período.

Não foi, porém, antes de 2 de dezembro de 1942 que Enrico Fermi e colaboradores obtiveram êxito na produção de fissão contínua e auto-sustentada em uma pilha atômica.

A reação em cadeia de Fermi foi o evento que marcou o amanhecer da era nuclear.

Os primeiros trabalhos apresentados na teoria de transporte de nêutrons foram baseados em técnicas desenvolvidas para o estudo de problemas astrofísicos, uma vez que a equação de transporte de nêutrons de uma velocidade é matematicamente equivalente à equação que descreve a transferência radiativa cinzenta. Embora a maior parte dos primeiros trabalhos em teoria de transporte terem sido resolvidos através de métodos aproximativos, Chandrasekhar[7] foi capaz de obter soluções exatas para vários problemas astrofísicos aplicando uma técnica baseada no princípio da invariância.

Um grande progresso foi alcançado, quando em 1960 Case[5] introduziu a técnica de expansão em autofunções singulares, como um recurso da teoria de transporte para obter soluções rigorosas da equação de transporte de nêutrons de uma velocidade.

Este método é semelhante à aproximação de expansão em autofunções utilizada no estudo de problemas de contorno relacionado com equações diferenciais parciais.

Através dele é possível escrever a solução de um determinado problema numa soma linear dos modos normais da equação de transporte homogênea. Esta soma contém um conjunto de coeficientes de expansão arbitrários, que são determinados através de condições de contorno apropriadas.

A seguir, deve-se demonstrar que este conjunto de auto-funções é completo, sobre o intervalo da variável independente; e também deve-se estabelecer relações de ortogonalidade e normalização relativas àquele conjunto.

Estabelecidos estes conceitos, a solução de um determinado problema descrito através deste método é imediata.

Os primeiros pesquisadores a se utilizarem deste método na solução da equação de transporte em multigrupos foram: Zelazny e Kuszell[34] para um modelo de dois grupos, com espalhamento isotrópico e independente do tempo. Estes autores demosntraram o teorema da completividade estabelecendo que os modos normais são adequados para solucionar problemas de meio e infinito.

Mais tarde, Siewert e Zweifel[28,29] estabeleceram de forma rigorosa o teorema da completividade tanto para o semi-intervalo como para o intervalo total, bem como as relações de ortogonalidade, obtendo soluções analíticas para um caso especial da equação de transporte de dois grupos (determinante da matriz de transferência nulo) aplicada no estudo de transferência radiativa.

Porém, devido às restrições sobre os parâmetros envolvidos, as soluções não são aplicáveis no caso do transporte de nêutrons.

Siewert e Shieh[27] demonstraram, para o problema de dois grupos com espalhamento isotrópico, a completividade no intervalo total e a ortogonalidade das autofunções, porém, seus resultados são somente aplicados em problemas de meio infinito.

Metcalf e Zweifel[16,17] considerando problemas de semi-espaço, apresentaram resultados numéricos para os problemas de Milne e Fonte Constante assumindo espalhamento isotrópico e dois grupos.

Yoshimura e Katsuragi[33] aplicando Siewert et al[27], estenderam os estudos para o tratamento da equação de transporte em multi-grupos, demonstrando a completividade das auto-soluções através do uso da relação de ortogonalidade da solução adjunta.

Entretanto, a maior parte destes trabalhos são rstritos ao espalhamento isotrópico e suas aplicações em problemas de transporte se tornam limitados, uma vez que não são demonstradas para o semi-intervalo a completividade e ortogonalidade das autofunções.

Deste modo, nos últimos anos procurou-se ampliar o estudo, investigando-se problemas de semi-espaço[18-21,24] para multi-grupos incluindo os efeitos de espalhamento anisotrópico[15,22,24,32]. Estes trabalhos desenvolveram-se ora através do método de Case, ora através do princípio da invariância de Chandrasekhar em conjunto com o método de Case[18,21].

Entretanto, foi no trabalho de Siewert[25] que se propôs uma nova técnica para tratar de problemas de semi-espaço em multigrupo. Através dele Siewert e Ishiguro[26], estabeleceram relações de ortogonalidade para o semi-espaço, num modelo de dois grupos e espalhamento isotrópico.

Embora, este trabalho fosse baseado no princípio da invariância, restrito a meios não multiplicadores, os trabalhos de Siewert, Burniston e Kriese[30] e Burniston, Mullikin e Siewert[4] estabelecem que o teorema demonstrado por Ishiguro[26] pode ser colocado tanto para o caso de meio multiplicador ou não multiplicador em base matemática sólida[4].

Através da mesma técnica, Ishiguro[9] ampliou o estudo para um modelo de espalhamento anisotró, 'co.

Em outros trabalhos citados, utilizou-se da geometria plana; para outras geometrias (esférica) tem-se o trabalho de Schnatz[23] e Kaper[12].

1.3 – Objetivo

Utilizando-se a teoria de transporte de nêutrons de dois grupos, o método de Case e as relações de ortogonalidade para semi-intervalo de Ishiguro, propõe-se obter resultados numéricos precisos para três problemas clássicos de transporte – Milne, Fonte Constante e Albedo – considerando-se espalhamento anisotrópico num sistema vácuo-água leve pura.

Embora vários problemas tenham sido resolvidos para o espalhamento isotrópico e resultados numéricos apresentados[17,26,14], porém são pouco conhecidos os resultados numéricos quando se assume espalhamento anisotrópico[9,10,1].

Os resultados obtidos por Bosler e Metcalf[1] são baseados na resolução de equações integrais singulares assim como os resultados de Metcalf e Zweifel[17].

Acredita-se que com o atual desenvolvimento de modernos computadores, aquele tipo de encaminhamento possa realmente conduzir a resultados precisos e de rápida convergência.

Entretanto, preferiu-se conduzir os cálculos deste trabalho, a despeito da nova tecnologia, à resolução numérica de equações regulares convencionais, e mostrar que:

a) realmente é possível, através do uso da relações de ortogonalidade[9];

b) o cálculo do sistema em que as equações são conduzidas é facilmente elaborado, fornecendo boa precisão e rápida convergência e,

c) a obtenção através do esquema proposto, de resultados numéricos que possam ser utilizados em conjunto com os resultados dos diversos métodos aproximativos.

2 – DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

2.1 – Introdução

A partir do método de expansão em autofunções singulares estabelece-se a solução geral da equação de transporte de nêutrons de dois grupos com espalhamento anisotrópico.

Demonstra-se relações de ortogonalidade concernentes às soluções da equação de transporte e faz-se aplicações através de problemas clássicos da teoria de transporte.

2.2 – Solução Geral da Equação de Transporte

A equação de transporte de nêutrons de dois grupos, estacionária, com espalhamento anisotrópico com simetria azimutal para geometria plana.

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \psi_1(z,\mu) + \sigma_1 \psi_1(z,\mu) = \int_{-1}^{1} f_{11}(\mu,\mu')\psi_1(z,\mu')d\mu' + \int_{-1}^{1} f_{12}(\mu,\mu')\psi_2(z,\mu')d\mu' \tag{2.2.1}$$

e

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \psi_2(z,\mu) + \sigma_2 \psi_2(z,\mu) = \int_{-1}^{1} f_{21}(\mu,\mu')\psi_1(z,\mu')d\mu' + \int_{-1}^{1} f_{22}(\mu,\mu')\psi_2(z,\mu')d\mu' \tag{2.2.2}$$

$\psi_1(z,\mu)$ e $\psi_2(z,\mu)$ são os fluxos angulares nos grupos 1 e 2 respectivamente; σ_1 e σ_2 são as secções de choque total macroscópicas para cada grupo.

Considera-se o meio homogêneo e as funções de transferência $f_{ij}(\mu,\mu')$ para $i,j = 1,2$ para quando se assume espalhamento linearmente anisotrópico fornecidas pela seguinte equação,

$$f_{ij} = \frac{1}{2} [\sigma_{ij_s}^{(o)} + \chi_i \bar{\nu}_j \sigma_{j_f}] + \frac{3}{2} \sigma_{ij_s}^{(1)} \mu\mu' . \tag{2.2.3}$$

$\sigma_{ij_s}^{(o)}$ e $\sigma_{ij_s}^{(1)}$ são as secções de choque de espalhamento macroscópicas que descrevem a transferência dos nêutrons do grupo j para o grupo i quando se toma os termos de ordem 0 e 1 da função $f(\mu,\mu')$ expandida em polinômios de Legendre; σ_{j_f} representa a secção de choque de fissão macroscópica para o grupo j; $\bar{\nu}_j$ é o número médio de nêutrons produzidos por fissão no grupo j e, χ_i representa a probabilidade que os nêutrons de fissão possuam energias no grupo i ($\chi_1 + \chi_2 = 1$).

Assume-se, sem restrições, que $\sigma_2 < \sigma_1$ e dividem-se as equações (2.2.1) e (2.2.2) por σ_2. Define-se $\sigma = \sigma_1/\sigma_2$ e, fazendo-se uso de $x = \sigma_2 z$ escrevem-se as equações resultantes em uma forma matricial conveniente, a mesma utilizada na referência[22].

Deste modo tem-se:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) + \underset{\sim}{\Sigma}\, \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) = \underset{\sim}{C} \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu')d\mu' + \mu\, \underset{\sim}{B} \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu')\mu'\, d\mu' \tag{2.2.4}$$

A matriz $\underset{\sim}{\Sigma}$ representa,

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.5a}$$

O vetor fluxo angular, $\underset{\sim}{\Psi}(x,\mu)$ é definido como,

$$\underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x,\mu) \\ \Psi_2(x,\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\sigma_2 z,\mu) \\ \psi_2(\sigma_2 z,\mu) \end{bmatrix} \tag{2.2.5b}$$

e as matrizes das secções de choque macroscópicas de transferência por,

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \text{ de elementos } C_{ij} = \frac{1}{2\sigma_2} [\sigma_{ij_s}(0) + \chi_i \bar{\nu}_j \sigma_{j_f}], \quad (2.2.5c)$$

e

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ de elementos } b_{ij} = \frac{3}{2\sigma_2} \sigma_{ij_s}^{(1)} \quad (2.2.5d)$$

Ter-se-á espalhamento isotrópico quando se tomar $b_{ij} = 0$.

Reith e Siewert[22] obtiveram um conjunto de auto-soluções da equação (2.2.4) apresentando, no intervalo total, as propriedades de completividade e ortogonalidade das soluções.

Ishiguro[9] considerando o semi-intervalo estabeleceu a propriedade de ortogonalidade das soluções da equação (2.2.4).

A solução numérica dos problemas propostos neste trabalho, é obtido utilizando-se o mesmo formalismo e notação apresentados por Ishiguro[9], visto tratar-se de problemas típicos de semi-espaço.

O método empregado é descrito sucintamente a seguir:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,\mu) + \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) = \underset{\sim}{Q}(\mu) \underset{\sim}{D} \int_{-1}^{1} \tilde{\underset{\sim}{Q}}(\mu') \Psi(x,\mu')d\mu', \quad (2.2.6)$$

onde se definem as matrizes $\underset{\sim}{Q}(\mu)$, (2 x 4) e $\underset{\sim}{D}$, (4 x 4) como sendo:

$$\underset{\sim}{Q}(\mu) = [\underset{\sim}{I} \;\; \mu \;\; \underset{\sim}{I}]. \quad (2.2.7)$$

sendo a matriz $\underset{\sim}{I}$ unitária (2 x 2),

e

$$D \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{B} \end{bmatrix}, \quad (2.2.8)$$

A solução que se propõe para a equação (2.2.6) é da seguinte forma;

$$\underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) = \underset{\sim}{F}(\nu,\mu) \exp(-x/\nu). \quad (2.2.9)$$

Aplicando a equação (2.2.9) na equação (2.2.6) obtém-se a equação das autofunções após cancelar a dependência espacial,

$$[\underset{\sim}{\Sigma} - \frac{\mu}{\nu} \underset{\sim}{I}] \cdot \underset{\sim}{F}(\nu,\mu) = \underset{\sim}{Q}(\mu) \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\Gamma}(\nu) \underset{\sim}{M}(\nu), \quad (2.2.10)$$

onde se definiu:

$$\underset{\sim}{M}(\nu) = \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{F}(\nu,\mu)\, d\mu \,, \tag{2.2.11}$$

e

$$\underset{\sim}{\Gamma}(\nu) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} \\ \nu \, | \, \underset{\sim}{\Sigma} - 2\,\underset{\sim}{C} \, | \end{bmatrix} . \tag{2.2.12}$$

A solução da equação (2.2.10) é escrita como sendo,

$$\underset{\sim}{F}(\nu,\mu) = \underset{\sim}{E}(\nu,\mu)\, \underset{\sim}{Q}(\mu)\, \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\Gamma}(\nu)\, \underset{\sim}{M}(\nu), \tag{2.2.13}$$

onde

$$\underset{\sim}{E}(\pm \nu_i,\mu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\nu_i}{\sigma\nu_i \pm \mu} & 0 \\ 0 & \dfrac{\nu_i}{\nu_i \pm \mu} \end{bmatrix}, \; \pm \nu_i \notin (-1,1), \; i = 1, 2, \ldots, \kappa \,, \tag{2.2.14a}$$

$$\underset{\sim}{E}_{\alpha}^{(1)}(\nu,\mu) = \nu\, \underset{\sim}{K}(\nu,\mu) + \omega_{\alpha}^{(1)}(\nu)\, \delta(\nu,\mu), \; \nu \in \left(-\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right) \text{ e } \tag{2.2.14b}$$

$$\alpha = 1,\, 2,$$

$$\underset{\sim}{E}^{(2)}(\nu,\mu) = \nu\, \underset{\sim}{K}(\nu,\mu) + \omega^{(2)}(\nu)\, \underset{\sim}{\delta}(\nu,\mu), \; \nu \in \left(-1, -\frac{1}{\sigma}\right) \cup \left(\frac{1}{\sigma}, 1\right), \tag{2.2.14c}$$

$$\underset{\sim}{K}(\nu,\mu) = \begin{bmatrix} \dfrac{P}{\sigma\nu - \mu} & 0 \\ 0 & \dfrac{P}{\nu - \mu} \end{bmatrix}, \; \underset{\sim}{\delta}(\nu,\mu) = \begin{bmatrix} \delta(\sigma\nu - \mu) & 0 \\ 0 & \delta(\nu - \mu) \end{bmatrix} . \tag{2.2.14d,e}$$

e pois, como foi observado por Siewert e Zweifel[28,29], na solução da equação (2.2.10) três regiões devem ser consideradas: $\nu \notin (-1,1)$, $\nu \in \left(-\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)$ e $\nu \in (-1, -1/\sigma) \cup (1/\sigma, 1)$, e o símbolo P das equações (2.2.14) indica que as integrais deverão ser interpretadas através do significado de valor principal de Cauchy

Os autovalores discretos $\pm \nu_i$ são as raízes positivas da função de dispersão $\Lambda(z) = \det \underset{\sim}{\Lambda}(z)$ onde,

$$\underset{\sim}{\Lambda}(z) = \underset{\sim}{I} + z \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\theta}(\mu) \underset{\sim}{Q}^*(\mu) \frac{d\mu}{\mu - z} \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\Gamma}(z), \tag{2.2.15}$$

e o carácter (*) foi empregado para representar a mudança μ para $\sigma\mu$ na linha superior da matriz, assim:

$$\underset{\sim}{Q}^*(\mu) = [\underset{\sim}{I} \;\; \mu \;\; \underset{\sim}{\Sigma}] \tag{2.2.16}$$

Representa-se por z uma variável complexa; preferiu-se esta representação na equação (2.2.15) uma vez que as raízes desta equação podem ser real ou complexa[16].

O vetor de normalização $\underset{\sim}{M}(\pm \nu_i)$ deverá satisfazer;

$$\underset{\sim}{\Lambda}(\pm \nu_i) \underset{\sim}{M}(\pm \nu_i) = \underset{\sim}{0} \tag{2.2.17}$$

e $\underset{\sim}{\theta}(\mu)$ é definido por;

$$\underset{\sim}{\theta}(\mu) = \begin{bmatrix} \theta(\mu) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.18}$$

para $\theta(\mu) = 1$ se $\mu \epsilon (-\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma})$ e $\theta(\mu) = 0$ para valores fora daquele intervalo.

As funções $\omega_\alpha^{(1)}(\nu)$ e $\omega^{(2)}(\nu)$ são obtidas, para o autovalor contínuo $\nu\epsilon(-1,1)$, através do seguinte requisito;

$$\det [\underset{\sim}{\lambda}(\nu) - \omega(\nu) \underset{\sim}{\theta}(\nu) \underset{\sim}{Q}^*(\nu) \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\Gamma}(\nu)] = \underset{\sim}{0} \tag{2.2.19}$$

onde

$$\underset{\sim}{\lambda}(\nu) = \underset{\sim}{I} + \nu P \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\theta}(\mu) \underset{\sim}{Q}^*(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \nu} \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\Gamma}(\nu), \tag{2.2.20}$$

e os vetores de normalização correspondentes $\underset{\sim}{M}_\alpha^{(1)}(\nu)$ e $M^{(2)}(\nu)$ através de,

$$[\underset{\sim}{\lambda}(\nu) - \omega_\alpha^{(1)}(\nu) \underset{\sim}{\theta}(\nu) \underset{\sim}{Q}^*(\nu) \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\Gamma}(\nu)] \underset{\sim}{M}_\alpha^{(1)}(\nu) = \underset{\sim}{0} \tag{2.2.21a}$$

e

$$[\underset{\sim}{\lambda}(\nu) - \omega^{(2)}(\nu) \underset{\sim}{\theta}(\nu) \underset{\sim}{Q}^*(\nu) \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\Gamma}(\nu)] \underset{\sim}{M}^{(2)}(\nu) = \underset{\sim}{0} \tag{2.2.21b}$$

Reith e Siewert[22] demonstraram que as soluções estabelecidas constituem um conjunto completo para a expansão no intervalo total de funções arbitrárias de Hölder.

Deste modo a solução geral da equação (2.2.6) pode ser escrita como:

$$\underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) = \sum_{i=1}^{\kappa} [A(\nu_i)\, \underset{\sim}{F}(\nu_i,\mu) \exp(-x/\nu_i) + A(-\nu_i)\, \underset{\sim}{F}(-\nu_i,\mu)$$

$$\exp(x/\nu_i)] + \int_0^{1/\sigma} [A_1^{(1)}(\nu)\, \underset{\sim}{F}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_2^{(1)}(\nu)\, \underset{\sim}{F}_2^{(1)}(\nu,\mu)] \exp(-x/\nu)\, d\nu$$

$$+ \int_{1/\sigma}^{1} A^{(2)}(\nu)\, \underset{\sim}{F}^{(2)}(\nu,\mu) \exp(-x/\nu)\, d\nu + \underset{\sim}{\Psi}_{part}(x,\mu),$$

$$x \geqslant 0,\ \mu \in (-1,1), \tag{2.2.22}$$

onde $A(\pm\nu_i)$, $A_1^{(1)}(\nu)$, $A_2^{(1)}(\nu)$ e $A^{(2)}(\nu)$ são coeficientes de expansão a serem determinados através de condições de contorno adequados e, κ representa o número de pares[27] de auto-valores discretos; $\underset{\sim}{\Psi}_{part}(x,\mu)$ é uma solução particular resultante de problemas a serem estudados (Capítulo 2.4).

Para completar esta parte seguem algumas considerações sobre a equação adjunta.

A equação adjunta é definida substituindo-se $\tilde{\underset{\sim}{D}}$ na equação (2.2.6) por $\underset{\sim}{D}$ e resolvida de maneira análoga à já exposta. Em particular, foi demonstrado[31] que o espectro dos auto-valores da equação adjunta é idêntico ao da equação (2.2.6).

A partir deste ponto utilizar-se-á do índice 'a' para se referir a funções relacionadas com a equação adjunta.

2.3 – As Relações de Ortogonalidade

As relações de ortogonalidade de semi-intervalo das soluções da equação (2.2.22) foram obtidas de uma maneira formal através da técnica do "invariant imbedding".

Essas relações constituem a parte principal de todo o desenvolvimento analítico pois, é a partir de seu estabelecimento que se obtém certas funções matriciais, semelhantes às funções H de Chandrasekhar, sobre as quais é possível expressar os coeficientes de expansão da equação (2.2.22) e obter-se resultados numéricos exatos através de equações integrais regulares, evitando assim o cálculo dos coeficientes através de equações integrais singulares[17,18,1].

Como foi observado, os coeficientes de expansão equação (2.2.22), devem ser determinados[9] através de condições de contorno apropriadas.

Considerando-se um meio não multiplicador constituído de um semi-espaço, a solução para este sistema em geral pode ser escrita como,

$$\underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) = \sum_{i=1}^{\kappa} A(\nu_i)\, \underset{\sim}{\Phi}(\nu_i,\mu) \exp(-x/\nu_i) + \int_{1/\sigma}^{1} A^{(2)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}^{(2)}(\nu,\mu) \exp(-x/\nu)\, d\nu$$

$$+ \int_{1}^{1/\sigma} [A_1^{(1)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_1^{(2)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}_1^{(2)}(\nu,\mu)] \exp(-x/\nu)\, d\nu + \underset{\sim}{\Psi}_p(x,\mu), \tag{2.3.1}$$

onde $\Psi_p(x,\mu)$ representa uma solução particular correspondente a termos de fonte não homogêneas que devem existir e que devem conter, como no problema de Milne, um termo divergente (como $x \to \infty$).

Os coeficientes na equação (2.2.22) correspondentes aos autovalores negativos são tomados como zero a condição física de que a solução homogênea é finita. As autofunções Φ são as derivadas por Reith e Siewert e podem ser escritas explicitamente, enquanto as autofunções $\underset{\sim\alpha}{F}^{(1)}(\nu,\mu)$ possuem em geral radicais, como;

$$\underset{\sim\alpha}{\Phi}^{(1)}(\nu,\mu) = \begin{bmatrix} \nu \dfrac{P}{\sigma\nu-\mu} \Delta_{1\alpha}(\nu\mu) + \lambda_{1\alpha}(\nu)\,\delta\,(\sigma\nu-\mu) \\ \nu \dfrac{P}{\nu-\mu} \Delta_{2\alpha}(\nu\mu) + \lambda_{2\alpha}(\nu)\,\delta\,(\nu-\mu) \end{bmatrix}, \qquad (2.3.2)$$

$\alpha = 1$ e 2,

onde $\Delta_{\alpha\beta}(\nu\,\mu)$ e $\lambda_{\alpha\beta}(\nu)$ representam os elementos das matrizes $\underset{\sim}{\Delta}(\nu\mu) = \underset{\sim}{C} + \nu\mu\,\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{\lambda}(\nu)$.

Para os outros autovetores, normalizam-se as equações (2.2.14c) e (2.2.14a) para se obter;

$$\Phi^{(2)}(\nu,\mu) = \begin{bmatrix} \nu \dfrac{1}{\sigma\nu-\mu}\,[\Lambda_{11}(\nu)\Delta_{12}(\nu\mu) - \Lambda_{12}(\nu)\Delta_{11}(\nu\mu)] \\ \nu \dfrac{1}{\nu-\mu}\,[\Lambda_{11}(\nu)\Delta_{22}(\nu\mu) - \Lambda_{12}(\nu)\Delta_{21}(\nu\mu) + \lambda(\nu)\delta(\nu-\mu)] \end{bmatrix}, \qquad (2.3.3)$$

$\nu \in (1/\sigma, 1)$,

e a solução discreta,

$$\Phi(\pm\nu_i,\mu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\nu_i}{\sigma\nu_i \pm \mu}\,[\Lambda_{11}(\nu_i)\Delta_{12}(\pm\nu_i\mu) - \Lambda_{12}(\nu_i)\Delta_{11}(\pm\nu_i\mu)] \\ \dfrac{\nu_i}{\nu_i \pm \mu}\,[\Lambda_{11}(\nu_i)\Delta_{22}(\pm\nu_i\mu) - \Lambda_{12}(\nu_i)\Delta_{21}(\pm\nu_i\mu)] \end{bmatrix}, \qquad (2.3.4)$$

onde $\Lambda_{\alpha\beta}(\xi)$, $\alpha,\beta = 1,2$ são os elementos das matrizes $\underset{\sim}{\Lambda}(\xi)$, $\xi = \pm\nu_i$ e $\underset{\sim}{\lambda}(\xi)$, $\xi = \nu$; e $\lambda(\nu) = \det \underset{\sim}{\lambda}(\nu)$.

Na referência[9] estão resumidos os resultados finais sobre as relações de ortogonalidade.

Os coeficientes na equação (2.3.1) devem ser determinados através da condição de contorno na fronteira do meio, x = 0.

A condição de contorno pode, em geral, ser escrita na seguinte forma,

$$\underset{\sim}{I}(\mu) = \sum_{i=1}^{K} A(\nu_i)\,\Phi(\nu_i,\mu)$$

$$+ \int_0^{1/\sigma} [A_1^{(1)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_1^{(2)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}_1^{(2)}(\nu,\mu)]\, d\nu$$

$$+ \int_{1/\sigma}^{0} A^{(2)}(\nu)\, \Phi^{(2)}(\nu,\mu)\, d\nu\ ,\ \mu \in (0,1) \qquad (2.3.5)$$

$\underset{\sim}{I}(\mu)$ é uma função conhecida, que deve possuir, dependendo do problema em estudo, uma solução particular, uma distribuição incidente específica.

Estabelecendo-se relações de ortogonalidade, procura-se obter as soluções da equação (2.3.5) na seguinte forma;

$$A(\nu_i) = \frac{1}{N(\nu_i)} [\, \underset{\sim}{\theta}(\nu_i,\mu), \underset{\sim}{I}(\mu)\,],\ i = 1, 2 \ldots, \kappa \qquad (2.3.6a)$$

$$A_\alpha^{(1)}(\nu) = \frac{1}{N^{(1)}(\nu)} [\underset{\sim}{\theta}_\alpha^{(1)}(\nu,\mu), \underset{\sim}{I}(\mu)],\ \nu \in (0, 1/\sigma),\ \alpha = 1, 2, \qquad (2.3.6b)$$

e

$$A^{(2)}(\nu) = \frac{1}{N^{(2)}(\nu)} [\, \underset{\sim}{\theta}^{(2)}(\nu,\mu), \underset{\sim}{I}(\mu)],\ \nu \in (1/\sigma, 1), \qquad (2.3.6c)$$

onde (x,y) representa um produto interno apropriado, $N(\nu_i)$, $N^{(1)}(\nu)$ e $N^{(2)}(\nu)$ fatores de normalização e $\underset{\sim}{\theta}(\xi, \mu)$ um vetor adjunto adequado.

Definem-se as matrizes (2 x 2) $\underset{\sim}{s}(\mu, \mu')$, $h(\mu')$ e $\ell(\mu')$ para um semi-espaço $(x > 0)$, não multiplicador de fontes livres por;

$$\underset{\sim}{\Psi}(0, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underset{\sim}{s}(\mu,\mu')\underset{\sim}{\Psi}(0,\mu')\, d\mu',\ \mu \in (0,1) \qquad (2.3.7)$$

$$\int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu)\, d\mu = \int_0^1 \underset{\sim}{\tilde{h}}(\mu)\underset{\sim}{\Psi}(x,\mu)\, d\mu, \qquad (2.3.8)$$

e

$$\int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu)\mu\, d\mu = \int_0^1 \underset{\sim}{\tilde{\ell}}(\mu)\underset{\sim}{\Psi}(x,\mu)\, d\mu, \qquad (2.3.9)$$

onde $\underset{\sim}{\Psi}(x, \mu)$ é uma solução de semi-espaço da equação (2.2.1).

Através do princípio da invariância[7] e da reciprocidade da matriz $\underset{\sim}{s}$ obtiveram-se as seguintes equações;

$$\underset{\sim}{\tilde{h}}(\mu) = \underset{\sim}{I} + \frac{1}{2} \int_0^1 \underset{\sim}{s}(\mu',\mu)\, \frac{d\mu'}{\mu'}\ , \qquad (2.3.10a)$$

$$\tilde{\underline{\ell}}(\mu) = \mu\,\underline{1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \underline{s}\,(\mu',\mu)\,d\mu'\,, \tag{2.3.10b}$$

e

$$\frac{1}{\mu}\,\Sigma\,\underline{s}(\mu,\mu_o) + \frac{1}{\mu_o}\underline{s}(\mu,\mu_o)\,\underline{\Sigma} = 2\,\underline{\Phi}(\mu)\,\underline{D}\,\tilde{\underline{\Psi}}(\mu_o), \tag{2.3.10c}$$

onde se definiram as seguintes matrizes (2 x 4),

$$\underline{\Psi}(\mu) = [\,\underline{h}_e(\mu) \qquad -\underline{\ell}_e(\mu)\,], \tag{2.3.11a}$$

e

$$\underline{\Phi}(\mu) = [\,\underline{h}_e(\mu) \qquad -\underline{\ell}_e(\mu)\,]. \tag{2.3.11b}$$

Definindo-se as seguintes matrizes;

$$\underline{S}(\mu,\mu_o) = \begin{bmatrix} s_{11}(\sigma\mu,\sigma\mu_o) & s_{12}(\sigma\mu,\mu_o) \\ s_{21}(\mu\;,\sigma\mu_o) & s_{22}(\mu\;,\mu_o) \end{bmatrix}, \tag{2.3.12a}$$

$$\underline{H}(\mu) = \begin{bmatrix} h_{11}(\sigma\mu) & h_{12}(\sigma\mu) \\ h_{21}(\;\mu) & h_{22}(\;\mu) \end{bmatrix}, \tag{2.3.12b}$$

e

$$\underline{L}(\mu) = \begin{bmatrix} \ell_{11}(\sigma\mu) & \ell_{12}(\sigma\mu) \\ \ell_{21}(\;\mu) & \ell_{22}(\;\mu) \end{bmatrix}, \tag{2.3.12c}$$

pode-se expressar a matriz $\underline{S}$ da equação (2.3.10c) por;

$$\underline{S}\,(\mu,\mu_o) = \frac{2\mu\mu_o}{\mu + \mu_o}\,\underline{\Phi}^*(\mu)\,\underline{D}\,\tilde{\underline{\Psi}}^*(\mu_o)\,, \tag{2.3.13}$$

onde

$$\underline{\Psi}^*(\mu) = [\,\underline{H}(\mu) \qquad \underline{L}(\mu)\,], \tag{2.3.14a}$$

e

$$\underset{\sim}{\Phi}^*(\mu) = [\underset{\sim}{H}_a(\mu) \qquad -\underset{\sim}{L}_a(\mu)\ ]. \tag{2.3.14b}$$

As matrizes $\underset{\sim}{\Psi}^*(\mu)$ e $\underset{\sim}{\Phi}^*(\mu)$, $\mu\epsilon(0,1)$ satisfazem as seguintes equações integrais regulares não lineares;

$$\underset{\sim}{\Psi}^*(\mu) = \underset{\sim}{Q}^*(\mu) + \mu\,\underset{\sim}{\Psi}^*(\mu)\,\tilde{\underset{\sim}{D}}\int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\Phi}}^*(\mu')\underset{\sim}{\theta}(\mu')\underset{\sim}{Q}^*(-\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu} \tag{2.3.15a}$$

e

$$\underset{\sim}{\Phi}^*(\mu) = \underset{\sim}{Q}^*(-\mu) + \mu\,\underset{\sim}{\Phi}^*(\mu)\,\tilde{\underset{\sim}{D}}\int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\Psi}}^*(\mu')\underset{\sim}{\theta}(\mu')\underset{\sim}{Q}^*(-\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu} \tag{2.3.15b}$$

As equações (2.3.15a,b) representam quatro equações acopladas em termos das matrizes $\underset{\sim}{H}(\mu)$, $\underset{\sim}{H}_a(\mu)$, $\underset{\sim}{L}(\mu)$ e $\underset{\sim}{L}_a(\mu)$.

Pode-se entretanto, através da equação (2.3.10a), obter-se equações integrais assim,

$$\underset{\sim}{H}(\mu) = \underset{\sim}{I} + \mu\,\underset{\sim}{H}(\mu)\tilde{\underset{\sim}{C}}\cdot\int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{H}}_a(\mu')\underset{\sim}{\theta}(\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu} \tag{2.3.16a}$$

$$-\,\mu\,\underset{\sim}{L}(\mu)\tilde{\underset{\sim}{B}}\int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{L}}_a(\mu')\underset{\sim}{\theta}(\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu}$$

e de maneira análoga a adjunta,

$$\underset{\sim}{H}_a(\mu) = \underset{\sim}{I} + \mu\,\underset{\sim}{H}_a(\mu)\,\underset{\sim}{C}\int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{H}}(\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu} \tag{2.3.16b}$$

$$-\,\mu\,\underset{\sim}{L}_a(\mu)\,\underset{\sim}{B}\int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{L}}(\mu')\underset{\sim}{\theta}(\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu}\ ,$$

Equações integrais similares às anteriores podem ser deduzidas para as matrizes $\underset{\sim}{L}(\mu)$ e $\underset{\sim}{L}_a(\mu)$.

E, é possível demonstrar-se que as matrizes $\underset{\sim}{H}(\mu)$, $\underset{\sim}{H}_a(\mu)$, $\underset{\sim}{L}(\mu)$ e $\underset{\sim}{L}_a(\mu)$ estão relacionadas através das seguintes equações;

$$\mu\,\underset{\sim}{H}(\mu)\,[\,\underset{\sim}{I} - \tilde{\underset{\sim}{C}}\,\tilde{\underset{\sim}{H}}_{a_0}\,] = \underset{\sim}{L}(\mu)\,[\,\underset{\sim}{\Sigma}^{-1} - \mu\,\tilde{\underset{\sim}{B}}\,\tilde{\underset{\sim}{L}}_{a_0}\,] \tag{2.3.17a}$$

$$\mu\,\underset{\sim}{H}_a(\mu)\,[\,\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C}\,\tilde{\underset{\sim}{H}}_0\,] = \underset{\sim}{L}_a(\mu)\,[\,\underset{\sim}{\Sigma}^{-1} - \mu\,\underset{\sim}{B}\,\tilde{\underset{\sim}{L}}_0\,]. \tag{2.3.17b}$$

Onde se define o momento de ordem α da matriz $\underset{\sim}{G}(\mu)$ por

$$\underset{\sim}{G}_\alpha = \int_0^1 \underset{\sim}{\theta}(\mu)\ \underset{\sim}{G}(\mu)\ \mu^\alpha\, d\mu\,, \tag{2.3.18}$$

para $\underset{\sim}{G}(\mu) = \underset{\sim}{H}(\mu)$, $\underset{\sim}{H}_a(\mu)$, $\underset{\sim}{L}(\mu)$ e $\underset{\sim}{L}_a(\mu)$.

Através da equação (2.3.8) obtém-se uma equação integral singular da matriz $\underset{\sim}{H}$,

$$\tilde{\underset{\sim}{H}}(\nu)\ \underset{\sim}{\lambda}(\nu) = \underset{\sim}{I} + \nu\, P \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{H}}(\mu)\underset{\sim}{\theta}(\mu)\underset{\sim}{Q}^*(\mu)\frac{d\mu}{\mu-\nu}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\Gamma}(\nu),\ \nu\epsilon(0,1), \tag{2.3.19a}$$

e um vínculo discreto sobre $\underset{\sim}{H}$,

$$[\ \underset{\sim}{I} + \nu_i \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{H}}(\mu)\underset{\sim}{\theta}(\mu)\ \underset{\sim}{Q}^*(\mu)\frac{d\mu}{\mu-\nu_i}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\Gamma}(\nu_i)\ ]\ \underset{\sim}{M}(\nu_i) = \underset{\sim}{0} \tag{2.3.19b}$$

Para as demais matrizes, equações análogas podem ser deduzidas.

Considerando-se a matriz $\underset{\sim}{H}$ como função da variável complexa z, demonstra-se que ela (aplica-se também para as demais matrizes) é analítica e em qualquer ponto no corte do plano complexo de -1 à 0 ao longo do eixo real, exceto para $z = -\nu_1$, onde possui um polo simples.

Baseando-se nestas matrizes, Ishiguro[9] demonstrou que a autofunção $\underset{\sim}{\Psi}(\xi,\mu)$, $\xi = \nu_i$ ou $\epsilon(0,1)$ é ortogonal no semi-intervalo $\mu\epsilon(0,1)$ ao conjunto $\underset{\sim}{\theta}(\xi,\mu)$ de tal forma que,

$$\int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\theta}}(\xi',\mu)\ \underset{\sim}{\Psi}(\xi,\mu)\ \mu d\mu = 0,\ \xi \neq \xi'\,,$$

$$\xi,\xi' = \nu_i \quad \text{ou} \quad \epsilon(0,1), \tag{2.3.20}$$

onde

$$\underset{\sim}{\theta}(\xi,\mu) = [\ \xi\ \underset{\sim}{K}(\xi,\mu)\ \underset{\sim}{\Psi}(\mu)\tilde{\underset{\sim}{D}}\ \underset{\sim}{\Omega}_a(\xi) + \delta(\xi,\mu)\ \underset{\sim}{\lambda}_a(\xi)\ ]\ \underset{\sim}{V}(\xi) \tag{2.3.21}$$

com a matriz $\underset{\sim}{\Omega}_a(\xi)$ (4 x 3) definida pela equação

$$\underset{\sim}{\Omega}_a(\xi) = \underset{\sim}{\Gamma}_a(\xi) - \xi \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\Psi}}^*(\mu)\underset{\sim}{\theta}(\mu)\underset{\sim}{Q}^*(\mu)\frac{d\mu}{\mu+\xi}\tilde{\underset{\sim}{D}}\ \underset{\sim}{\Gamma}_a(\xi) \tag{2.3.22}$$

O vetor $\underset{\sim}{V}(\xi)$ da equação (2.3.21) é definido por

$$\underset{\sim}{V}(\xi) = \begin{bmatrix} \Lambda_{a12}(\xi) \\ \Lambda_{a11}(\xi) \end{bmatrix},\ \xi = \nu_i \ \text{ou}\ \epsilon(1/\sigma,\ 1) \tag{2.3.23a}$$

e

$$\underset{\sim}{V}_1^{(1)}(\xi) = \begin{bmatrix} -N_{22}(\xi) \\ -N_{12}(\xi) \end{bmatrix}, \underset{\sim}{V}_2^{(2)}(\xi) = \begin{bmatrix} -N_{21}(\xi) \\ N_{11}(\xi) \end{bmatrix}, \xi \in (0, 1/\sigma) \tag{2.3.23b,c}$$

e as funções $N_{\alpha\beta}(\xi)$ são calculadas na referência[22].

Uma vez estabelecido o teorema das autofunções no semi-espaço, é necessário que se determine relações de normalização (integrais)[6] que permitem expressar todos os coeficientes de expansão que aparecem na equação (2.3.5) em termos de integrais da função de expansão $\underset{\sim}{I}(\mu)$.

Ishiguro, na referência[9] apresenta um resumo destas relações de normalazação para o caso de semi-intervalo e intervalo total.

Assim, os coeficientes de expansão na equação (2.3.5) podem ser obtidos como,

$$A(\nu_i) = \frac{1}{N(\nu_i)} \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\theta}}(\nu_i,\mu)\, \underset{\sim}{I}(\mu)\, \mu d\mu \tag{2.3.24a}$$

$$A_\alpha^{(1)}(\nu) = \frac{1}{N^{(1)}(\nu)} \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\theta}}_\alpha^{(1)}(\nu,\mu)\, \underset{\sim}{I}(\mu)\mu d\mu\,, \quad \nu \in (0, 1/\sigma),\ \alpha = 1, 2, \tag{2.3.24b}$$

e

$$A^{(2)}(\nu) = \frac{1}{N^{(2)}(\nu)} \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\theta}}^{(2)}(\nu,\mu)\, \underset{\sim}{I}(\mu)\mu d\mu\,, \quad \nu \in (1/\sigma, 1) \tag{2.3.24c}$$

As integrais nestas equações podem ser obtidas, quando $\underset{\sim}{I}(\mu)$ é uma função simples, em termos das matrizes H e de outras funções conhecidas. Por exemplo, se $\underset{\sim}{I}(\mu) = \underset{\sim}{\Phi}(-\xi, \mu)$, tem-se

$$\int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\theta}}(\xi',\mu)\, \underset{\sim}{\Phi}(-\xi,\mu)\, \mu d\mu = \frac{\xi\xi'}{\xi+\xi'}\, \tilde{\underset{\sim}{V}}(\xi')\tilde{\underset{\sim}{\Omega}}_a(\xi')\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{\Omega}(\xi)\underset{\sim}{U}(\xi)\,,$$

$$\xi, \xi' = \nu_i \quad \text{ou} \quad \in (0,1)\,, \tag{2.3.25}$$

onde o vetor $\underset{\sim}{U}(\xi)$ é definido na referência[22] e a matriz (4 x 2), $\underset{\sim}{\Omega}(\xi)$ por,

$$\underset{\sim}{\Omega}(\xi) = \Gamma(-\xi) - \xi \int_0^1 \underset{\sim}{\Psi}^*(\mu)\underset{\sim}{\theta}(\mu)\, \underset{\sim}{Q}^*(\mu)\, \frac{d\mu}{\mu+\xi}\, \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\Gamma}(-\xi) \tag{2.3.26}$$

(Comparando-se com a equação (2.3.22), a definição da matriz $\underset{\sim}{\Omega}_a(\xi)$ é uma exceção na regra que se estabeleceu para o índice 'a').

2.4 – Aplicações no Semi-Espaço, Não Multiplicador

Selecionaram-se três problemas típicos de semi-espaço, Milne, Fonte Constante e Albedo – para por em prática o formalismo analítico estabelecido. A partir deste capítulo somente será considerado o caso de $\kappa = 1$.

2.4.1 – Problema de Milne

O problema de Milne consiste basicamente em se conhecer a distribuição de nêutrons em qualquer ponto de um semi-espaço, contendo no infinito uma fonte responsável pelo fluxo de nêutrons, e que faz fronteira (convenciona-se $x = 0$) com o vácuo isento de fontes.

A solução deste problema, através da equação de transporte de dois grupos, deve satisfazer as seguintes condições de contorno;

$$\lim_{x \to \infty} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu)\, e^{-x/\nu_1} < \infty , \qquad (2.4.1.1a)$$

e

$$\underset{\sim}{\Psi}(0,\mu) = \underset{\sim}{0}\,, \quad \mu \in (0,1) \qquad (2.4.1.1b)$$

Seja pois a solução do problema de Milne, $\underset{\sim}{\Psi}_M(x,\mu)$;

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\Psi}_M(x,\mu) &= A(-\nu_1)\underset{\sim}{\Phi}(-\nu_1,\mu)\, e^{x/\nu_1} + A(\nu_1)\underset{\sim}{\Phi}(\nu_1,\mu)\, e^{-x/\nu_1} \\ &+ \int_0^{1/\sigma} [\, A_1^{(1)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_2^{(1)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}_2^{(1)}(\nu,\mu)\,]\, e^{-x/\nu} d\nu \\ &+ \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}^{(2)}(\nu,\mu)\, e^{-x/\nu} d\nu, \quad x > 0, \ \mu \in (0,1) \end{aligned} \qquad (2.4.1.2)$$

A solução (2.4.1.2) satisfaz a equação (2.2.4) e a condição de contorno dada pela (2.4.1.1a).

Impondo-se a normalização de $A(-\nu_1) = 1$, e aplicando a condição de contorno (2.4.1.1a) obtém-se

$$\begin{aligned}- \underset{\sim}{\Phi}(-\nu_1,\mu) &= A(\nu_1)\, \underset{\sim}{\Phi}(\nu_1,\mu) + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}^{(2)}(\nu,\mu)\, d\nu \\ &+ \int_0^{1/\sigma} [\, A_1^{(1)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_2^{(1)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}_2^{(1)}(\nu,\mu)\,]\, d\nu , \\ & \mu \in (0,1) \end{aligned} \qquad (2.4.1.3)$$

Multiplicando-se a equação (2.4.1.3) por $\mu\, \underset{\sim}{\tilde{Q}}(\nu_1,\mu)$ e integrando sobre μ no intervalo de 0 a 1, obtém-se através do teorema da ortogonalidade no semi-intervalo (ver equação (2.3.25)). O coeficiente de expansão discreto, utilizando-se as equações (2.3.24a,b,c),

$$A(\nu_1) = -\frac{\nu_1}{2}\frac{1}{N(\nu_1)}\,\tilde{\underset{\sim}{V}}(\nu_1)\tilde{\underset{\sim}{\Omega}}_a(\nu_1)\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\Omega}(\nu_1)U(\nu_1) \tag{2.4.1.4}$$

e pelo mesmo procedimento obtém-se,

$$A_\alpha^{(1)}(\nu) = -\frac{\nu\nu_1}{\nu_1+\nu}\cdot\frac{1}{N^{(1)}(\nu)}\,\tilde{\underset{\sim}{V}}_\alpha^{(1)}(\nu)\tilde{\underset{\sim}{\Omega}}_a(\nu)\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\Omega}(\nu_1)\,\underset{\sim}{U}(\nu_1),$$

$$\nu\,\epsilon(0,1/\sigma),\quad \alpha=1,2, \tag{2.4.1.5}$$

$$A^{(2)}(\nu) = -\frac{\nu\nu_1}{\nu_1+\nu}\cdot\frac{1}{N^{(2)}(\nu)}\,\tilde{\underset{\sim}{V}}^{(2)}(\nu)\,\tilde{\underset{\sim}{\Omega}}_a(\nu)\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\Omega}(\nu_1)\,\underset{\sim}{U}(\nu_1),$$

$$\nu\,\epsilon(1/\sigma,1), \tag{2.4.1.6}$$

onde

$$\underset{\sim}{U}(\nu_1) = \begin{bmatrix} -\Lambda_{12}(\nu_1) \\ \Lambda_{11}(\nu_1)\end{bmatrix}, \tag{2.4.1.7}$$

e as funções $N(\nu_1)$, $N^{(1)}(\nu)$ e $N^{(2)}$ são as integrais de normalização estabelecidas na referência[22].

Determinados os coeficientes de expansão, a distribuição do fluxo angular em cada grupo é facilmente obtida através da equação (2.4.1.2).

Define-se a distância de extrapolação $- z_o -$ à distância da interface na qual a componente assintótica do fluxo escalar $(\underset{\sim}{\phi}(x) = \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu)d\mu)$ se anula.

A distância de extrapolação é obtida através da equação (2.4.1.2) quando se abandona a contribuição contínua.

Assim,

$$z_o = -\frac{1}{2}\nu_1\,\ell n\,[\,A(\nu_1)\,], \tag{2.4.1.8}$$

onde $A(\nu_1)$ é o coeficiente discreto definido pela equação (2.4.1.4).

2.4.2 – Problema da Fonte Constante

O problema da Fonte Constante é representado por um sistema vácuo-meio, que contém fontes isotrópicas de intensidade constantes distribuídas através do meio.

Considera-se a seguinte equação de dois grupos;

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) + \underset{\sim}{\Sigma}\, \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu) = \underset{\sim}{C} \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu')d\mu' + \mu \underset{\sim}{B} \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\Psi}(x,\mu')\mu' d\mu' + \underset{\sim}{S}, \tag{2.4.2.1}$$

onde $\underset{\sim}{S}$ é um vetor constante conhecido.

A solução que se procura obter para o problema da Fonte Constante deve satisfazer a equação (2.4.2.1) e a seguinte condição de contorno,

$$\underset{\sim}{\Psi}_c\,(0,\mu) = \underset{\sim}{0}, \qquad \mu\ \epsilon (0,1) \tag{2.4.2.2}$$

Seja pois a solução que satisfaz (2.4.2.1),

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\Psi}_c\,(x,\mu) = {} & A(\nu_1)\, \underset{\sim}{\Phi}\,(\nu_1,\mu) e^{-x/\nu_1} + \int_{1/\sigma}^{1} A^{(2)}(\nu)\, \underset{\sim}{\Phi}^{(2)}(\nu,\mu) e^{-x/\nu} d\nu \\ & + \int_0^{1/\sigma} [\, A_1^{(1)}(\nu) \underset{\sim}{\Phi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_2^{(1)}(\nu) \underset{\sim}{\Phi}_2^{(1)}(\nu,\mu) \,]\, e^{-x/\nu} d\nu \\ & + \underset{\sim}{\Psi}_{part}(x,\mu), \quad \kappa = 1, \end{aligned} \tag{2.4.2.3}$$

onde $\quad \underset{\sim}{\Psi}_{part}(x,\mu) = [\, \underset{\sim}{\Sigma} - 2\underset{\sim}{C}\,]^{-1} . \underset{\sim}{S},$ $\hfill (2.4.2.4)$

é a solução particular exigida pela equação (2.4.2.1).

Aplicando-se a condição de contorno (2.4.2.2) na equação (2.4.2.3) obtém-se,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\Psi}_{part}(0,\mu) = {} & A(\nu_1)\, \underset{\sim}{\Phi}\,(\nu_1,\mu) + \int_{1/\sigma}^{1} A^{(2)}(\nu) \underset{\sim}{\Phi}^{(2)}(\nu,\mu)\, d\nu \\ & + \int_0^{1/\sigma} [\, A_1^{(1)}(\nu) \underset{\sim}{\Phi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_2^{(1)}(\nu) \underset{\sim}{\Phi}_2^{(1)}(\nu,\mu) \,]\, d\nu, \end{aligned} \tag{2.4.2.5}$$

Fazendo $\underset{\sim}{I}(\mu) = -\underset{\sim}{\Psi}_{part}(0,\mu)$ na equação (2.3.27a) obtém-se,

$$\begin{aligned} A(\nu_1) = {} & -\frac{1}{N(\nu_1)}\, \tilde{\underset{\sim}{U}}_a(\nu_1)\, \tilde{\underset{\sim}{\Omega}}_a(\nu_1)\, \underset{\sim}{D} \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{\Psi}}^*(\mu) \underset{\sim}{\theta}(\mu) \frac{\mu}{\nu_1 - \mu}\, d\mu \\ & . \underset{\sim}{\Sigma}\, \underset{\sim}{\Psi}_{part}(0,\mu) \end{aligned} \tag{2.4.2.6}$$

que reduz a,

$$A(\nu_1) = -\frac{1}{N(\nu_1)}\, \tilde{\underset{\sim}{U}}_a(\nu_1)\, \tilde{\underset{\sim}{\Omega}}_a(\nu_1) [\, \underset{\sim}{0} \;\; \underset{\sim}{I} \,]^T [\, \underset{\sim}{\Sigma} - 2\underset{\sim}{C} \,]^{-1} \underset{\sim}{S}, \tag{2.4.2.7}$$

após manipulações algébricas e uso da equação (2.3.15b).

De maneira análoga, obtém-se os coeficientes para $\nu \epsilon (0,1)$,

$$A(\nu) = -\frac{1}{N(\nu)}\, \tilde{\underset{\sim}{V}}(\nu)\, \tilde{\underset{\sim}{\Omega}}_a(\nu) [\, \underset{\sim}{0} \;\; \underset{\sim}{I} \,]^T [\, \underset{\sim}{\Sigma} - 2\underset{\sim}{C} \,]^{-1} \cdot \underset{\sim}{S}, \tag{2.4.2.8}$$

onde se emprega o índice T para representar a operação de transposição matricial.

2.4.3 – Problema do Albedo

O problema do Albedo é representado por um semi-espaço adjacente ao vácuo com uma fronteira plana em $x = 0$, possuindo no interior do vácuo uma fonte uniforme de nêutrons que atravessam a superfície em $x = 0$.

A solução proposta a este problema que satisfaça a equação (2.2.4) e se anule quando $x \to \infty$, deve estar sujeita à seguinte condição de contorno,

$$\Psi(0,\mu) = F, \;\; \mu \epsilon (0,1), \tag{2.4.3.1}$$

onde $\underset{\sim}{F}$ é um vetor constante conhecido.

A solução $\underset{\sim}{\Psi}_a(x,\mu)$ pode então ser escrita como,

$$\underset{\sim}{\Psi}_a(x,\mu) = A(\nu_1)\underset{\sim}{\Phi}(\nu_1,\mu)e^{-x/\nu_1} + \int_0^{1/\sigma} [\, A_1^{(1)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_2^{(1)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}_2^{(1)}(\nu,\mu) \,] e^{-x/\nu} d\nu$$

$$+ \int_{1/\sigma}^{1} A^{(2)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}^{(2)}(\nu,\mu)e^{-x/\nu} d\nu, \quad x \geqslant 0, \;\; \mu \epsilon (-1,1) \tag{2.4.3.2}$$

Fazendo-se uso da condição de contorno (2.4.3.1) tem-se;

$$\underset{\sim}{F} = A(\nu_1)\underset{\sim}{\Phi}(\nu_1,\mu) + \int_0^{1/\sigma} [\, A_1^{(1)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_2^{(1)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}_2^{(1)}(\nu,\mu) \,] d\nu$$

$$+ \int_{1/\sigma}^{1} A^{(2)}(\nu)\underset{\sim}{\Phi}^{(2)}(\nu,\mu) d\nu, \quad \mu \epsilon (0,1) \tag{2.4.3.3}$$

Multiplicando-se a equação (2.4.3.3) por $\mu\tilde{\underset{\sim}{\Omega}}(\xi,\mu)$ e em seguida integrando em μ no intervalo de 0 a 1, obtém-se os coeficientes de expansão de maneira análoga ao problema anterior.

$$A(\nu_1) = \frac{1}{N(\nu_1)}\, \tilde{\underset{\sim}{U}}_a(\nu_1)\, \tilde{\underset{\sim}{\Omega}}_a(\nu_1) [\, \underset{\sim}{0} \;\; \underset{\sim}{I} \,]^T \underset{\sim}{F}, \tag{2.4.3.4a}$$

$$A_\alpha^{(1)}(\nu) = \frac{1}{N^{(1)}(\nu)} \, \tilde{\underline{V}}_\alpha^{(1)}(\nu) \, \tilde{\underline{\Omega}}_a(\nu) \, [\, \underline{0} \;\; \underline{I} \,]^T \, \underline{F}, \qquad (2.4.3.4b)$$

e

$$A^{(2)}(\nu) = \frac{1}{N^{(2)}(\nu)} \, \tilde{\underline{V}}^{(2)}(\nu) \tilde{\underline{\Omega}}_a(\nu) \, [\, \underline{0} \;\; \underline{I} \,]^T \, \underline{F} . \qquad (2.4.3.4c)$$

Define-se o Albedo β para o problema do Albedo como sendo a razão entre a corrente de nêutrons que retornam do meio através da fronteira e a corrente que penetra no meio,

$$\underline{\beta} = \int_0^1 \underline{\Psi}_a(0,-\mu)\, \mu d\mu \, / \, [\, \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \,]^T \int_0^1 \underline{\Psi}(0,\mu)\, \mu d\mu \qquad (2.4.3.5)$$

3 – CÁLCULO NUMÉRICO DOS CASOS ESTUDADOS

3.1 – Introdução

O propósito deste capítulo é mostrar o tratamento numérico empregado na resolução dos problemas propostos neste trabalho.

Serão apresentadas as principais etapas do desenvolvimento numérico e as simplificações efetuadas, quando necessárias, para os termos que envolvem integrais quando da avaliação da distribuição do fluxo angular, fluxo total (escalar) e da corrente.

Para todos os casos estudados utilizou-se do computador IBM 370/155 do Instituto de Energia Atômica do Estado de São Paulo. Os programas digitais utilizados são escritos em linguagem Fortran IV e em dupla precisão.

As etapas efetuadas podem ser seguidas através do seguinte fluxograma:

Cálculo dos autovalores discretos

↓

Obtenção das funções matriciais $\underline{H}$, $\underline{L}$ e adjuntas

↓

Obtenção dos coeficientes de expansão para cada caso

↓

Soluções Albedo, Fonte Constante e Milne

3.2 – Cálculo dos Autovalores Discretos

Através do método desenvolvido por Burniston e Siewert[2], Ishiguro[9] estabeleceu, com todo o necessário rigor matemático uma equação que permite obter o par de autovalores discretos.

Seja a equação de obtenção destes parâmetros,

$$\nu_1^2 = 1 + 2\exp\left[-\frac{2}{\pi}\int_0^1 \arg \Lambda^+(\mu)\,\frac{\mu}{\mu^2+1}\,d\mu\right]\Lambda(i)\,\Lambda^{-1}(\infty),\ \kappa = 1\,, \tag{3.2.1}$$

onde $\Lambda(z) = \det \underset{\sim}{\Lambda}(z)$ explicitado pela equação (A.7),

$$\underset{\sim}{\Lambda}(\infty) = \lim_{z\to\infty} \underset{\sim}{\Lambda}(z) = \underset{\sim}{I} - 2\,\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\left[\underset{\sim}{C} + \frac{1}{3}\,\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\,\underset{\sim}{A}\right] \tag{3.2.2}$$

Na avaliação numérica dos autovalores empregou-se o método de Quadraturas de Gauss[7,8] para se calcular numericamente a integral da equação que os define.

Deste modo pode-se expressar a integral como,

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \omega_i\, f(x_i)\,, \tag{3.2.3}$$

onde os parâmetros x_i e ω_i (nós e pesos respectivamente) para N pontos de quadraturas estão tabelados em manuais de funções matemáticas.

O intervalo de integração (0,1) da função $\arg \Lambda^+(\mu)$ foi subdividido em sete intervalos, |0.0, 0.6|, |0.6, $1/\sigma - 0.01$|, |$1/\sigma - 0.01$, $1/\sigma$|, |$1/\sigma$, 0.85|, |0.85, 0.90|, |0.90, 0.995|, e |0.995, 1| pois apesar da função $\arg \Lambda^+(\mu)$ ser contínua no intervalo de $\mu \epsilon (0,1)$[6] ela apresenta um alto gradiente para pontos próximos de $\mu = 1/\sigma$ e $\mu = 1$.

Para cada intervalo de integração utilizaram-se vinte pontos de quadratura.

Os autovalores são então calculados através de um conjunto de equações algébricas que compõe a equação (3.2.1).

Obtidos os autovalores, vários testes são efetuados para verificar sua precisão.

Finalmente o resultado obtido é refinado iterativamente baseando-se no método de Newton-Raphson de tal modo que,

$$\nu_{i_{(\alpha+1)}} = \nu_{i_\alpha} - \frac{\Lambda(\nu_{i_\alpha})}{\Lambda'(\nu_{i_\alpha})}\,, \tag{3.2.4}$$

onde $\Lambda'(\nu_{i_\alpha})$ é a derivada da função de dispersão e ν_{i_α} é o valor que ν_i assume após a α-ésima iteração.

A precisão que se obtém após três iterações é de doze algarismos significativos

3.3 – Cálculo das Funções Matriciais

Baseando-se no trabalho de Kriese e Siewert[13], Ishiguro[9] estabeleceu a partir das equações resultantes para as funções matriciais $\mathbf{H}$ (capítulo 2.3), um conjunto de equações integrais acopladas, de rápida convergência, destinadas ao cálculo numérico destas funções.

O desenvolvimento, para o espalhamento anisotrópico, considera os casos de $\kappa = 1$ e $\kappa = 2$, embora para o espalhamento anisotrópico não esteja ainda determinado o número máximo de pares de autovalores discretos (raízes da equação de dispersão).

Sejam as equações obtidas;

$$\mathbf{H}_e^{-1}(\mu) = \mathbf{I} - \mu\mathbf{C}\left[\int_0^1 \tilde{\mathbf{H}}(\mu')\boldsymbol{\theta}(\mu')\mathbf{K}(\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu} + \mathbf{P}(\mu)\right]\mathbf{R}(\mu)$$

$$+ \mu^2\,\mathbf{S}(\mu)\left[\int_0^1 \tilde{\mathbf{L}}(\mu')\boldsymbol{\theta}(\mu')\mathbf{K}(\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu} + \mathbf{Q}(\mu)\right]\mathbf{R}(\mu)\,, \tag{3.3.1}$$

e

$$\mathbf{H}^{-1}(\mu) = \mathbf{I} - \mu\check{\mathbf{C}}\left[\int_0^1 \tilde{\mathbf{H}}_e(\mu')\boldsymbol{\theta}(\mu')\mathbf{K}_e(\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu} + \mathbf{P}_e(\mu)\right]\mathbf{R}_e(\mu)$$

$$+ \mu^2\,\mathbf{S}_e(\mu)\left[\int_0^1 \tilde{\mathbf{L}}_e(\mu')\boldsymbol{\theta}(\mu')\mathbf{K}_e(\mu')\,\frac{d\mu'}{\mu'+\mu} + \mathbf{Q}_e(\mu)\right]\mathbf{R}_e(\mu) \tag{3.3.2}$$

Para as equações acima foram definidas as seguintes identidades,

$$\mathbf{P}(\mu) = \frac{\nu_1 - 1}{\nu_1 + \mu}\left[\mathbf{I} + \nu_1^2\,\tilde{\mathbf{H}}_0\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{A}\right]\left[\mathbf{U}(\nu_1)\ \ \mathbf{0}\right]$$

$$+ (\kappa - 1)\,\frac{\nu_2 - 1}{\nu_2 + \mu}\left[\mathbf{I} + \nu_2^2\,\tilde{\mathbf{H}}_0\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{A}\right]\left[\mathbf{0}\ \ \mathbf{U}(\nu_2)\right], \tag{3.3.3}$$

$$\mathbf{Q}(\mu) = \frac{\nu_1 - 1}{\nu_1 + \mu}\left[\nu_1\left[\boldsymbol{\Sigma} - 2\mathbf{C}\right] + \nu_1^2\,\tilde{\mathbf{L}}_0\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{A}\right]\left[\mathbf{U}(\nu_1)\ \ \mathbf{0}\right]$$

$$+ (\kappa - 1)\,\frac{\nu_2 - 1}{\nu_2 + \mu}\left[\nu_2\left[\boldsymbol{\Sigma} - 2\mathbf{C}\right] + \nu_2^2\,\tilde{\mathbf{L}}_0\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{A}\right]\left[\mathbf{0}\ \ \mathbf{U}(\nu_2)\right], \tag{3.3.4}$$

$$\mathbf{R}(\mu) = \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\mu)\,\mathbf{V}^{-1}\,, \tag{3.3.5}$$

$$\mathbf{K}(\mu) = \mathbf{V}\,\boldsymbol{\Delta}(-\mu)\,, \tag{3.3.6}$$

onde

$$\underset{\sim}{\Delta}(\mu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\nu_1(1+\mu)}{\nu_1 + \mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \kappa = 1 \qquad (3.3.7a)$$

e

$$\underset{\sim}{V}(\mu) = \left[[\underset{\sim}{C} + \nu_1^2 \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{A}] \right] \underset{\sim}{U}(\nu_1) \left[{0 \atop 1} \right] \Big], \ \kappa = 1. \qquad (3.3.7b)$$

e

$$\underset{\sim}{S}(\mu) = [\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C} \tilde{\underset{\sim}{H}}_o] [\underset{\sim}{\Sigma}^{-1} - \mu \underset{\sim}{B} \tilde{\underset{\sim}{L}}_o]^{-1} \underset{\sim}{B} \qquad (3.3.8)$$

As matrizes $\underset{\sim}{H}$, $\underset{\sim}{L}$ e adjuntas são calculadas iterativamente através do conjunto de equações acima definidos e das equações (2.3.13a,b) para cada ponto μ_i do intervalo (0,1).

Obtém-se após cada iteração (α), o valor máximo δ, das diferenças sucessivas entre os valores dos elementos de cada matriz.

Ou seja;

$$\delta = \text{máximo } \{ \delta_i, i = 1, 2, \ldots, 2N \}, \qquad (3.3.9a)$$

onde

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{2} \sum_{\kappa=1}^{2} \left| G_{jk_{(\alpha+1)}}(\mu_i) - \underset{\sim}{G}_{jk_\alpha}(\mu_i) \right| \qquad (3.3.9b)$$

com G_{jk} representando os elementos de cada matriz.

A iteração termina quando δ se torna menor do que um valor ϵ desejado.

Para verificar a precisão dos resultados obtidos, faz-se uso de várias identidades analíticas, às quais as funções matriciais obedecem.

$$\text{a)} \ \left| \det \underset{\sim}{H}^{-1}(-\nu_1) \right| = 0 \qquad (3.3.10)$$

Para esta verificação criou-se a sub-rotina S H I, Apêndice B.

b) Vínculos discretos das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{L}$

1) $\underset{\sim}{H}(\mu)$

$$\nu_1 \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{H}}(\mu')\underset{\sim}{\theta}(\mu') \frac{d\mu'}{\nu_1 + \mu'} [\, \underset{\sim}{C} + \nu_1^2 \, \underset{\sim}{\Sigma} \, \underset{\sim}{A} \,] \underset{\sim}{U}(\nu_1) = [\, \underset{\sim}{I} + \nu_1^2 \, \tilde{\underset{\sim}{H}}_0 \, \underset{\sim}{\Sigma} \, \underset{\sim}{A} \,] \underset{\sim}{U}(\nu_1) \tag{3.3.11a}$$

2) $\underset{\sim}{L}(\mu)$

$$\nu_1 \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{L}}(\mu')\underset{\sim}{\theta}(\mu') \frac{d\mu'}{\nu_1 - \mu'} [\, \underset{\sim}{C} + \nu_1^2 \, \underset{\sim}{\Sigma} \, \underset{\sim}{A} \,] \underset{\sim}{U}(\nu_1) = [\, \nu_1 \, | \underset{\sim}{\Sigma} - 2\underset{\sim}{C} \, | + \nu_1^2 \, \tilde{\underset{\sim}{L}}_0 \, \underset{\sim}{\Sigma} \, \underset{\sim}{A} \,] \underset{\sim}{U}(\nu_1) \tag{3.3.11b}$$

Neste teste, os valores obtidos das funções matriciais e de seus momentos são verificados através da diferença entre os membros das equações (3.3.11a,b).

c) Através das equações (2.3.15a,b) obtém-se a seguinte relação entre os momentos das funções matriciais[9],

$$[\, \underset{\sim}{\Psi}_o - \underset{\sim}{I}_4 \,] \tilde{\underset{\sim}{D}} [\, \tilde{\underset{\sim}{\Phi}}_o - \underset{\sim}{I}_4 \,] = \tilde{\underset{\sim}{D}} [\, \underset{\sim}{I}_4 - 2\underset{\sim}{Q}_o \tilde{\underset{\sim}{D}} \,], \tag{3.3.12}$$

onde

$$\underset{\sim}{\Psi}_o = \tilde{\underset{\sim}{D}} \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{Q}}^*(\mu)\underset{\sim}{\theta}(\mu)\underset{\sim}{\Psi}^*(\mu)d\mu \tag{3.3.13a}$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_o = \underset{\sim}{D} \int_0^1 \tilde{\underset{\sim}{Q}}^*(-\mu)\underset{\sim}{\theta}(\mu)\underset{\sim}{\Phi}^*(\mu)d\mu\,, \tag{3.3.13b}$$

e

$$Q_o = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \frac{1}{3}\underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.3.13c}$$

sendo $\underset{\sim}{I}_4$ uma matriz unitária (4 x 4).

O esquema empregado nesta tese consiste em verificar se a diferença entre cada elemento de cada membro da equação (3.3.12) se situa ao redor de ϵ vezes menor do que o menor dos dois elementos ou seja, escrevendo a equação (3.3.12) simbolicamente como $\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{D}$ tem-se,

$$|E_{ij} - D_{ij}| < \epsilon_{min} \{ |E_{ij}|, |D_{ij}| \}, i, j = 1, 2 \tag{3.3.14}$$

d) Finalmente faz-se uma última verificação dos valores obtidos, utilizando-se a equação (2.3.19a). A verificação é feita para vários pontos, através da regularização da integral singular e do cálculo analítico da integral de valor principal.

Para tal, elaborou-se a sub-rotina SINGH (Apêndice B) que também avalia o momento de ordem até dez para cada lado da equação (2.3.19a), simbolicamente tem-se,

$$\int_0^1 E\,\nu^{\alpha}\,d\nu = \int_0^1 \underset{\sim}{D}\,\nu^{\alpha}\,d\nu,\ \alpha = 0, 1, \ldots, 10\,; \qquad (3.3.15)$$

esta verificação é utilizada para confirmar a equivalência entre os lados esquerdo e direito da equação (2.3.19a).

3.4 – Solução Numérica dos Casos Estudados

Uma vez obtidas as funções $\underset{\sim}{H}(\mu)$, $\underset{\sim}{L}(\mu)$ e adjuntas, os coeficientes de expansão são facilmente calculados através das equações que os definem, uma vez que estas são expressas em termos destas funções (capítulo 2.4); não sendo necessário empregar nenhum artifício numérico na sua avaliação uma vez que não apresentam termos singulares.

Para verificar a precisão dos resultados obtidos construiu-se a sub-rotina CHECK-1 (Apêndice B) que efetua as mesmas verificações empregadas para a equação (2.3.19a) isto é, comparação dos momentos entre os membros das equações (2.4.1.3), (2.4.2.5) e (2.4.3.3).

Dois tipos de integrais aparecem na avaliação do fluxo angular: integrais ordinárias e de valor principal, definidas em dois intervalos, $0 < \mu < 1/\sigma$ e $1/\sigma < \mu < 1$.

As integrais ordinárias são calculadas numericamente empregando-se o método da Quadratura de Gauss.

As integrais de valor principal do tipo,

$P \int_a^b \dfrac{f(x)}{x - x_0}\,dx$, $x_0 \epsilon (a,b)$ têm a singularidade removida analiticamente através do seguinte procedimento[6].

$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0}\,dx = \int_a^b \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,dx + f(x_0)\,P \int_a^b \frac{1}{x - x_0}\,dx,\ a < x_0 < b$$

A primeira integral da equação (3.4.1) não envolve singularidades enquanto que a segunda integral pode ser avaliada analiticamente resultando,

$$P \int_a^b \frac{1}{x - x_0}\,dx = \ln \frac{b - x_0}{x_0 - a}\,, \qquad (3.4.2)$$

removendo assim a dificuldade de avaliá-la numericamente.

A fase computacional deste cálculo é feita através do procedimento denominado regularização.

Seja a equação que descreve o fluxo angular, equações (2.4.1.2), (2.4.2.3) e (2.4.3.2), as autofunções $\underline{\Phi}$ definidas pelas equações (2.3.22), (2.3.23) e (2.3.24).

Ao se calcular numericamente os fluxos angulares (grupo 1 e 2) a parte discreta representada pelas equações (2.3.24) não necessita de artifícios numéricos, uma vez que não apresenta singularidades.

Porém, ao se trabalhar na região contínua (0,1) surgem termos integrais do tipo singular e não singular relacionados com a região de integração (equações (2.3.22) e (2.3.23)).

A fase regularização do programa digital, elaborado para a avaliação do fluxo angular, calcula distintamente estes tipos de integrais. Ela consiste basicamente no cálculo numérico do procedimento analítico de remoção da singularidade já exposto, considerando o grupo de energia e a região de integração.

Analisando-se em separado cada fluxo angular tem-se:

Seja a região (1) definida para $\nu\epsilon(0,1/\sigma)$, o fluxo angular do grupo 1, que envolve o termo $P\int_0^{1/\sigma} \frac{d\nu}{\sigma\nu-\mu}$, é singular para todos os $\mu\epsilon(0,1/\sigma)$.

O fluxo angular do grupo 2 que envolve o termo $P\int_0^{1/\sigma} \frac{d\nu}{\nu-\mu}$ é singular para $\nu\epsilon(0,1/\sigma)$, e regular para $\mu\epsilon(1/\sigma,1)$.

Para a região (2) definida para $\nu\epsilon(1/\sigma,1)$, o fluxo angular do grupo 1 que envolve o termo $\int_{1/\sigma}^{1} \frac{d\nu}{\sigma\nu-\mu}$ é regular para todo μ.

O fluxo angular do grupo 2, que envolve o termo $P\int_{1/\sigma} \frac{d\nu}{\nu-\mu}$ é singular para $\mu\epsilon(1/\sigma,1)$ e regular para $\mu\epsilon(0,1/\sigma)$.

Desta forma a fase regularização avalia a componente singular do fluxo enquanto que os termos não singular é calculado através do método de Quadratura de Gauss.

Estes procedimentos fazem parte da sub-rotina FLUXM, que calcula fluxos angulares.

O cálculo dos demais parâmetros, correntes, fluxos totais, distâncias extrapolada e Albedo, não necessitam de artifícios numéricos, uma vez que se definem[22] os vetores de normalização.

$$\underline{U}_{\cdot}(\xi) = \int_{-1}^{1} \underline{\Phi}(\xi,\mu)\, d\mu \qquad (3.4.3)$$

como

$$\underline{U}_1^{(1)}(\nu) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{U}_2^{(1)}(\nu) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \nu\epsilon(0,\ 1/\sigma)\ ,$$

e

$$\underset{\sim}{U}^{(2)}(\nu) = \begin{bmatrix} -\Lambda_{12}(\nu) \\ \\ \Lambda_{11}(\nu) \end{bmatrix}, \ \nu\epsilon(1/\sigma,1), \ \underset{\sim}{U}(\nu_1) = \begin{bmatrix} -\Lambda_{12}(\nu_1) \\ \\ \Lambda_{11}(\nu_1) \end{bmatrix}, \ \nu_1 \notin (0,1) \qquad (3.4.4a,b,c,d)$$

Obtendo-se,

$$\int^{1}_{1} \mu^{\alpha} \underset{\sim}{\Phi}(\xi,\mu)\, d\mu = \xi\,[\, \underset{\sim}{\Sigma} - 2\,\underset{\sim}{C}\,]\, \underset{\sim}{U}(\xi), \qquad (3.4.5)$$

4 – RESULTADOS NUMÉRICOS E COMPARAÇÕES

4.1 – Introdução

O objetivo desta fase é o de apresentar a precisão com que foram obtidos os resultados.

Paralelamente são discutidos comparativamente os efeitos de espalhamento isotrópico e linearmente anisotrópico.

4.2 – Parâmetros Básicos

Para os casos estudados neste trabalho, considera-se o sistema vácuo-água leve pura. As energias dos nêutrons situam-se nos seguintes intervalos,

Grupo 1: 0. eV < E < 0.0253 eV

e

Grupo 2: 0.0253 eV < E < 0.532 eV.

Utiliza-se das secções de choque macroscópicas de espalhamento isotrópicas definidas por Metcalf e Zweifel[17] para se caracterizar as matrizes $\underset{\sim}{\Sigma}$ e $\underset{\sim}{C}$ e a seguinte relação,

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C} \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, 0 \leq p_i <, \qquad (4.2.1)$$

para caracterizar a parte anisotrópica, considerando-se várias combinações de p_1 e p_2 dentro do intervalo $0 \leq p_i \leq 1$.

Um programa digital é então utilizado para determinar os autovalores discretos da equação de dispersão. Para os dados da Tabela IV.2.1 são obtidos duas raízes reais. Os autovalores são também calculados através do método de expansão em esféricas harmônicas; considerando-se somente a expansão P_n 1.

A Tabela IV.2.2 apresenta os resultados obtidos através dos dois métodos.

Tabela IV.2.1

Secções de Choque de Espalhamento Isotrópico

σ_1	4.8822	σ_2	3.2343
σ_{11}	3.8180	σ_{12}	0.3524
σ_{21}	1.0326	σ_{22}	2.8669

Tabela IV.2.2

Autovalores da Equação de Transporte de Dois Grupos

p_1	p_2	Exato		P – 1	
		Discreto	Contínuo	Discreto	Contínuo
0.0	0.0	7.190978	$0<\nu<1$	7.174198	0.743007
0.0	0.3	7.494821	$0<\nu<1$	7.477082	0.746774
0.0	0.5	7.724217	$0<\nu<1$	7.705750	0.749314
0.0	0.7	7.979698	$0<\nu<1$	7.960419	0.751876
0.1	0.3	7.519677	$0<\nu<1$	7.501982	0.754223
0.1	0.5	7.749547	$0<\nu<1$	7.731127	0.756841
0.3	0.5	7.804291	$0<\nu<1$	7.785961	0.775416
0.3	0.7	8.061606	$0<\nu<1$	8.042473	0.775416
0.5	0.7	8.123994	$0<\nu<1$	8.104954	0.792390

Os autovalores para $\nu > 1$ são solução da equação de transporte de um grupo[6]; isto também é verdadeiro para a teoria de transporte de dois grupos. Observa-se na Tabela IV.2.2 que a inclusão do termo linearmente anisotrópico na função de transferência faz com que haja um aumento sensível nos autovalores, crescendo à medida que se incorporam altos graus de anisotropia. Este comportamento é traduzido devido à maior difusão dos nêutrons, os resultados obtidos pelo método aproximativo estão bem próximos dos do exato.

Estabelecidos os autovalores, as matrizes $\underset{\sim}{H}$, $\underset{\sim}{L}$ e adjuntas são calculadas através de uma sub-rotina (Apêndice B) iterativamente.

A Tabela IV.2.3 apresenta os resultados obtidos para a matriz $\underset{\sim}{H}(\mu)$, $\underset{\sim}{H}_a(\mu)$ e as $\underset{\sim}{H}_0$, $\underset{\sim}{H}_{a0}$, $\underset{\sim}{L}_0$ e $\underset{\sim}{L}_{a0}$ quando se considera os graus de anisotropia $p_1 = 0.1$ e $p_2 = 0.3$.

As Tabelas seguintes (IV.2.4; IV.2.5; IV.2.6 e IV.2.7) mostram os resultados obtidos nas várias verificações efetuadas com os valores obtidos das funções matriciais.

Observa-se que com o aumento de pontos de quadratura, aumenta a precisão dos resultados. A precisão que se obtém nestas verificações é de pelo menos doze algarismos significativos após treze iterações.

Tabela IV.2.3

Matrizes Fundamentais, p_1 = 0.1, p_2 = 0.3

μ	$H_{11}(\mu)$	$H_{12}(\mu)$	$H_{21}(\mu)$	$H_{22}(\mu)$
0.0	1.0	0.0	0.0	1.0
0.1	1.196762	0.137860	0.034539	1.193600
0.2	1.326058	0.274349	0.065446	1.342018
0.3	1.431995	0.413361	0.095386	1.476304
0.4	1.523488	0.553615	0.124591	1.601823
0.5	1.604756	0.694044	0.153116	1.720848
0.6	1.678271	0.833876	0.180981	1.834609
0.7	1.745642	0.972563	0.208197	1.943867
0.8	1.807989	1.109719	0.234774	2.049144
0.9	1.866132	1.245072	0.260723	2.150817
1.0	1.920687	1.378434	0.286058	2.249178

μ	$H_{s_{11}}(\mu)$	$H_{s_{12}}(\mu)$	$H_{s_{21}}(\mu)$	$H_{s_{22}}(\mu)$
0.0	1.0	0.0	0.0	1.0
0.1	1.196771	0.046987	0.101324	1.193590
0.2	1.326070	0.093469	0.192050	1.342002
0.3	1.432001	0.140774	0.279986	1.476287
0.4	1.523478	0.188465	0.365811	1.601811
0.5	1.604721	0.236180	0.449685	1.720847
0.6	1.678199	0.283656	0.531661	1.834623
0.7	1.745523	0.330706	0.611770	1.943903
0.8	1.807813	0.377199	0.690043	2.049207
0.9	1.865887	0.423044	0.766511	2.150911
1.0	1.920365	0.468178	0.841212	2.249309

Matriz	Elemento			
	11	12	21	22
$\underset{\sim}{H}_o$	0.950316	0.303922	0.150217	1.695183
$\underset{\sim}{H}_{so}$	0.950305	0.103447	0.441347	1.695204
$\underset{\sim}{L}_o$	0.198366	−0.152128	−0.078128	0.162992
$\underset{\sim}{L}_{so}$	0.198366	−0.051757	−0.229638	0.162992

Tabela IV.2.4

Verificação das Equações (3.3.11a,b) Simbolicamente $|\underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{D}| = \underset{\sim}{D}iF$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.3$

*	E_{11}	D_{11}	DiF_1	E_{21}	D_2=	DiF_2
I — Matriz $\underset{\sim}{H}$						
Q = 20 + 20	0.75868(−01)	0.75868(−01)	0.55511(−16)	0.23085(0)	0.23085(0)	0.27756(−15)
Q = 20 + 40	0.75868(−01)	0.75868(−01)	0.83267(−16)	0.23085(0)	0.23085(0)	0.70777(−15)
Q = 40 + 40	0.75868(−01)	0.75868(−01)	0.55511(−16)	0.23085(0)	0.23085(0)	0.83267(−15)
II — Matriz $\underset{\sim}{L}$						
Q = 20 + 20	0.20689(−02)	0.20689(−02)	0.11338(−14)	0.11596(−01)	0.11596(−01)	0.15847(−14)
Q = 20 + 40	0.20689(−02)	0.20689(−02)	0.12234(−14)	0.11596(−01)	0.11596(−01)	0.17200(−14)
Q = 40 + 40	0.20689(−02)	0.20689(−02)	0.12267(−14)	0.11596(−01)	0.11596(−01)	0.17686(−14)

Tabela IV.2.5

Verificação de $|\det H^{-1}(-\nu_1)| = 0$, $\epsilon = 10^{-12}$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.3$
$Q = N_1 + N_2$ Representa os Pontos de Quadratura Utilizados sendo N_1 no Intervalo $(0,1/\sigma)$ e N_2 no $(1/\sigma,1)$

*	$H^{-1}_{11}(-\nu_1)$	$H^{-1}_{12}(\nu_1)$	$H^{-1}_{21}(\nu_1)$	$H^{-1}_{22}(\nu_1)$	$\|\det \underset{\sim}{H}^{-1}(\nu_1)\|$
Q = 20 + 20	0.333(0)	−0.465(0)	−0.868(−1)	0.121(0)	0.572(−16)
Q = 20 + 40	0.333(0)	−0.465(0)	−0.868(−1)	0.121(0)	0.485(−15)
Q = 40 + 40	0.333(0)	−0.465(0)	−0.868(−1)	0.121(0)	0.682(−15)
	$H^{-1}_{a11}(-\nu_1)$	$H^{-1}_{a12}(-\nu_1)$	$H^{-1}_{a21}(-\nu_1)$	$H^{-1}_{a22}(-\nu_1)$	$\|\det \underset{\sim}{H}^{-1}(-\nu_1)\|$
Q = 20 + 20	0.332(0)	−0.163(0)	−0.250(0)	0.123(0)	0.114(−15)
Q = 20 + 40	0.332(0)	−0.163(0)	−0.250(0)	0.123(0)	0.392(−15)
Q = 40 + 40	0.332(0)	−0.163(0)	−0.250(0)	0.123(0)	0.583(−15)

* — O número A x 10^B é escrito como A(B).

Tabela IV.2.6

Verificação da Equação 3.3.12, para Três Conjuntos de Pontos de Quadratura para $p_1 = 0.1$ e $p_2 = 0.3$.

D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}
0.402(-15)	0.971(-16)	0.206(-16)	0.312(-16)
0.347(-16)	0.236(-15)	0.112(-16)	0.997(-16)
0.333(-15)	0.268(-15)	0.110(-16)	0.121(-15)
D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}
0.199(-16)	0.640(-15)	0.727(-17)	0.867(-18)
0.954(-16)	0.989(-15)	0.166(-16)	0.121(-16)
0.125(-15)	0.109(-14)	0.197(-16)	0.226(-16)
D_{31}	D_{32}	D_{33}	D_{34}
0.374(-16)	0.601(-16)	0.347(-17)	0.208(-16)
0.431(-16)	0.988(-16)	0.520(-17)	0.208(-16)
0.439(-16)	0.112(-15)	0.520(-17)	0.252(-16)
D_{41}	D_{42}	D_{43}	D_{44}
0.137(-16)	0.156(-16)	0.260(-17)	0.0
0.318(-16)	0.173(-17)	0.520(-17)	0.139(-16)
0.378(-16)	0.269(-16)	0.607(-17)	0.139(-16)

Tabela IV.2.7

Verificação da Equação (2.3.15a)

ν	D_{11}	D_{12}	D_{21}	D_{22}
0.05	0.439(−10) 0.439(−10) 0.777(−14)	0.457(−11) 0.457(−11) 0.581(−16)	0.145(−10) 0.145(−10) 0.444(−15)	0.329(−10) 0.329(−10) 0.866(−14)
0.10	0.933(−14) 0.755(−14) 0.755(−14)	0.162(−14) 0.169(−14) 0.205(−15)	0.495(−14) 0.461(−14) 0.722(−15)	0.688(−14) 0.466(−14) 0.777(−14)
0.20	0.289(−14) 0.511(−14) 0.844(−14)	0.481(−15) 0.658(−15) 0.262(−15)	0.208(−15) 0.680(−15) 0.847(−15)	0.400(−14) 0.600(−14) 0.844(−14)
0.30	0.155(−14) 0.244(−14) 0.666(−14)	0.749(−15) 0.161(−14) 0.555(−16)	0.291(−15) 0.125(−15) 0.763(−15)	0.311(−14) 0.377(−14) 0.644(−14)
0.40	0.444(−15) 0.444(−14) 0.755(−14)	0.146(−14) 0.228(−14) 0.215(−15)	0.125(−15) 0.291(−15) 0.146(−14)	0.400(−14) 0.466(−14) 0.711(−14)
0.50	0.261(−13) 0.188(−13) 0.509(−14)	0.223(−13) 0.391(−13) 0.370(−15)	0.208(−13) 0.138(−13) 0.847(−15)	0.167(−13) 0.131(−13) 0.577(−14)
0.60	0.559(−14) 0.125(−14) 0.104(−14)	0.149(−14) 0.198(−14) 0.279(−14)	0.226(−14) 0.375(−15) 0.777(−15)	0.222(−15) 0.133(−14) 0.133(−14)
0.70	0.179(−07) 0.179(−07) 0.113(−13)	0.152(−08) 0.152(−08) 0.526(−13)	0.998(−08) 0.998(−08) 0.863(−14)	0.849(−09) 0.849(−09) 0.359(−13)
0.80	0.229(−14) 0.111(−15) 0.666(−15)	0.347(−15) 0.842(−14) 0.616(−14)	0.173(−14) 0.111(−15) 0.196(−14)	0.178(−14) 0.153(−14) 0.534(−14)
0.90	0.500(−15) 0.379(−14) 0.465(−14)	0.192(−14) 0.916(−14) 0.134(−13)	0.569(−15) 0.233(−14) 0.124(−14)	0.666(−15) 0.897(−14) 0.476(−14)

Conhecidas as funções matriciais, os coeficientes de expansão são calculados separadamente, através do programa digital de cada problema (Apêndice B). A Tabela (IV.2.8) resume os coeficientes de expansão discretos obtidos para cada problema e a Tabela (IV.2.9) os coeficientes contínuos.

4.3 – Soluções Numéricas

Os resultados dos problemas propostos são apresentados e analizados em separado para três casos de espalhamento; isotrópico ($p_1 = 0.0$, $p_2 = 0.0$) e dois anisotrópicos ($p_2 = 0.0$, $p_2 = 0.3$ e $p_1 = 0.5$). A escolha destes casos é arbitrária, uma vez que a apresentação dos resultados de todos os casos de espalhamento (para vários graus de anisotropia) tornaria por demais longa esta apresentação.

4.3.1 – Problema do Albedo

Dois casos são analisados:

a) fonte constante, isotrópica e unitária no Grupo 1;

b) fonte constante, isotrópica e unitária no Grupo 2;

(a) A seguir é apresentado um conjunto de gráficos que visam facilitar a visualização do modo como se comporta a população de nêutrons neste sistema.

As Figuras (4.3.1) e (4.3.3) mostram a variação na distribuição do fluxo angular no Grupo 1 e 2.

Nestes gráficos são apresentados, para efeito de comparação, os espalhamentos isotrópicos e anisotrópico. Ainda visando a facilidade de comparação, foram também traçados gráficos da mesma distribuição em coordenadas polares (gráficos IV.3.2 e IV.3.4).

Na análise dos gráficos (IV.3.1) e (IV.3.2), nota-se que a anisotropia no espalhamento é bem pronunciada para pontos próximos da fronteira, isto ocorre pois este limite de divisão introduz uma discontinuidade no meio. Este efeito é bem pronunciado no fluxo emergente ao meio, ($x = 0$) gráfico (IV.3.1) e (IV.3.3) e se faz sentir, ainda em pontos do interior do meio ($x = 2.0$) e se acentua à medida que se incorporam maiores graus de anisotropia, veja-se para $x = 0.5$ nas figuras (4.3.1) e (4.3.2).

Nota-se na Figura (IV.3.2) que o espalhamento dos nêutrons é mais pronunciado para a frente, na direção do meio, como consequência o fluxo total de retorno, Gráfico (IV.3.5) tem menor magnitude em pontos próximos da fronteira.

Efeito inverso é observado para o Grupo 2, Gráfico (IV.3.4) o fluxo total de retorno é de maior magnitude em pontos próximos da fronteira. Para ambos os grupos, a partir de $x = 3.0$, figuras de fluxo total, o fluxo de retorno decresce, acentuando o fluxo incidente ao meio

Estes comportamentos são melhor visualizados através da variação da corrente $\underset{\sim}{J}(x)$, Figuras (IV.3.6) e (IV.3.8).

A influência da fronteira no espalhamento dos nêutrons, para os dois grupos, vai decrescendo à medida que se penetra no interior do meio, apresentando um caráter nitidamente isotrópico.

Os Gráficos (IV.3.9) e (IV.3.10) apresentam os resultados obtidos, para o fluxo total, através da expansão em polinômios de Legendre, em P_1 para efeito de comparação. Não se verifica comportamento estranho, mesmo para pontos próximos da fronteira, onde este método não produz bons resultados.

Tabela IV.2.8

Coeficientes de Expansão Discretos

p_1	p_2	Albedo $\underline{F} = \binom{0}{1}$	Albedo $\underline{F} = \binom{1}{0}$	Milne	Fonte Constante
0.0	0.0	6.72642	5.14937	− 0.830951	− 331.117
0.0	0.3	6.72090	4.86819	− 0.823532	− 327.244
0.0	0.5	6.71500	4.68060	− 0.817922	− 324.573
0.0	0.7	6.70693	4.49281	− 0.811679	− 321.814
0.1	0.3	6.41854	5.06117	− 0.823386	− 317.880
0.3	0.5	7.18593	5.36101	− 0.817463	− 351.915
0.3	0.7	7.17745	5.14606	− 0.811295	− 348.787
0.5	0.7	7.53107	5.62248	− 0.810857	− 369.389

Tabela IV.2.9

Coeficientes de Expansão Contínuos $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.3$

ν	Milne $A_1^{(1)}(\nu)$	Milne $A_2^{(1)}(\nu)$	Albedo $A_1^{(1)}(\nu)$	Albedo $\underset{\sim}{F} = A_2^{(1)}(\nu)$	Albedo $A_1^{(1)}(\nu)$	Albedo $\underset{\sim}{F}(\frac{1}{0})\ A_2^{(1)}(\nu)$	Fonte Constante $A_1^{(1)}(\nu)$	Fonte Constante $A_2^{(1)}(\nu)$
0.02	−0.0060679	−0.0143569	−.1725822	0.2194284	0.6083180	−0.4242523	2.640571	−4.797079
0.10	−0.0049270	−0.0121060	−.1582802	0.2037192	0.5405426	−0.4112311	1.992983	−4.085534
0.20	−0.0040180	−0.0101885	−.1495231	0.1924496	0.5087827	−0.4062988	1.590339	−3.534162
0.30	−0.0033289	−0.0086964	−.1449047	0.1860087	0.4845585	−0.4095079	1.356074	−3.142620
0.40	−0.0027294	−0.0074366	−.1421464	0.1833162	0.4670671	−0.4205966	1.207118	−2.844523
0.50	−0.0021195	−0.0063181	−.1385671	0.1844903	0.4467270	−0.4413002	1.099764	−2.613701
0.60	−0.0012826	−0.0053109	−.1236939	0.1902069	0.3887772	−0.4740465	0.9572629	−2.330230
0.66	−0.0000332	−0.0049402	−.0602466	0.1893126	0.1781652	−0.4770612	0.5304752	−2.330230

ν	$A^{(2)}(\nu)$	$A^{(2)}(\nu)$	$A^{(2)}(\nu)$	$A^{(2)}(\nu)$
0.70	0.008293	− .480140	1.28174	5.235039
0.76	0.012772	−1.59534	4.51645	14.79852
0.82	−0.009207	−6.80512	20.3469	52.04301
0.86	−0.211537	−27.6026	85.5843	179.7015
0.88	−0.383416	−35.1330	110.948	208.0068
0.90	−0.269097	−18.9007	60.8013	100.4522
0.94	−0.094693	−4.47914	14.9608	18.13740
0.98	−0.037670	−1.32474	4.59871	3.580253

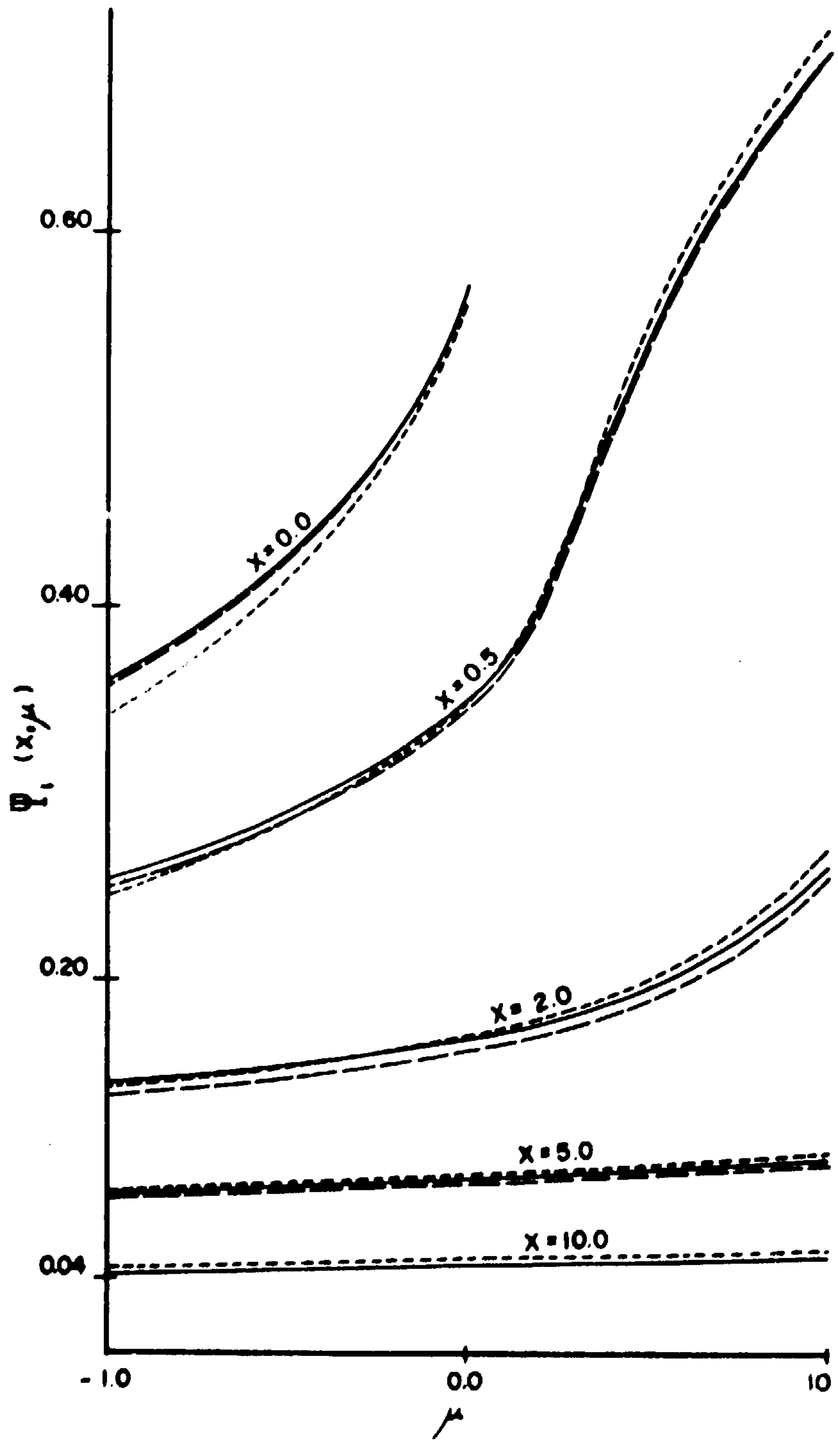

Figura 4-3.1 – Distribuição do Fluxo Angular, Albedo $\underline{F} = \binom{1}{0}$, Grupo I com Espalhamentos: Isotrópico (–, p_1 = 0.0; p_3 = 0.0), Anisotrópicos (- -, p_1 = 0.0; p_3 = 0.05) e (· · ·, p_1 = 0.3; p_3 = 0.5).

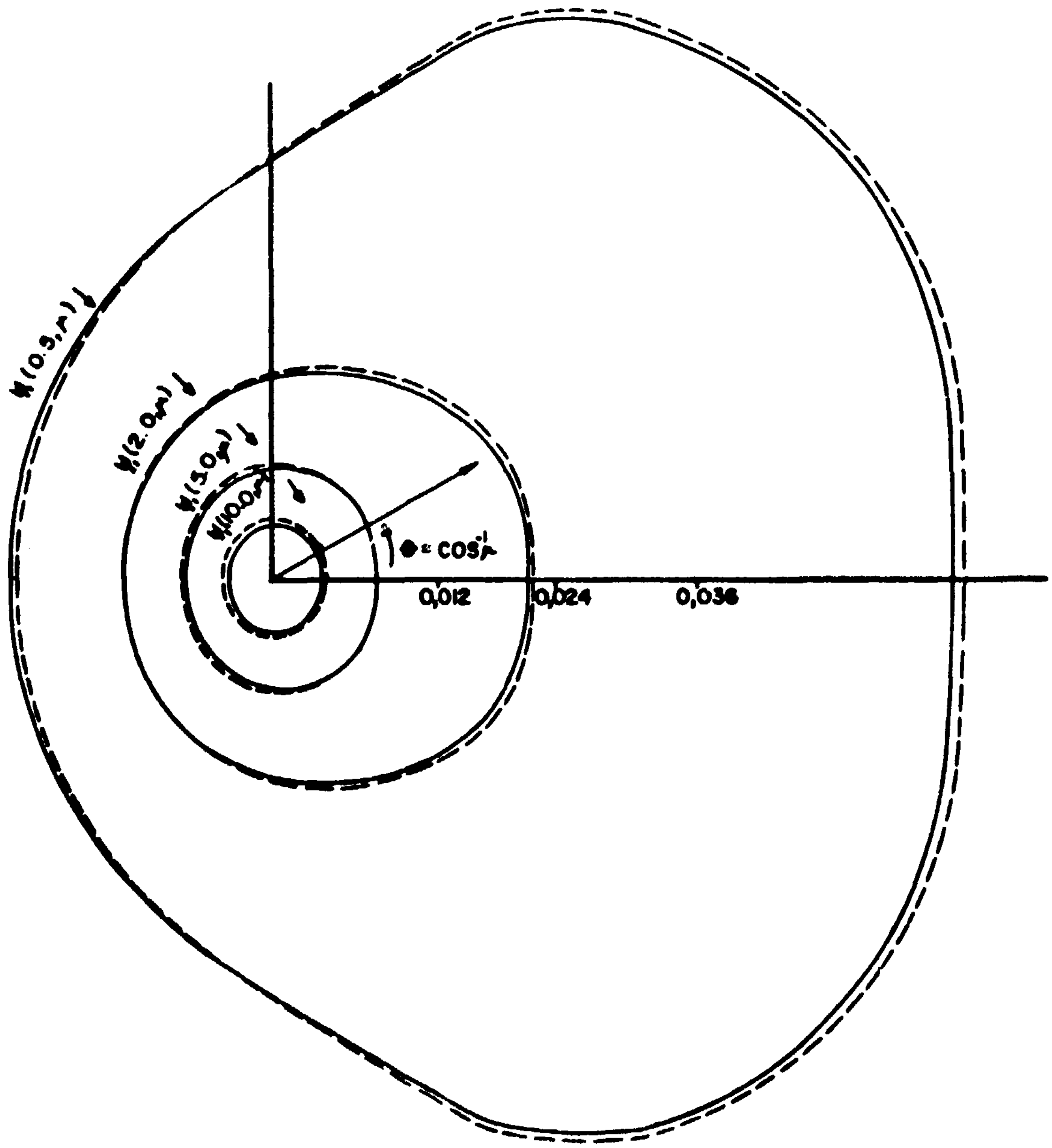

Figura 4-3.2 – Distribuição do Fluxo Angular, Albedo $\underline{F} = \binom{1}{0}$, Grupo I com Espelhamentos: Isotrópico (–, $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.0$) e Anisotrópico (- -, $p_1 = 0.3$; $p_2 = 0.5$).

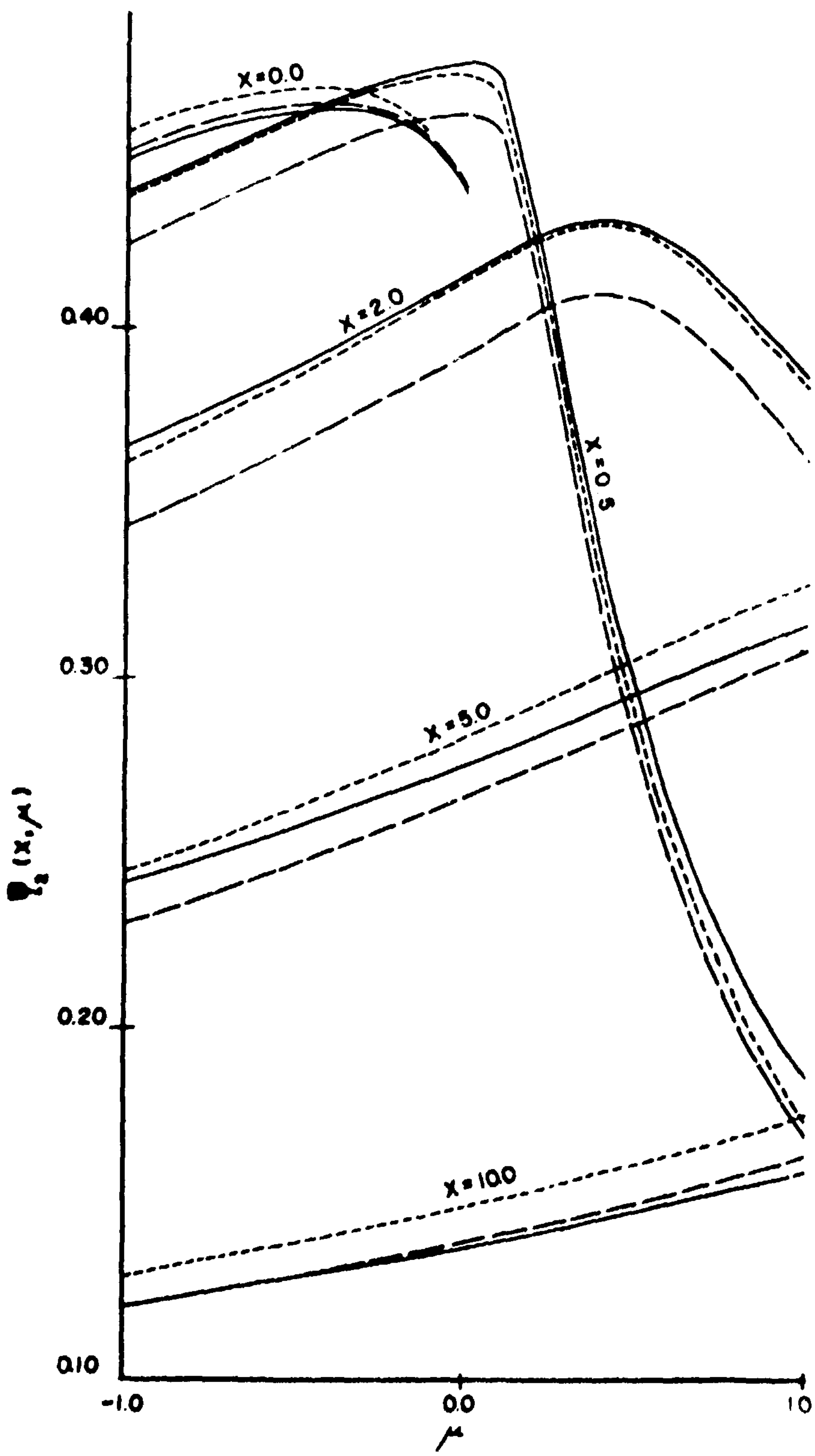

Figura 4-3.3 – Distribuição do Fluxo Angular, Albedo $\underline{F} = \binom{1}{0}$, Grupo 2 com Espalhamentos: Isotrópico (–, $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.0$), Anisotrópicos (- -, $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.5$) e (· · ·, $p_1 = 0.3$; $p_2 = 0.5$).

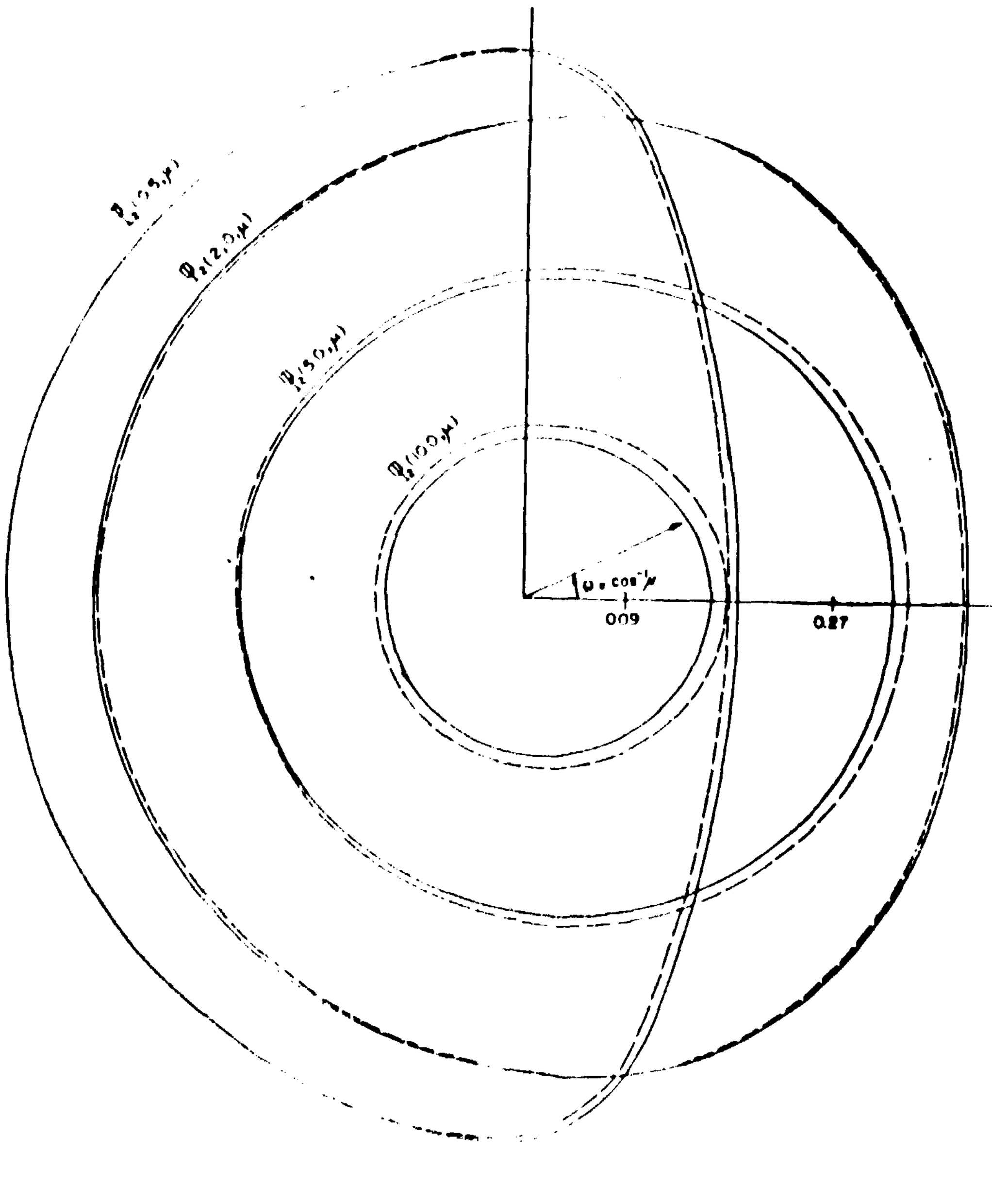

Figura 4-3.4 – Distribuição do Fluxo Angular, Albedo $\underset{\sim}{F} = \binom{1}{0}$, Grupo 2 com Espelhamentos: Isotrópico (–, $p_1 = 0.0$, $p_2 = 0.0$) Anisotrópico (- -, $p_1 = 0.3$; $p_2 = 0.5$).

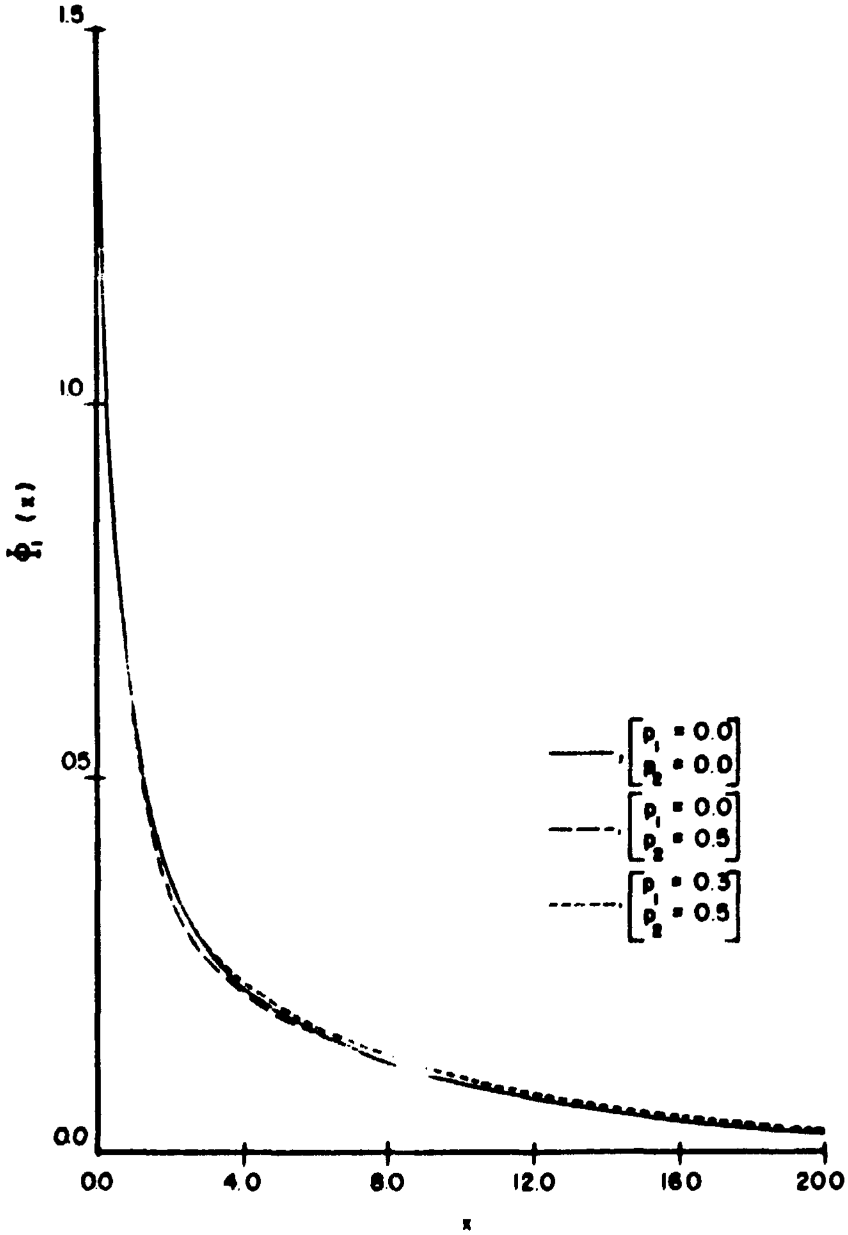

Figura 4-3,6 -- Fluxo Total, Grupo 1, Albedo, $\underline{F} = \binom{1}{0}$

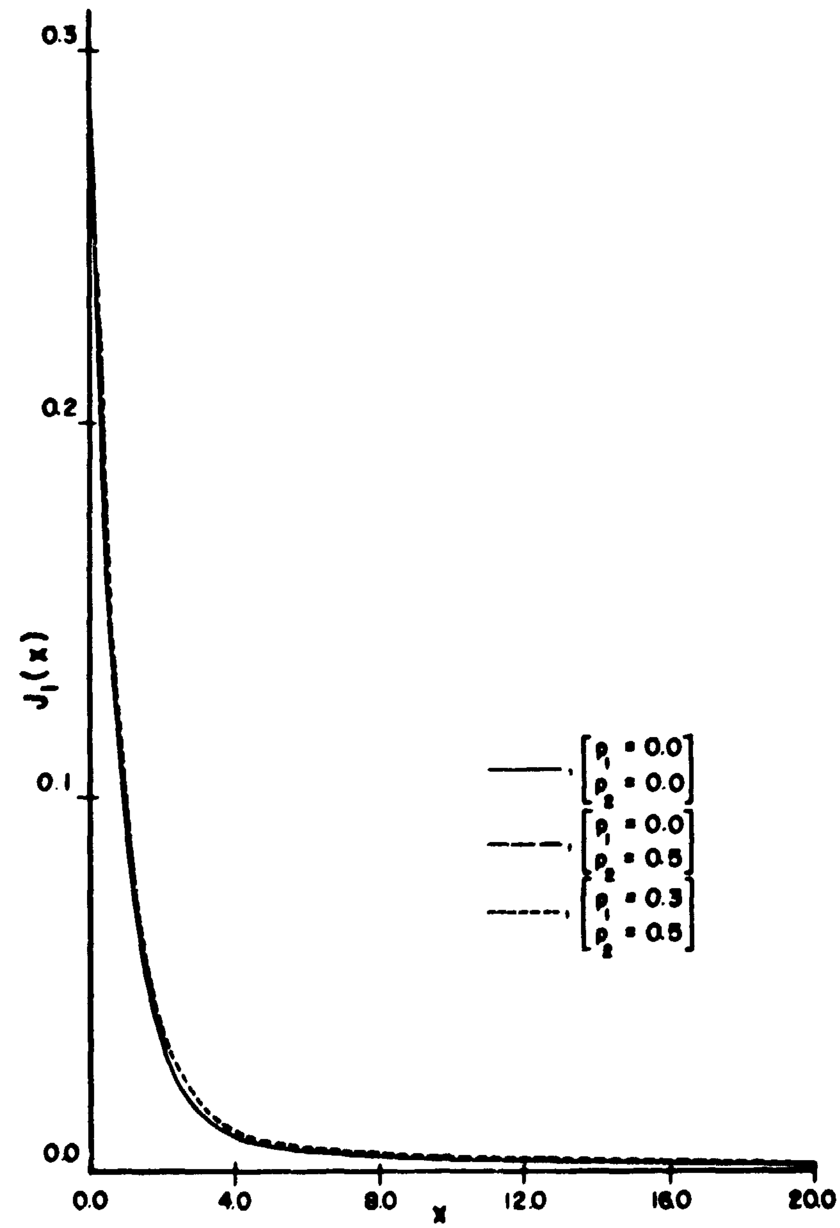

Figura 4-3.6 – Corrente, Grupo 1, Albedo, $\underset{\sim}{F} = \binom{1}{0}$

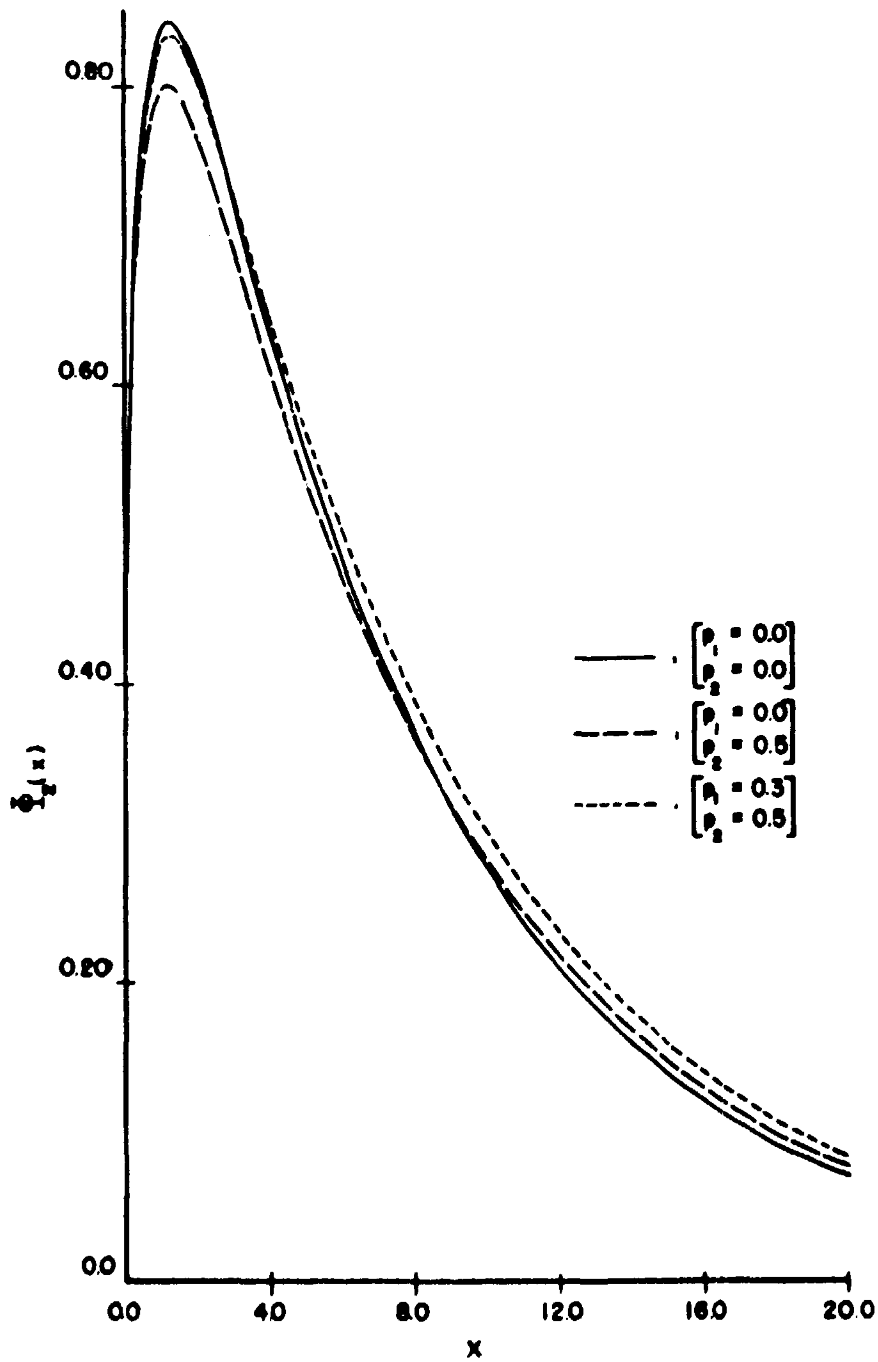

Figura 4-3.7 – Fluxo Total, Grupo 2, Albedo, $\underline{F} = \binom{1}{0}$

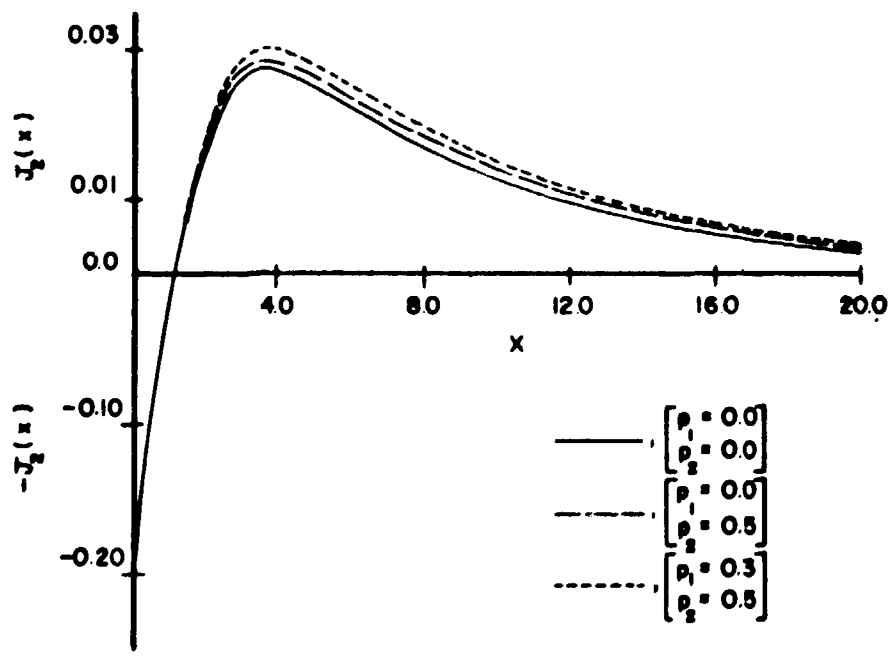

Figura 4-3.8 – Corrente, Grupo 2, Albedo, $\underset{\sim}{F} = \binom{1}{0}$

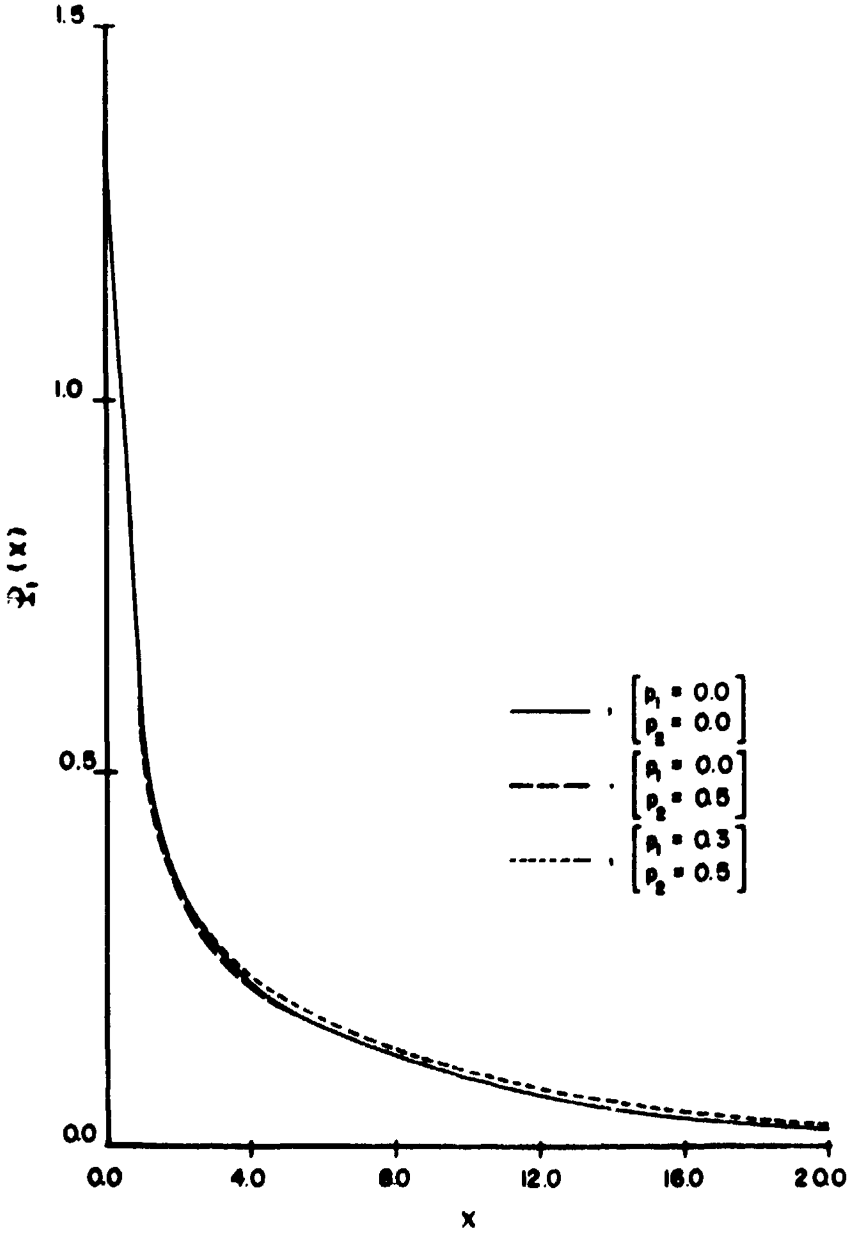

Figura 4-3.9 – Fluxo Total, Grupo 1, Albedo, $\underline{F} = (\frac{1}{0})$, Expansão F

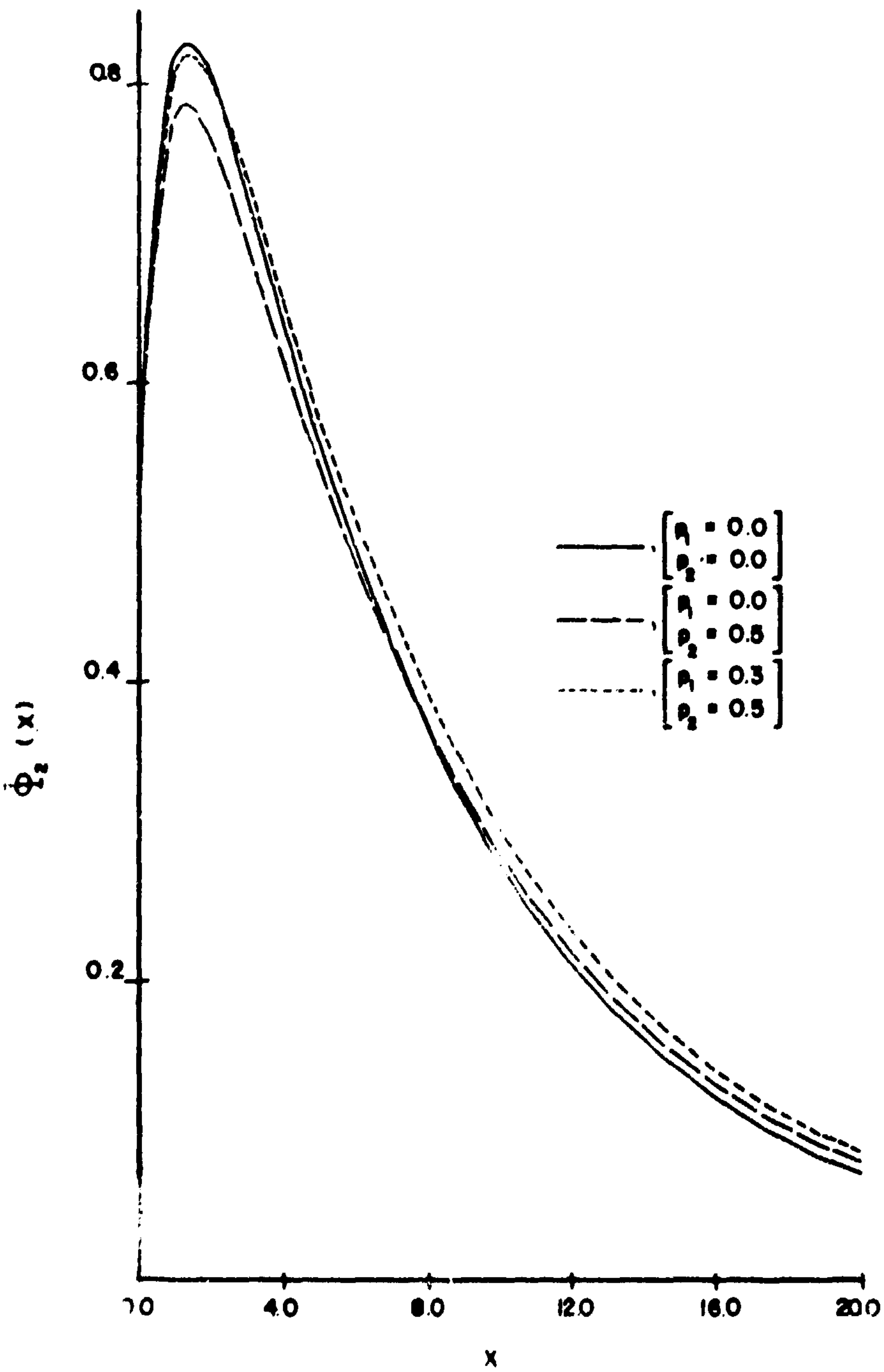

Figura 4-3.10 – Fluxo Total, Grupo 2, Albedo, F = ($\frac{1}{0}$), Expansão P – 1

(b) Na análise dos Gráficos (IV.3.11) e (IV.3.12) nota-se que a anisotropia é bem pronunciada, veja-se no fluxo angular emergente, em pontos próximos da fronteira (x = 0.5) e (x = 2.0).

O caráter isotrópico, porém, vai se acentuando à medida que a influência da fronteira do meio vai decrescendo.

Comportamento análogo é verificado para o Grupo 2, Gráficos (IV.3.13) e (IV.3.14).

O espalhamento dos nêutrons do Grupo 1 é para traz, tomando-se como sentido o meio, Gráfico (IV.3.12) induzindo um fluxo de retorno de maior magnitude para pontos próximos da fronteira, Gráficos (IV.3.15), comparado com o fluxo incidente ao meio.

Comportamento inverso é verificado para o Grupo 2, Gráficos (IV.3.17) e (IV.3.18).

Os Gráficos (IV.3.19) e (IV.3.20) representam o fluxo total em cada grupo, obtidos através da expansão P − 1.

A Tabela IV.3.1 reproduz os valores calculados para os Albedos ($\beta_{\alpha,\gamma}$), os índices α e γ representam respectivamente o termo de fonte e o grupo de nêutrons.

Tabela IV.3.1

$\beta_{\alpha\beta}$ – Albedos

EXATO					
p_1	p_2	β_{11}	β_{12}	β_{21}	β_{22}
0.0	0.0	0.406351	0.456386	0.155752	0.682338
0.0	0.3	0.405262	0.457637	0.155467	0.674673
0.0	0.5	0.404510	0.458398	0.155210	0.669014
0.0	0.7	0.403736	0.459083	0.154886	0.662829
0.1	0.3	0.399840	0.454598	0.140720	0.628111
0.1	0.5	0.400364	0.460039	0.155997	0.668348
0.3	0.5	0.391719	0.463370	0.157615	0.666970
0.3	0.7	0.390894	0.464051	0.157286	0.660756
0.5	0.7	0.381703	0.467441	0.158962	0.659285
EXPANSÃO P − 1					
0.0	0.0	0.381345	0.480010	0.163815	0.673522
0.0	0.3	0.380132	0.481289	0.163539	0.665778
0.0	0.5	0.379297	0.482062	0.163285	0.660062
0.0	0.7	0.378436	0.482751	0.162962	0.653814
0.1	0.3	0.375793	0.483132	0.164396	0.665051
0.1	0.5	0.374940	0.483908	0.164143	0.659325
0.3	0.5	0.365860	0.487662	0.165906	0.657798
0.3	0.7	0.464941	0.488353	0.165580	0.651518
0.5	0.7	0.355287	0.492191	0.167409	0.649889

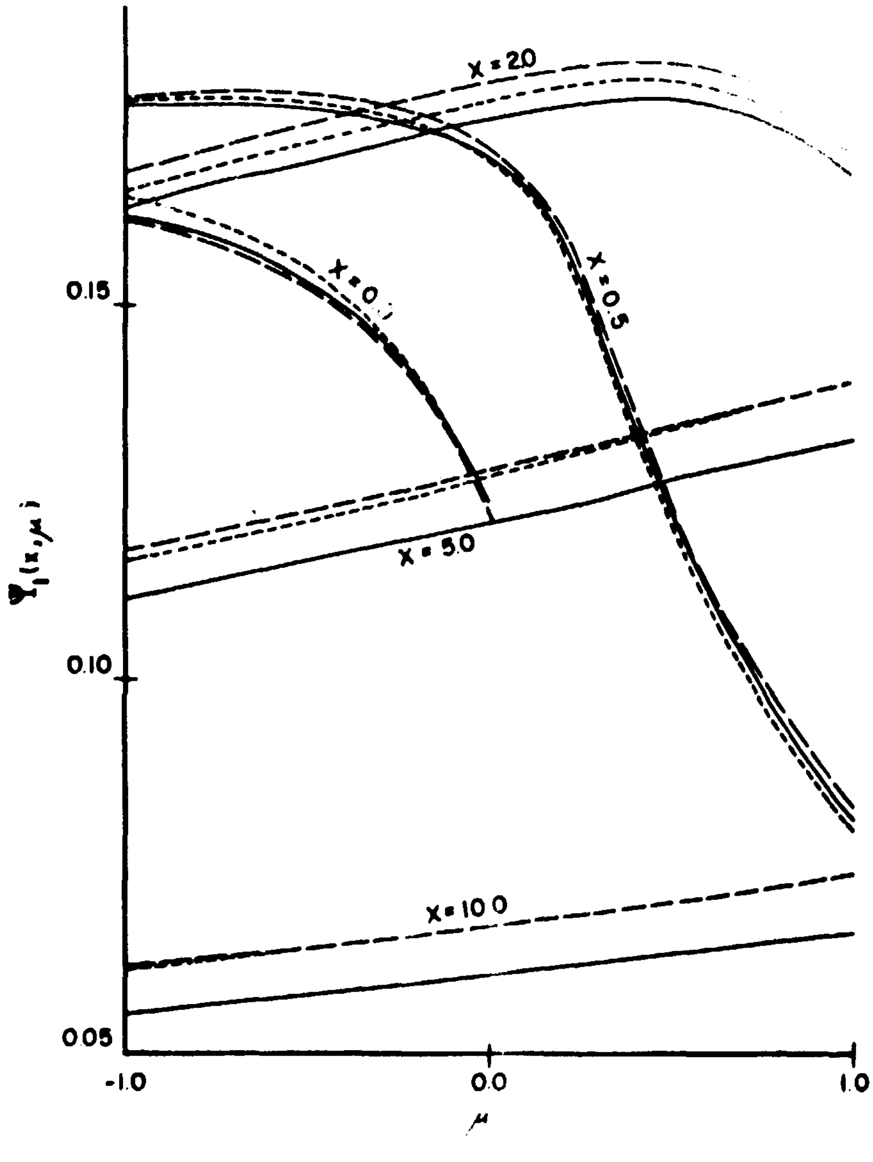

Figura 4-3.11 – Distribuição do Fluxo Angular, Albedo, $\underline{F} = \binom{1}{0}$, Grupo 1 com Espalhamentos: Isotrópico (—, $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.0$), Anisotrópico (- -, $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.5$) e (- - -, $p_1 = 0.3$; $p_2 = 0.5$)

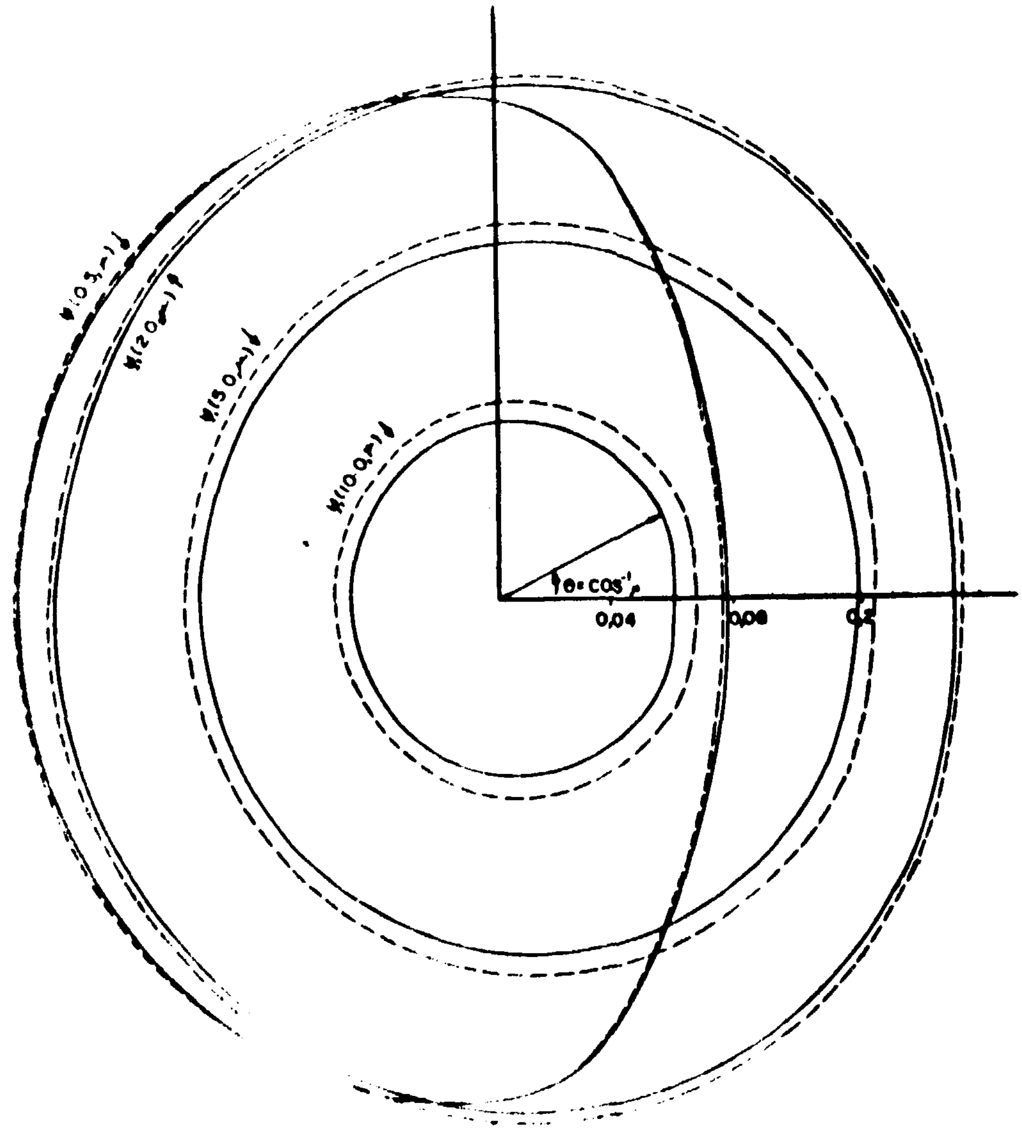

Figura 4-3.12 – **Distribuição do Fluxo Angular, Albedo, $\underset{\sim}{F} = \binom{1}{0}$, Grupo 1 com Espalhamentos: Isotrópico (–, p_1 = 0.0; p_2 = 0.0) e Anisotrópico (· ·, p_1 = 0.3; p_2 = 0.5).**

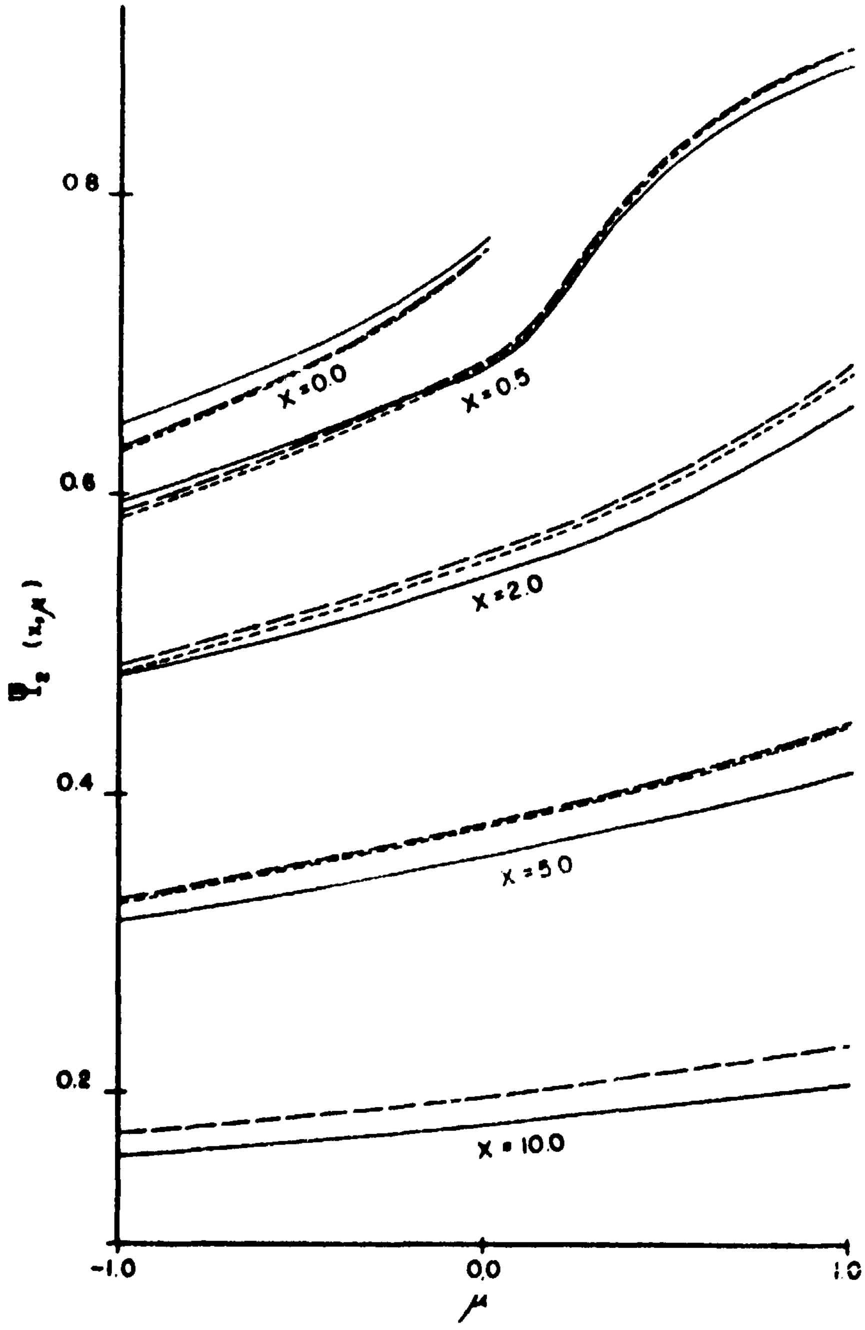

Figura 4-3.13 – Distribuição do Fluxo Angular, Albedo, $\underset{\sim}{F} = \binom{1}{0}$, Grupo 2 com Espalhamentos: Isotrópico (–, $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.0$), Anisotrópicos (- -, $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.5$) e (- - -, $p_1 = 0.3$; $p_2 = 0.5$).

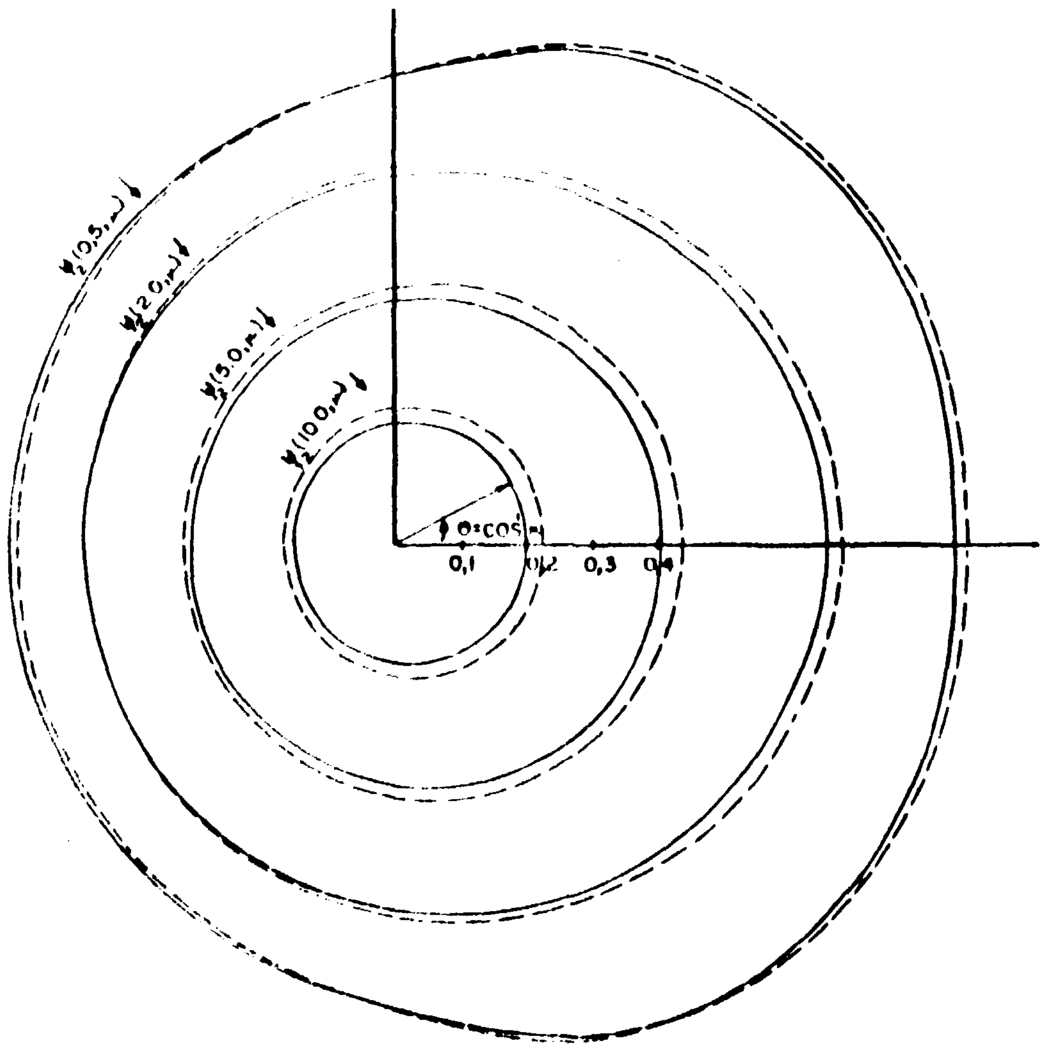

Figura 4-3.14 – Distribuição do Fluxo Angular, Albedo, $\underset{\sim}{F} = \binom{1}{0}$, Grupo 2 com Espalhamentos: Isotrópico (—, $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.0$) e Anisotrópico (- -, $p_1 = 0.3$; $p_2 = 0.5$).

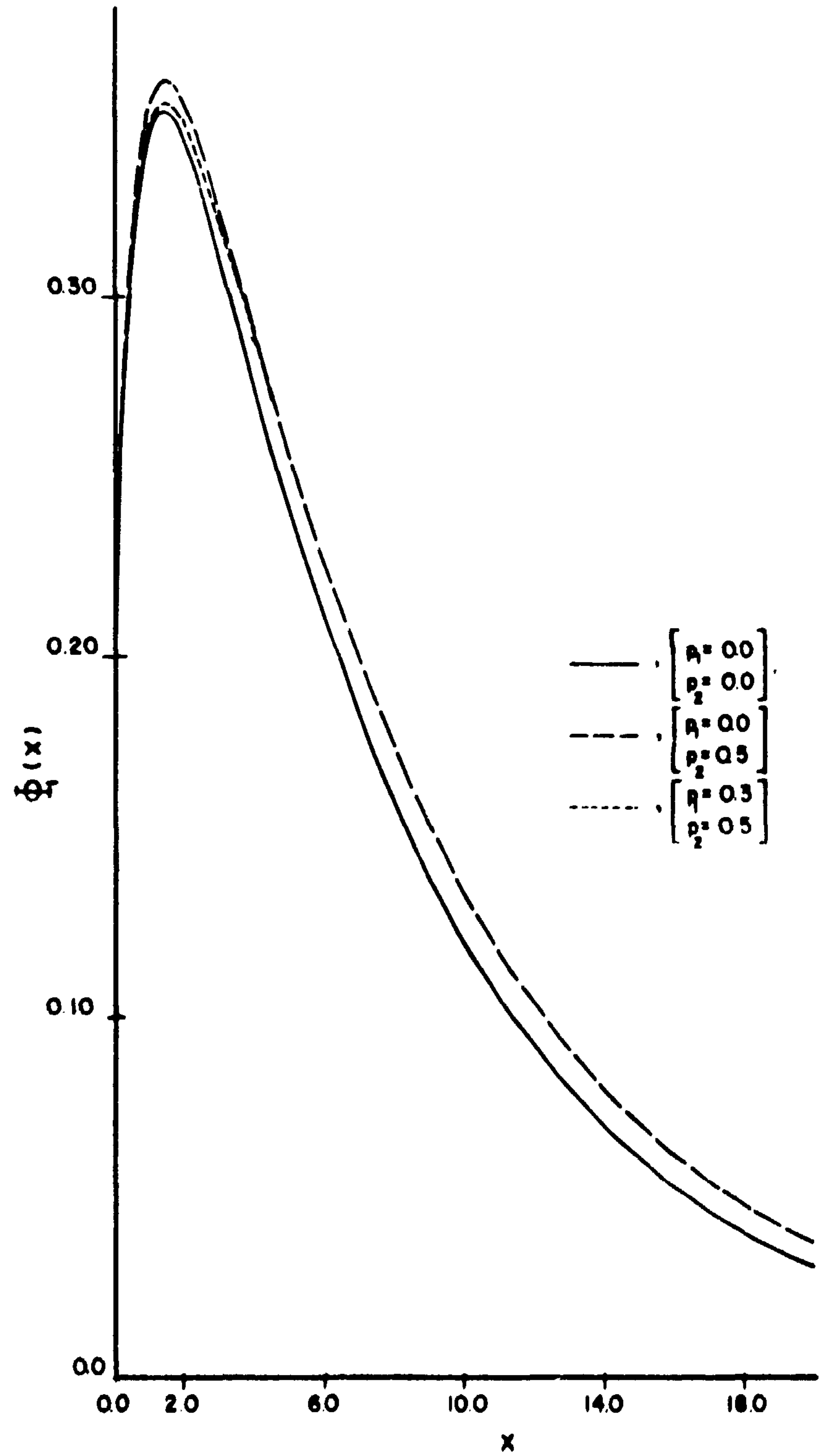

Figura 4-3.16 – Fluxo Total, Grupo 1, Albedo, $\underset{\sim}{F} = \binom{1}{0}$

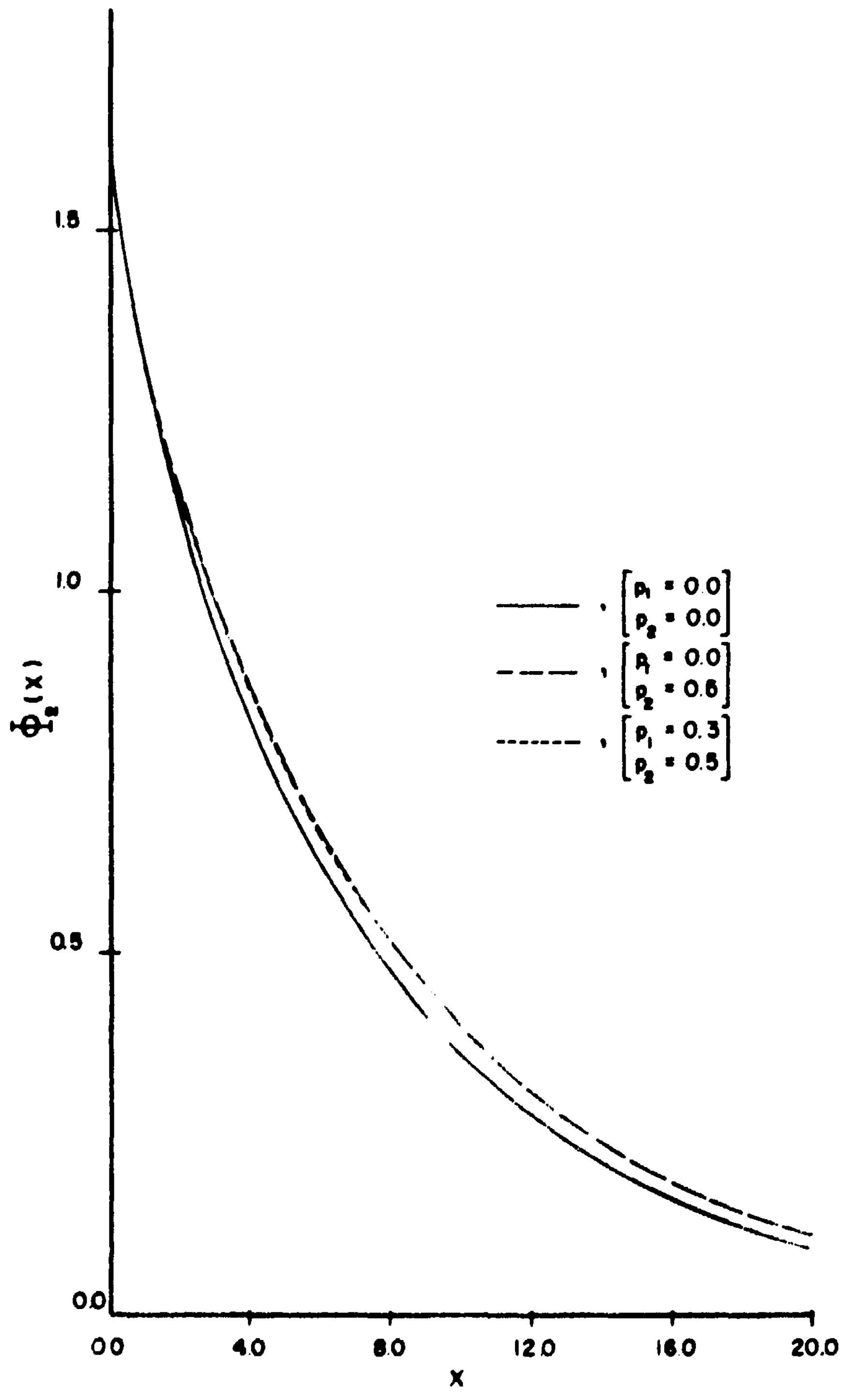

Figura 4-3.18 — Fluxo Total, Grupo 2, Albedo, $\underline{F} = \binom{1}{0}$

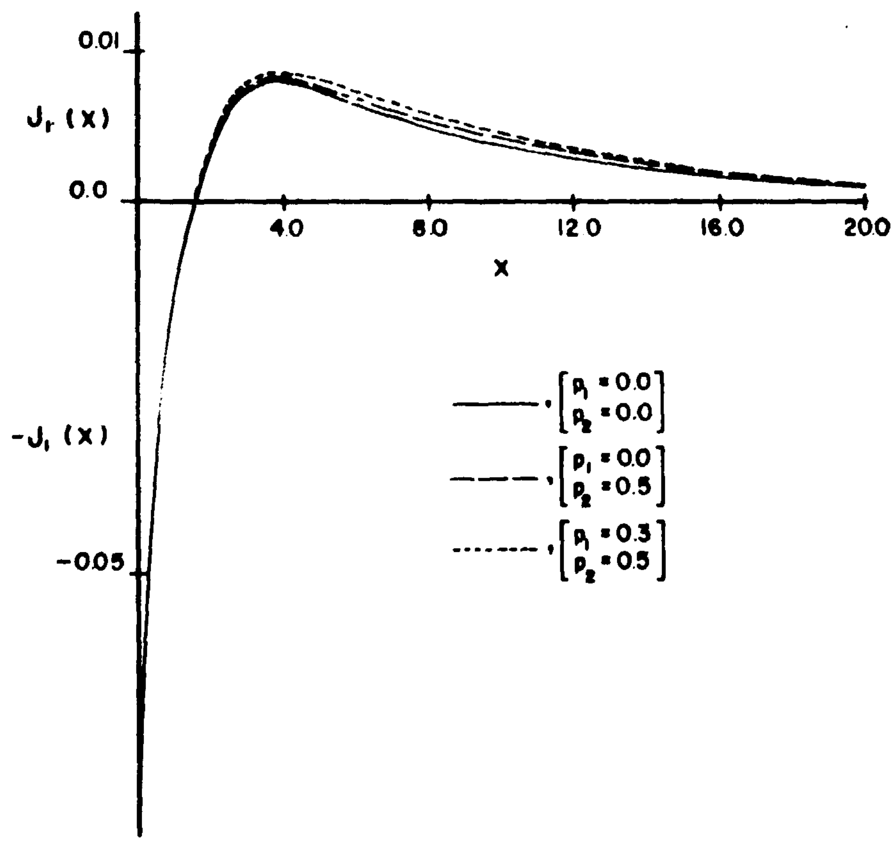

Figura 4-3.17 – Corrente, Grupo 1, Albedo, $\underline{F} = \binom{1}{0}$

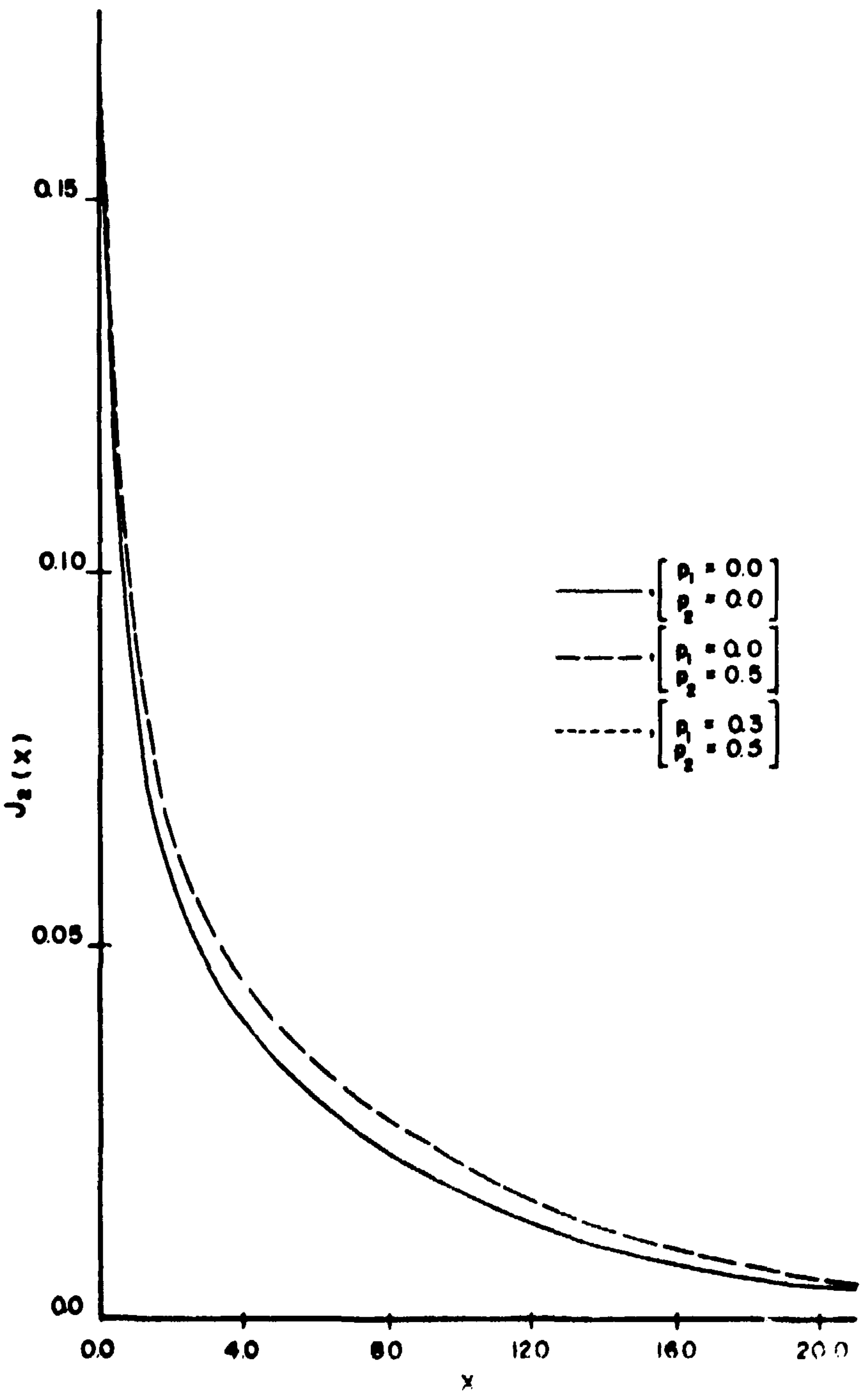

Figura 4-3.18 – Corrente, Grupo 2, Albedo, $\underline{F} = \binom{1}{0}$

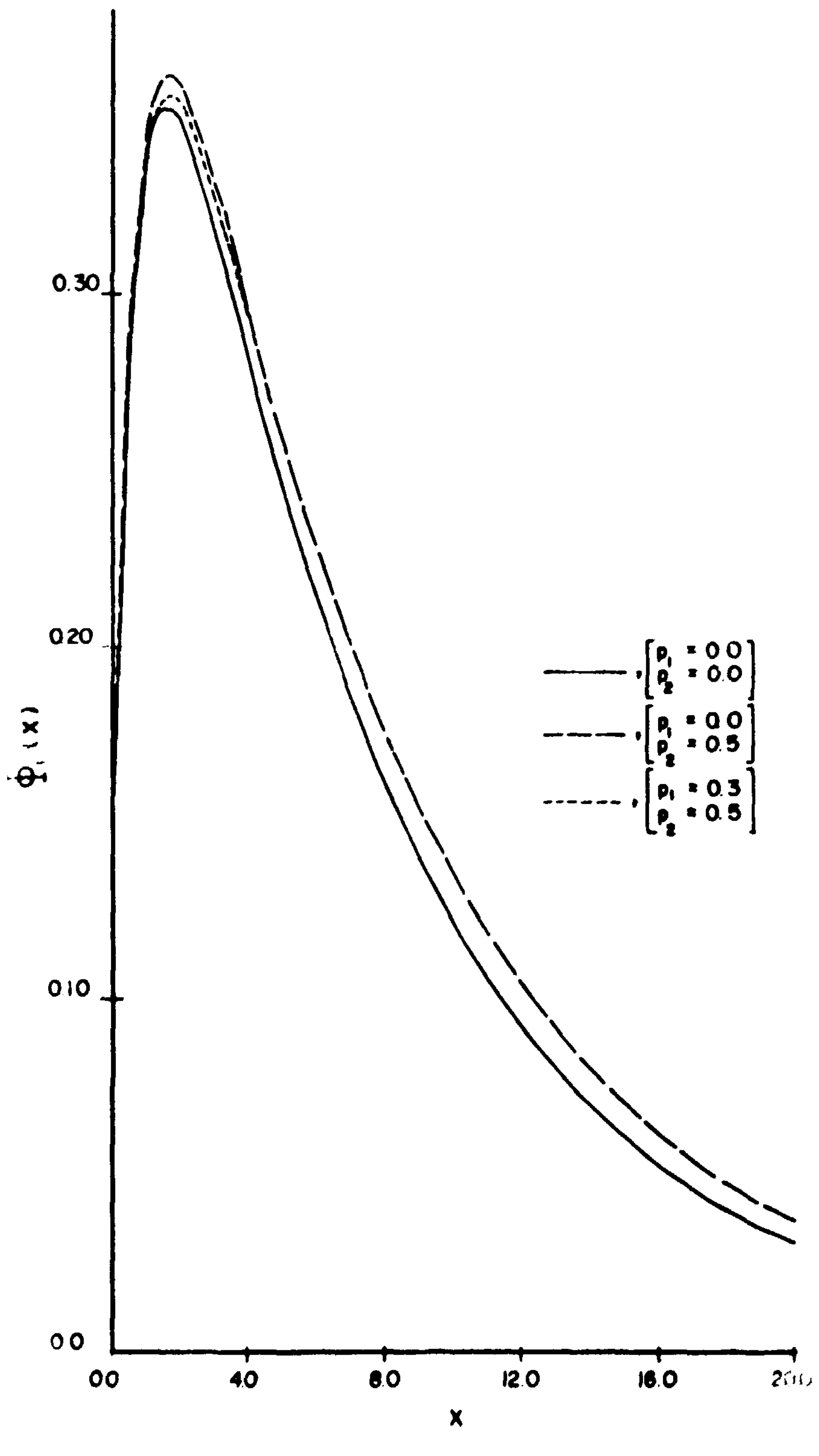

Figura 4-3.19 – Fluxo Total, Grupo 1, Albedo, $\underset{\sim}{F} = \binom{1}{0}$ Expansão P – 1

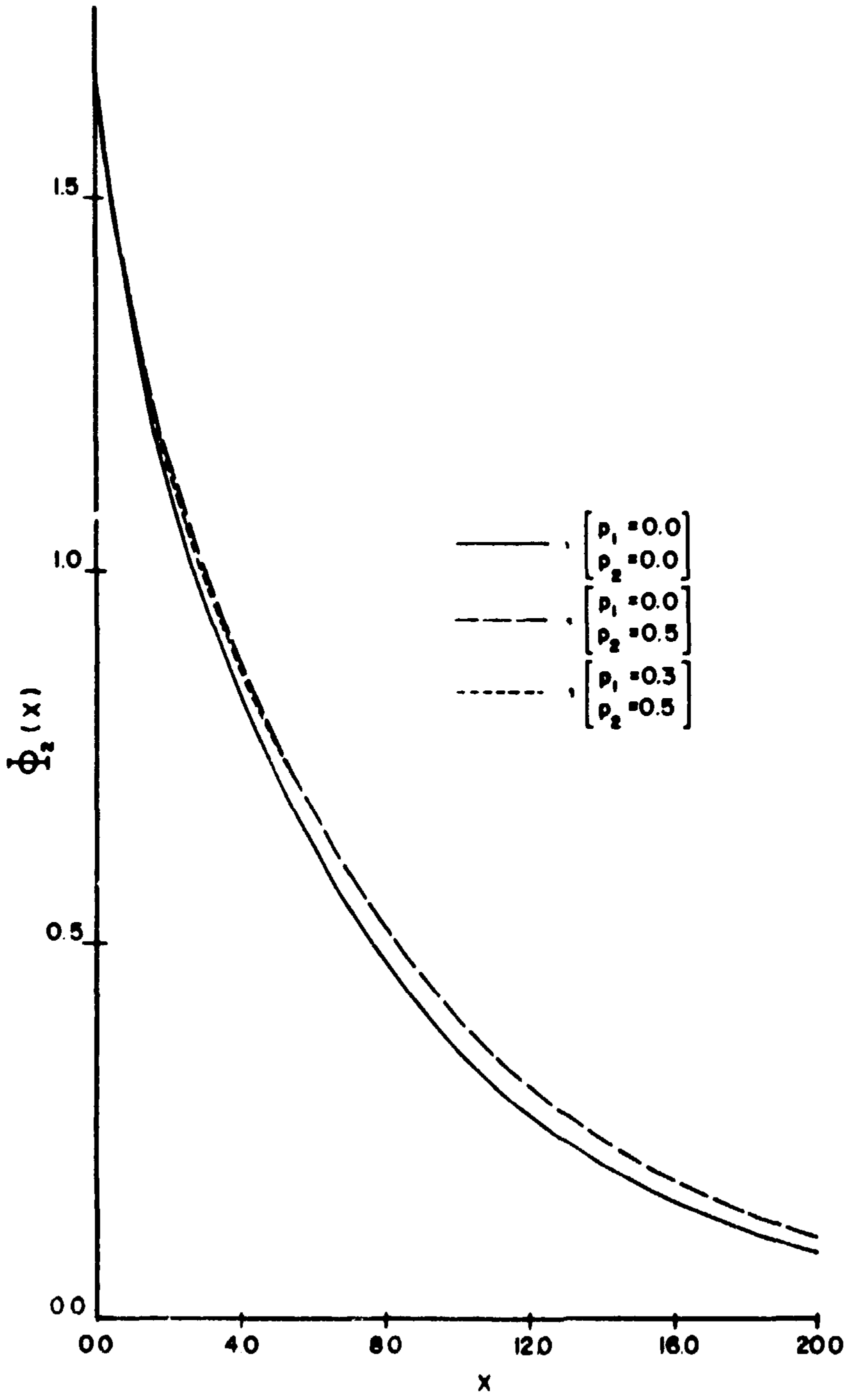

Figura 4-3.20 Fluxo Total, Grupo 2, Albedo, $\underline{F} = \binom{1}{0}$ Expansão P – 1

4.3.2 – Problema da Fonte Constante

Os Gráficos (IV.3.21) e (IV.3.22) apresentam a variação na distribuição angular como função do ângulo e da distância dentro do meio respectivamente, para o Grupo 1.

Observa-se como a distribuição angular se torna progressivamente mais isotrópica e cresce em magnitude com a distância dentro do meio.

Nota-se na Figura (4.3.23) que o fluxo total, quando se admite espalhamento isotrópico, tem magnitude sempre maior que o fluxo total com espalhamento anisotrópico, crescendo esta diferença à medida que se incorporam maiores graus de anisotropia na função de transferência.

Este comportamento é justificado pois, o autovalor discreto no caso isotrópico é sempre de menor valor do que o caso anisotrópico (Tabela IV.2.2) e no interior do meio os fluxos são proporcionais à $\exp(-x/\nu_1)$.

Na distribuição emergente ao meio para pontos próximos da fronteira aquela justificativa não se aplica pois nesta região, ocorre uma descontinuidade no meio, tornando o espalhamento mais anisotrópico e acentuando mais a anisotropia quando se incorporam maiores graus de anisotropia.

Para o caso aqui estudado, o vetor $\underset{\sim}{S}$ da equação (2.4.2.1) foi tomado como sendo,

$$\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1/\sigma_2 \end{bmatrix} \qquad (4.3.2.1)$$

O problema que se obtém quando se considera a fonte no grupo 1 é virtualmente idêntico ao caso aqui estudado.

4.3.3 – O Problema de Milne

Nota-se na Figura (4.3.26), da distribuição do fluxo angular emergente e no interior do meio, que para pontos próximos da fronteira ($x = 0.5$ e $x = 2.0$) a anisotropia do espalhamento é bem acentuada pois, sendo o meio homogêneo, ocorre uma descontinuidade introduzida por aquele limite de divisão; e este efeito à medida que se incorporam maiores graus de anisotropia na função de transferência.

Através da distribuição emergente ($x = 0.0$) este comportamento é melhor caracterizado pois, além do efeito de fronteira, a absorção per si introduz uma anisotropia no espalhamento pois o vácuo atua como um absorvedor puro ($\underset{\sim}{\Psi}(0,\mu) = \underset{\sim}{0}$, $\mu \epsilon (0,1)$).

Porém, à medida que o efeito de fronteira decresce, o caráter isotrópico do espalhamento se acentua ($x = 5.0$ e $x = 10.0$) e paralelamente se verifica o aumento na magnitude dos fluxos angulares pois no interior do meio eles crescem exponencialmente em direção da fonte (são proporcionais a $\exp(x/\nu_1)$).

Pode-se ainda notar que o fluxo angular isotrópico é, para pontos afastados da fronteira, sempre maior que o caso anisotrópico. Como já foa observado, isto é decorrente do fato de ser o autovalor discreto anisotrópico sempre maior que o isotrópico e aumentando este comportamento à medida que se incorporam maiores graus de anisotropia.

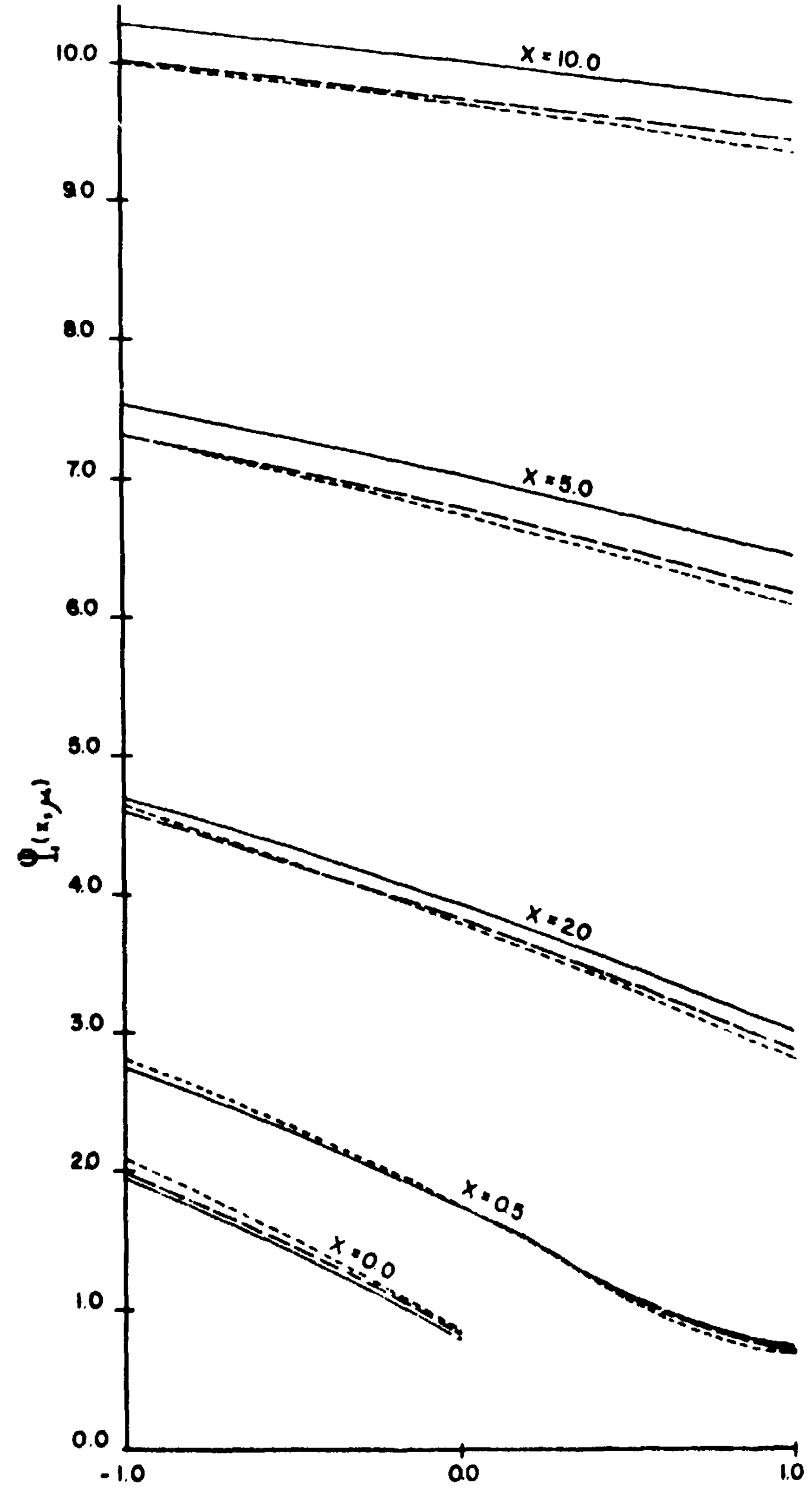

Figura 4-3.21 – Fonte Constante, Distribuição do Fluxo Angular, Grupo 1, com Espalhamentos: Isotrópico (—, p_1 = 0.0; p_2 = 0.0), Anisotrópicos (- -, p_1 = 0.0; p_2 = 0.5) e (- - -, p_1 = 0.3; p_2 = 0.5).

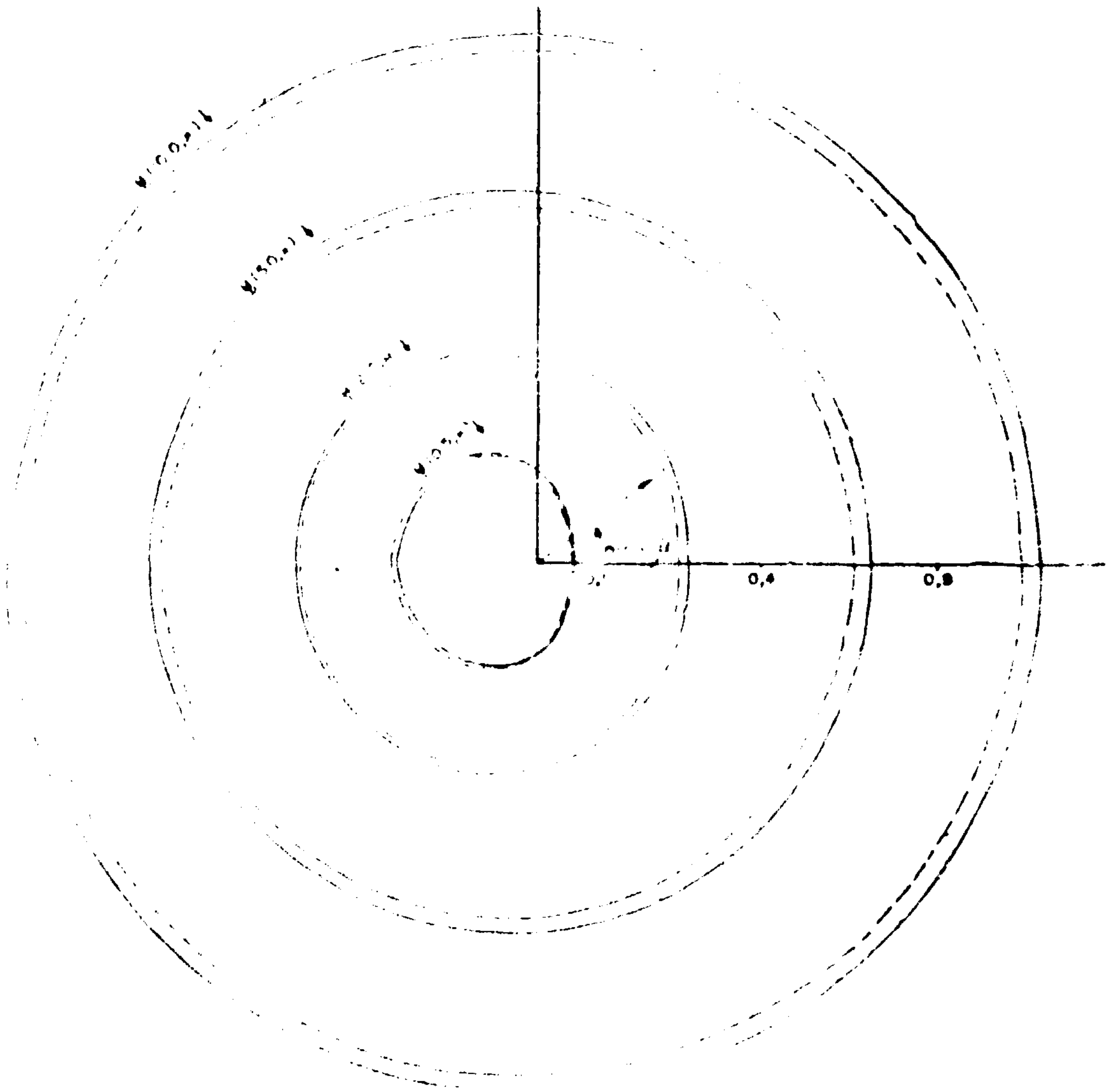

Figura 4-3.22 – Fonte Constante, Distribuição do Fluxo Angular, Grupo 1 com **Espalhamentos: Isotrópico** (–, p_1 = 0.0, p_2 = 0.0) e Anisotrópico (- -, p_1 = 0.3; p_2 = 0.5).

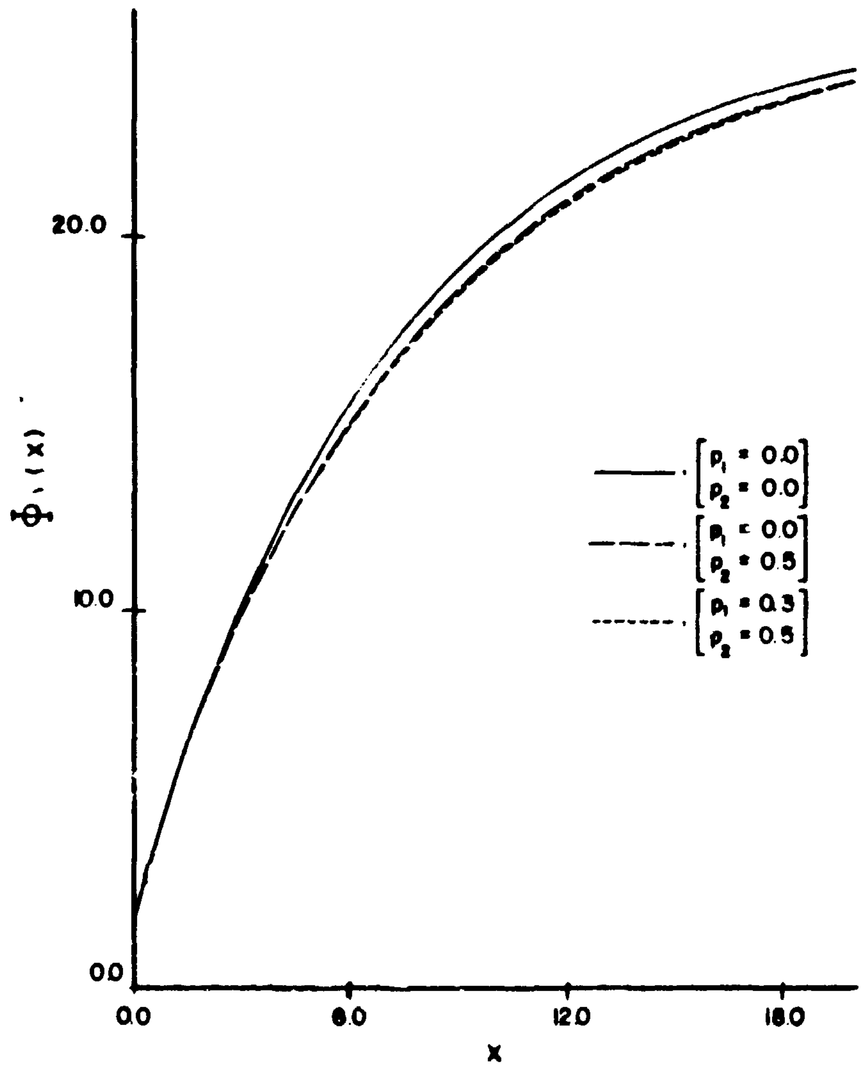

Figure 4-3.23 – Fluxo Total, Grupo 1, Fonte Constante

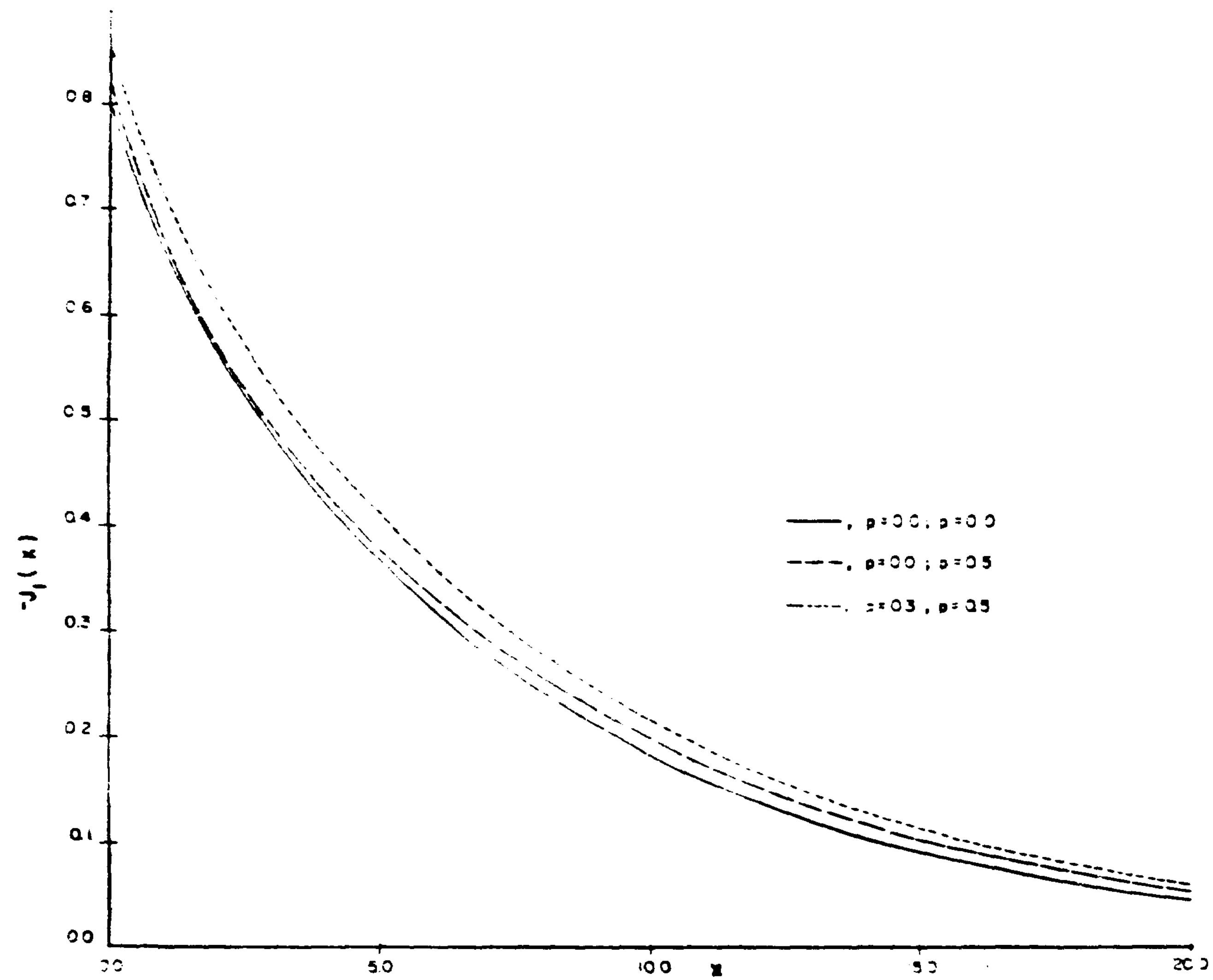

Figura 4-3.24 – Corrente, Grupo I Fonte Constante

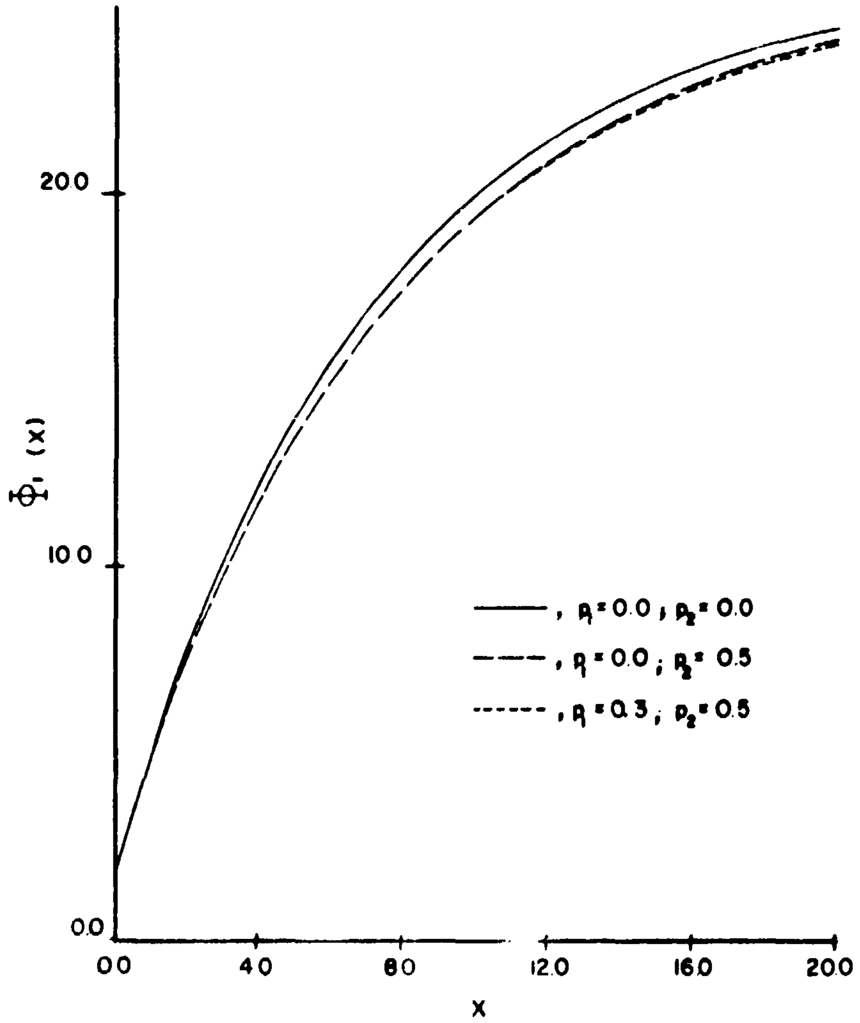

Figura 4.3.25 – Fluxo Total, Grupo 1, Fonte Constante, Expansão P – 1

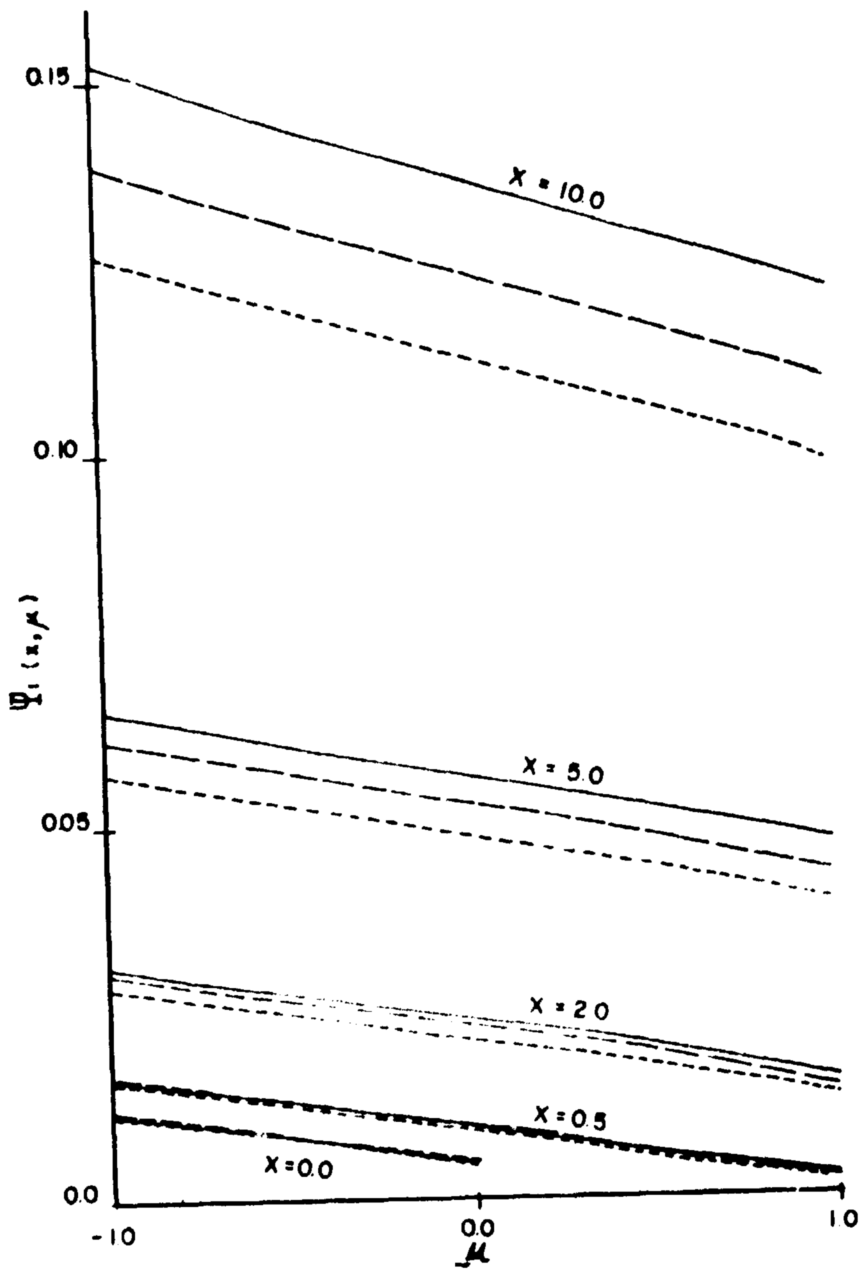

Figura 4.3.26 – Milne Distribuição do Fluxo Angular, Grupo 1 com Espalhamentos: Isotrópico (—, p_1 = 0.0; p_2 = 0.0), Anisotrópico (- -, p_1 = 0.0; p_2 = 0.5) e (- - -, p_1 = 0.3; p_2 = 0.5).

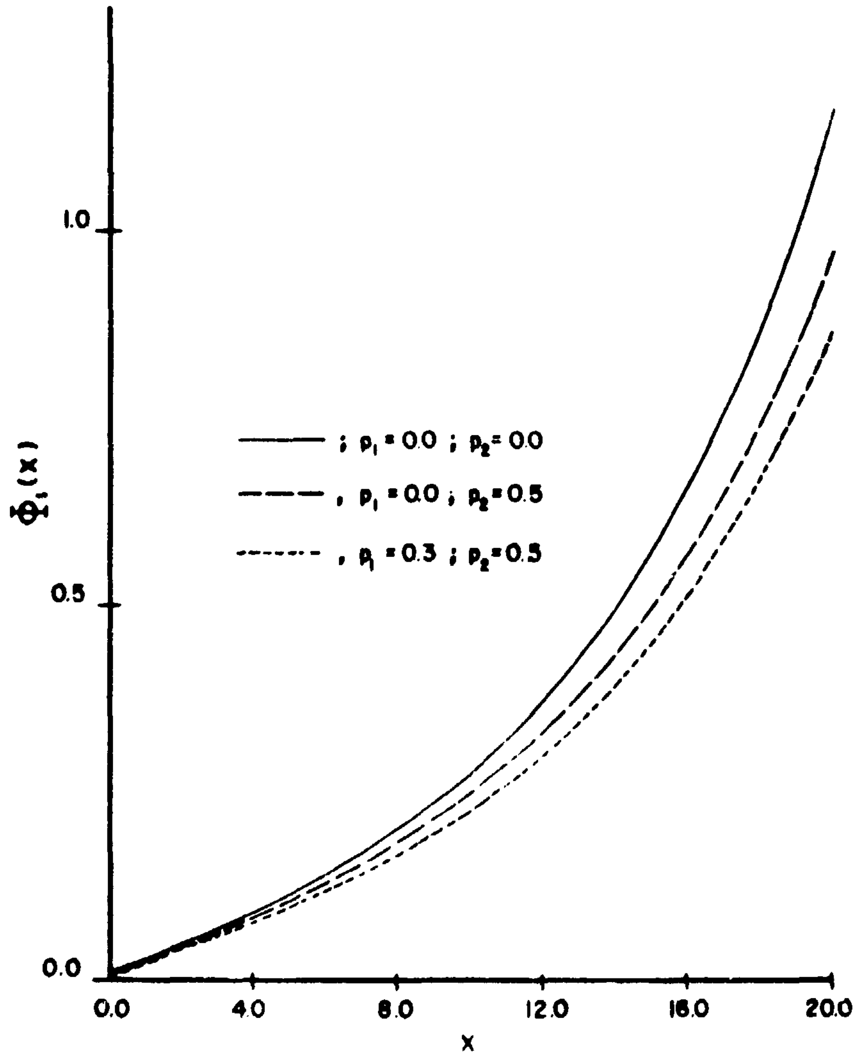

Figura 4.3.27 Fluxo Total, Grupo 1 – Milne

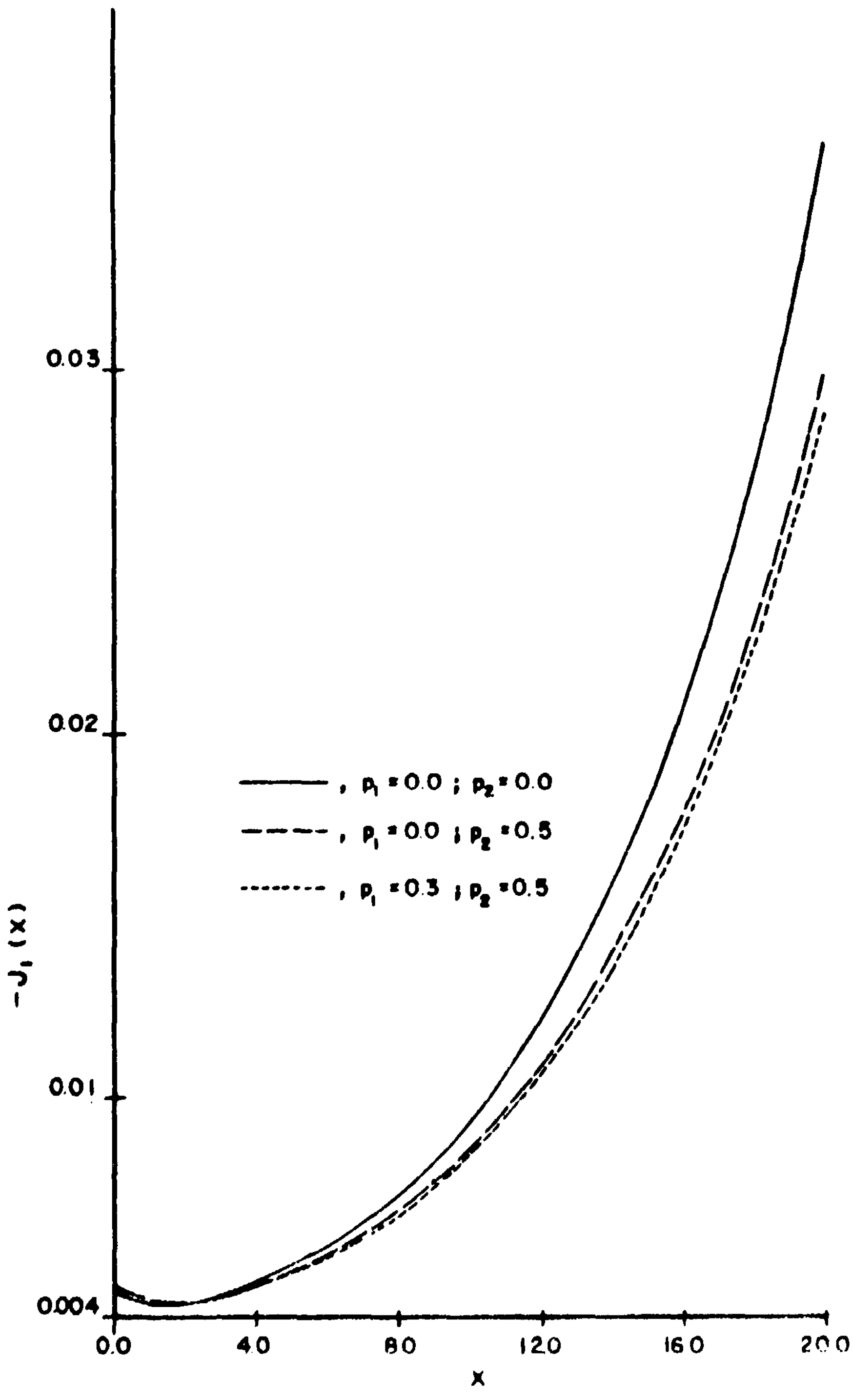

Figura 4-3.28 – Corrente, Grupo 1 - Milne

Na Figura 4.3.27 tem-se a variação com a posição, em livres caminhos médios, do fluxo escalar, $\underset{\sim}{\Phi}(x)$ para o Grupo 1.

Tabela IV.3.2

Distância Extrapolada, Problema de Milne

p_1	p_2	z_0	z_0 (P – 1)
0.0	0.0	0.665826	0.6218
0.0	0.3	0.727570	0.6792
0.0	0.5	0.776237	0.7245
0.3	0.5	0.786477	0.7341
0.0	0.7	0.832483	0.7768
0.3	0.7	0.842937	0.7869
0.5	0.7	0.851652	0.7954

A Tabela (IV.3.2) apresenta a distância extrapolada em unidades de livres caminhos médios, para vários casos de espalhamentos, em conjunto com os resultados da expansão P – 1.

Como foi visto, a distância extrapolada é definida, como a distância além da interface, entre os meios, onde a componente assintótica do fluxo escalar, $\underset{\sim}{\Phi}(x) = \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{\Psi}(x, \mu)\, d\mu$, se anula.

A componente assintótica é obtida abandonando-se a contribuição contínua que é composta pela soma dos termos exponenciais correspondentes a $\nu \epsilon (0,1)$, representando essencialmente a influência da fronteira; estes termos decaem com o aumento de x de modo que no interior do meio a solução da equação de transporte é o fluxo assintótico[6].

Assim sendo, a solução assintótica corresponde apenas às exponenciais relacionadas com o maior autovalor, ν_1 e é dominante na região longe da fronteira.

Nota-se na Tabela (IV.3.2) que a medida que se incorporam maiores graus de anisotropia a distância de extrapolação aumenta. Este comportamento é justificado pois o decréscimo dos fluxos totais, perto da fronteira, é menor para anisotropias maiores.

Deve-se ainda notar que para um par de raízes discretas, a distância de extrapolação possue o mesmo valor para cada grupo.

5 – CONCLUSÕES

Através do método de Case e das relações de ortogonalidade das autofunções no semi espaço, estabelecidas por Ishiguro, pode-se converter o conjunto de equações de obtenção dos coeficientes de expansão, equações integrais singulares, num cálculo simples das matrizes $\underset{\sim}{H}$ em função das quais se expressam os coeficientes

Os resultados obtidos demonstraram que as relações de ortogonalidade podem ser utilizadas com sucesso, combinadas com testes numéricos dos resultados na solução de problemas de semi espaço.

Estudou-se o efeito de espalhamento linearmente anisotrópico, baseando-se nas proposições de que a função de transferência pode ser representada através de dois termos da série de polinômios de Legendre, e que a razão dos coeficientes na série depende somente da velocidade inicial dos nêutrons.

Apesar de se ter trabalhado apenas com um meio, acredita-se que foram acrescentadas maiores informações sobre o comportamento de nêutrons quando se considera dois termos comparados com apenas um (espalhamento isotrópico).

Verifica-se que o efeito de fronteira, bastante pronunciado no fluxo emergente, ainda persiste em alguns livres caminhos médios no interior do meio, o que confirma a prática de incorporar-se secções de choque de transporte na teoria da difusão.

Quanto aos efeitos de espalhamento anisotrópico sobre o comportamento da população neutrônica, observou-se que, embora o comportamento esteja qualitativamente, em geral, de acordo com nossas expectativas, por exemplo o aumento na distância de extrapolação a medida que a anisotropia se torna mais pronunciada; em contraposição são observadas diferenças quantitativas bem menores na distribuição angular.

Entretanto, como se considerou somente um caso, água leve pura, não se pode afirmar que este comportamento é geral.

APÊNDICE A

Neste apêndice são apresentadas explicitamente várias funções e integrais descritas por Reith e Siewert utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Como foi visto nos capítulos que precedem este apêndice os elementos das matrizes $\underset{\sim}{C}$ e $\underset{\sim}{B}$ são designados respectivamente por C_{ij} e b_{ij} de maneira análoga os elementos de $\underset{\sim}{A}$ são a_{ij} e os determinantes das matrizes $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ e $\underset{\sim}{C}$; respectivamente por A, B e C; complementando utilizou-se a seguinte representação;

$$T(z) = \tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2}\,\ell n \frac{(1+z)}{(1-z)} \qquad \text{(A.1)}$$

Então;

$$\underset{\sim}{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(z) & \Lambda_{12}(z) \\ \Lambda_{21}(z) & \Lambda_{22}(z) \end{bmatrix}, \quad z \notin (-1, 1)\,. \qquad \text{(A.2)}$$

$$\underset{\sim}{\lambda}(\nu) = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(\nu) & \Lambda_{12}(\nu) \\ \Lambda_{21}(\nu) & \Lambda_{22}(\nu) \end{bmatrix}, \quad \nu \in \left(-1, -\frac{1}{\sigma}\right) \cup \left(\frac{1}{\sigma}, 1\right) \qquad \text{(A.3)}$$

e

$$\underset{\sim}{\lambda}(\nu) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(\nu) & \lambda_{12}(\nu) \\ \lambda_{21}(\nu) & \lambda_{22}(\nu) \end{bmatrix}, \quad \nu \in \left(-\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right), \qquad \text{(A.4)}$$

onde,

$$\Lambda_{1\alpha}(z) = \delta_{1\alpha} + 2a_{1\alpha} z^2 - 2z\,\Delta_{1\alpha}(\sigma z^2)\,T\left(\frac{1}{\sigma z}\right), \qquad \text{(A.5a)}$$

$$\Lambda_{2\alpha}(z) = \delta_{2\alpha} + 2a_{2\alpha} z^2 - 2z\,\Delta_{1\alpha}(z^2)\,T\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{(A.5b)}$$

$$\lambda_{1\alpha}(\nu) = \delta_{1\alpha} + 2a_{1\alpha}\nu^2 - 2\nu\,\Delta_{2\alpha}(\nu^2)\,T(\sigma\nu)\,, \qquad \text{(A.5c)}$$

e

$$\lambda_{2\alpha}(\nu) = \delta_{2\alpha} + 2a_{2\alpha}\nu^2 - 2\nu\,\Lambda_{2\alpha}(\nu^2)\,T(\nu)\,, \qquad \text{(A.5d)}$$

para $\alpha = 1$ e 2.

A função de dispersão $\Lambda(z) = \det \underset{\sim}{\Lambda}(z)$ pode ser descrita como:

$$\Lambda(z) = 1 + 2z^2\, P_1(z) - 2zP_2(z)\, T\left(\frac{1}{\sigma z}\right) - 2z\, P_3(z)\, T\left(\frac{1}{z}\right) +$$

$$+\, 4z^2\, P_4(z)\, T\left(\frac{1}{\sigma z}\right) T\left(\frac{1}{z}\right) \tag{A.6}$$

onde

$$P_1(z) = a_{11} + a_{22} + 2Az^2\,, \tag{A.7a}$$

$$P_2(z) = c_{11} + (\sigma a_{11} + 2c_{11}a_{22} - 2c_{12}a_{21})z^2 + 2\sigma Az^4\,, \tag{A.7b}$$

$$P_3(z) = c_{22} + (a_{22} + 2c_{22}a_{11} - 2c_{21}a_{12})z^2 + 2Az^4\,, \tag{A.7c}$$

e

$$P_4(z) = C + (\sigma c_{22}a_{11} + c_{11}a_{22} - c_{12}a_{21} - \sigma c_{21}a_{12})z^2 + \sigma Az^4 \tag{A.7d}$$

Os valores de contorno da função $\Lambda(z)$ podem ser expressos por:

$$\Lambda^{\pm}(\mu) = 1 + 2\mu^2 P_1(\mu) - 2\mu P_2(\mu)T'(\sigma\mu) - 2\mu\, P_3(\mu)T(\mu)$$

$$+\, 4\mu^2 P_4(\mu)T'(\sigma\mu)T(\mu) - \pi^2\, \mu^2\, P_4(\mu)\theta(\mu)$$

$$\pm\, i\pi\mu\, [\, P_2(\mu)\theta(\mu) + P_3(\mu) - 2\mu P_4(\mu)T(\mu)\theta(\mu)$$

$$-\, 2\mu P_4(\mu)\, T'(\sigma\mu)\,]\,,\quad \mu\in(-1,\,1)\,. \tag{A.8}$$

onde

$$T'(\sigma\mu) = T(\sigma\mu),\ \text{para}\ \mu\in\left(-\frac{1}{\sigma},\,\frac{1}{\sigma}\right). \tag{A.9a}$$

e

$$T'(\sigma\mu) = T\left(\frac{1}{\sigma\mu}\right),\ \text{para}\ \mu\in\left(-1,-\frac{1}{\sigma}\right) \cup \left(\frac{1}{\sigma},\,1\right); \tag{A.9b}$$

As integrais de normalização podem ser resumidas através das equações;

$$N(\nu_i) = \nu_i^2\, [\, P_3(\nu_i) - 2\nu_i P_4(\nu_i)\, T\left(\frac{1}{\sigma\nu_i}\right)]\, \frac{d}{dz}\Lambda(z)\Big|_{z=\nu_i} \tag{A.10a}$$

$$N^{(1)}(\nu) = \nu\,\Lambda^{+}(\nu)\Lambda^{-}(\nu),\ \nu\,\epsilon\left(-\frac{1}{\sigma},\frac{1}{\sigma}\right), \tag{A.10b}$$

e

$$N^{(2)}(\nu) = \nu\,\Lambda^{+}(\nu)\Lambda^{-}(\nu),\ \nu\,\epsilon\left(-1,-\frac{1}{\sigma}\right) \cup \left(\frac{1}{\sigma},1\right). \tag{A.10c}$$

Finalmente os integrais $N_{\alpha\beta}$ são obtidas pela seguinte equação;

$$N_{\alpha\beta}(\nu) = \lambda_{a_{1\alpha}}(\nu)\,\lambda_{1\beta}(\nu) + \lambda_{a_{2\alpha}}(\nu)\,\lambda_{2\beta}(\nu)$$

$$+ \pi^2\nu^2 \left[\,\Delta_{a_{1\alpha}}(\sigma\nu^2)\Delta_{1\beta}(\sigma\nu^2) + \Delta_{a_{2\alpha}}(\nu^2)\Delta_{2\beta}(\nu^2)\,\right].$$

$$\alpha,\beta = 1,2,\ \nu\epsilon\left(-\frac{1}{\sigma},\frac{1}{\sigma}\right) \tag{A.11}$$

APÊNDICE B

Relação dos programas e subprogramas utilizados na resolução dos problemas propostos neste trabalho.

B – 1 Introdução

Faz-se a descrição suscinta do cálculo executado pelos programas e subprogramas elaborados para este trabalho.

B – 2 Solução da Equação de Dispersão

I – Programa Principal

PR1: cálculo dos autovalores discretos da equação de dispersão.

II – Subprogramas

a) FUNCTION ZFL(Z): Resolução da equação A.6.

b) FUNCTION ZFL(Z): Resolução da derivada da equação A.6.

B – 3 Solução dos Problemas Propostos

I – Programa Principal

O programa principal é constituído por um conjunto de comandos de definição de variáveis necessárias na solução dos problemas. Ele é construído de tal forma que permite obter as soluções de qualquer dos problemas modificando-se ou introduzindo-se apenas alguns comandos específicos de cada problema.

No Apêndice C são apresentadas as listagens tanto deste programa principal como dos subprogramas utilizados.

II – Subprogramas

a) **HMATRIX**: Calcula e testa a precisão dos resultados das matrizes $\underset{\sim}{H}(\mu)$, $\underset{\sim}{L}(\mu)$ e adjuntas.

b) **SHI(Z, I1, I2)**: Calcula o módulo do determinante do inverso da matriz $\underset{\sim}{H}(\mu)$ no ponto $z = \nu_1$. Os parâmetros I1 e I2, são controladores de cálculo.

c) **SINGH(Z, IC, IH)**: Faz o teste dos valores obtidos das matrizes $\underset{\sim}{H}(\mu)$ e $\underset{\sim}{L}(\mu)$ através da equação integral singular equação 4.3.15a e calcula o momento da equação 2.3.15.

d) **LAMBDA(Z)**: Calcula $\lambda_{\alpha\beta}$, $\Lambda_{\alpha\beta}$, $\underset{\sim}{\Delta}(\underset{\sim}{\Sigma} z^2)$, $\lambda_{a_{\alpha\beta}}$, $\Lambda_{a_{\alpha\beta}}$ e $\Lambda_a(\underset{\sim}{\Sigma} z^2)$.

e) **VECT(Z, I1, I2)**: Calcula os vetores de normalização, $\underset{\sim}{V}$ e $\underset{\sim}{U}$.

f) **FNORM(Z, I1 e I2)**: Cálculo dos integrais de normalização, $N(\nu_1)$, $N^{(1)}(\nu)$ e $N^2(\nu)$.

g) **SOM(Z, I1, I2)**: Cálculo da matriz $\underset{\sim}{\Omega}(z)$.

h) **SOA(Z, I1, I2)**: Cálculo da matriz $\underset{\sim}{\Omega}_a(z)$.

i) **SOD(Z1, Z2, I1, I2)**: Cálculo do produto $\underset{\sim}{\Omega}_a(z_1)\ \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{\Omega}(z_2)$.

j) **CHECK1(IC)**: Testa as condições de contorno, através dos momentos.

l) **FLUXM(Z, UO, FLUX1, FLUX2)**: Cálculo da distribuição do fluxo angular, onde z é a distância em livres caminhos médios, e UO é o ângulo.

m) **DENSM(Z, DEN1, DN2, DAS2)**: Cálculo dos fluxos escalares, (DEN1, DEN2) e dos fluxos assintóticos (DAS1, DAS2).

n) **CURRM(Z, CUR1, CUR2)**: Cálculo da distribuição da corrente.

o) **CHECK2**: Compara duas formas de obtenção das integrais de normalização no intervalo (0, $1/\sigma$) e calcula os coeficientes de expansão nos pontos 0, $1/\sigma$ e 1, quando se toma o limite analítico das equações (2.4.1.4, 5 e 6).

APÊNDICE C

Listagens dos programas digitais elaborados para: cálculo dos autovalores discretos, problema de Milne que engloba o cálculo das funções matriciais.

```
C***** PROGRAMA PRINCIPAL PARA PROBLEMAS DE DOIS GRUPOS  *********
      IMPLICIT REAL*8(A-H,L,O-Z),INTEGER(I,J,K,M,N)
      COMMON/BLOCK1/N, NP, KP, M
      COMMON/BLOCK2/PI   ,EPS ,S    ,C11 ,C12 ,C21 ,C22 ,A11 ,A12 ,A21 ,
     1     A22, C    ,A    ,U11 ,U12 ,U21 ,U22 ,AA11,AA12,AA21,AA22,
     2Z0(4)   , UN(4), U1(4), UA1(4), V11(40), V21(40), V31(65), U2[illegible],
     3TAU(20), UA(4), U2(4), UA2(4), V12(40), V22(40), V32(65), U2[illegible],
     4C1(40), CA2(40), CA3(65), CN(99), CN2, X(99), W(99),
     5H11(99), HA11(99), L11(99), LA11(99), W[illegible], WHA11(99), [illegible] ,
     6H12(99), HA12(99), L12(99), LA12(99), W[illegible], WHA12(99), [illegible] ,
     7H21(99), HA21(99), L21(99), LA21(99), W[illegible], WHA21(99), [illegible] ,
     8H22(99), HA22(99), L22(99), LA22(99), W[illegible], WHA22(99), [illegible] ,
     9H011    , HA011   , L011   , LA011   , W[illegible], W[illegible], [illegible],
     1H012    , HA012   , L012   , LA012   , W[illegible], W[illegible], [illegible],
     2H021    , HA021   , L021   , LA021   , W[illegible], W[illegible], [illegible],
     3H022    , HA022   , L022   , LA022   , W[illegible], W[illegible], [illegible],
     4[illegible]   , [illegible]   , GL11   , GLA11   , [illegible]  , [illegible]  , [illegible],
     5[illegible]   , [illegible]   , GL12   , GLA12   , [illegible]  , [illegible]  , [illegible],
     6[illegible]   , [illegible]   , GL21   , GLA21   , [illegible]  , [illegible]  , [illegible],
     7[illegible]   , [illegible]   , GL22   , GLA22   , [illegible]  , [illegible]  , [illegible],
     8[illegible],SOA1,SOA2
      DIMENSION [illegible],W2(65),X1(40),W1(40)
C*****VARIAVEIS     *************
C      MAXIMUM [illegible]
C      MAXIMUM [illegible]
C      MAXIMUM [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      EPS=1.D-12
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
C*****INPUT********
      [illegible]
 1001 FORMAT([illegible])
      [illegible]
      [illegible]
 1002 F[illegible]
C*****[illegible]**********
      PI=3.[illegible]
      S=[illegible]
      S1=1.[illegible]
      C11=S11/[illegible]
      C12=S12/[illegible]
      C21=S21/[illegible]
      C22=S22/[illegible]
      C=C11*C22-C21*C12
      WRITE(6,1007)[illegible],S2,S11,S12,[illegible],C11,C12,C21,C22,S,S1
 1007 FORMAT(//[illegible],'DATA',[illegible],//[illegible],'S1,S2,S11,S12,S21,S22',[illegible]
     *//[illegible],'C11,C12,C21,C22,S,S1',[illegible]15.[illegible])
      DO 20 I=1,N[illegible]
      X1(I)=-X1(N+1-I)
   20 W1(I)= W1(N+1-I)
      DO 21 I=1,M[illegible]
      X2(I)=-X2(M+1-I)
   21 W2(I)=W2(M+1-I)
```

```
      DO 22 I=1,N
      X(I)=S1/2.D0*(X1(I)+1.D0)
   22 W(I)=S1/2.D0*W1(I)
      DO 23 I=1,M
      X(N+I)=(1.D0-S1)*X2(I)/2.D0+(1.D0+S1)/2.D0)
   23 W(N+I)=(1.D0-S1)/2.D0*W2(I)
      WRITE(6,1013)N,M,(X(I),W(I),I=1,NM)
 1013 FORMAT(//10X,'QUADRATURE',2I5,//(15X,2F25.15))
C*****TESTE DAS QUADRATURAS ********
      DO 26 I=1,IL
      SUM=0.D0
      DO 24 J=1,NM
   24 SUM=SUM+X(J)**(I-1)*W(J)
   26 WRITE(6,1015)I,SUM
 1015 FORMAT(10X,I5,F20.15)
C*****ITERAÇÃO PARA P1 E P2 ********
      DO 100 IPP=1,9
      READ(5,1003) Z0(1),P1,P2
 1003 FORMAT(F25.15,2F5.2)
      B12=C12*P2
      B11=C11*P1
      B21=C21*P1
      B22=C22*P2
      G11=S    -2.D0*C11
      G12=     -2.D0*C12
      G21=     -2.D0*C21
      G22=1.[illegible]-2.D0*C22
      A11=B11*G11+B12*G21
      A12=B11*G12+B12*G22
      A21=B21*G11+B22*G21
      A22=B21*G12+B22*G22
      A=A11*A22-A21*A12
      AA11=B11*G11+B21*G12
      AA12=B11*G21+B21*G22
      AA21=B12*G11+B22*G12
      AA22=B12*G21+B22*G22
      WRITE(6,1011)P1,P2
 1011 FORMAT(//10X,120('*'),//10X,'P1,P2',2F10.3)
      WRITE(6,1009)(I, Z0(I),I=1,KP)
 1009 FORMAT(//15X,'AUTO-VALOR DISCRETO',I5,F20.15)
C*****TESTE DOS AUTO-VALORES *******
      DO 28 I=1,KP
      Z1=Z0(I)-1.D-12
      Z2=Z0(I)+1.D-12
      CALL LAMBDA(Z1)
      EZ1=EMOD
      CALL LAMBDA(Z0(I))
      EZ=EMOD
      CALL LAMBDA(Z2)
      EZ2=EMOD
   28 WRITE(6,1016)EZ1,EZ,EZ2
 1016 FORMAT(//15X,'TESTE DOS AUTO-VALORES',3D[illegible].3,//)
C*****VETORES DE NORMALIZAÇÃO *********
      DO 31 I=1,KM
   31 CALL VECT(X(I),I,1)
      WRITE(6,2002)
 2002 FORMAT(/10X,'VETORES DE NORMALIZAÇÃO',/)
```

```
      WRITE(6,2010)(V11(I),V12(I),V21(I),V22(I),I=1,N)
      WRITE(6,2010)(V31(I),V32(I),U21(I),U22(I),I=1,M)
 2010 FORMAT(10X,4E16.3)
      DO 32 I=1,KP
   32 CALL VECT(ZU(I),I,1)
      WRITE(6,2010)(U1(I),U2(I),UA1(I),UA2(I),I=1,KP)
C*****INTEGRAIS DE NORMALIZAÇAO *******
      DO 40 I=1,NM
   40 CALL FNORM(X(I),I,1)
      WRITE(6,2011)
 2011 FORMAT(/10X,'INTEGRAIS DE NORMALIZAÇÃO',/)
      WRITE(6,2010)(CN(I),I=1,NM)
      DO 42 I=1,KP
   42 CALL FNORM(ZU(I),I,1)
      WRITE(6,2010)(UN(I),I=1,KP)
C*****LAMBDA    ******
      WRITE(6,2013)
 2013 FORMAT(/10X,'LAMBDA',/)
      DO 36 I=1,NM
      CALL LAMBDA(X(I))
   36 WRITE(6,2015)X(I),LM011,LM012,LM021,LM022,LMDD
 2015 FORMAT(10X,F10.5,5D20.5)
C*****MATRIZES H E L    ********
      CALL HMATRX
      DO 43 I=1,KP
      DO 43 II=1,2
      Z=-ZU(I)
      CALL SH(Z,II,1)
      SDD=SD11*SD22-SD12*SD21
   43 WRITE(6,1016)SD11,SD12,SD21,SD22,SDD
 1016 FORMAT(/10X,'DETERMINANT H(-NYU-I)',5D15.3)
      DO 45 I=1,2
      IF(I.EQ.1)WRITE(6,1020)
 1020 FORMAT(/10X,'MATRIZ H',/)
      IF(I.EQ.2)WRITE(6,1022)
 1022 FORMAT(/10X,'MATRIZ H ADJUNTA',/)
      DO 45 II=1,10
      FI=II
      U=0.100*FI
      CALL SH(U,I,0)
   45 WRITE(6,1024)U,GH11,GH12,GH21,GH22
 1024 FORMAT(10X,F10.5,4F20.15)
      WRITE(6,2012)
 2012 FORMAT(/10X,'TESTE DE SH',/)
      DO 120 I=1,2
      CALL SH (X(NM),I,0)
  120 WRITE(6,1024) U,GH11,GH12,GH21,GH22
      DO 130 IH=1,2
      WRITE(6,2002)
 2002 FORMAT(/10X,'EQUACAO INTEGRAL SINGULAR DE H(A)',//15X,
     1              'NYU',12X,'LE',27X,'LD',27X,'DIF',/)
      DO 122 I=1,21
      FI=I
      U=0.0500*FI
      IF(I.EQ.20) U=0.6500
      IF(I.EQ.21) U=0.7100
  122 CALL SINGH(U,0,IH)
```

```
      WRITE(6,2004)
 2004 FORMAT(/10X,'MOMENTO',4X,'LE',27X,'LD',27X,'DIF',/)
      DO 124 I=1,11
  124 CALL SIGMA(C,I,IH)
  130 CONTINUE
C*****MATRIZES OMEGA   *******
      DO 44 I=1,KP
      II=NM+I
      CALL SOMA(U(I),II,I)
   44 CALL SOMA(ZU(I),II,I)
      DO 46 I=1,NM
      CALL SOMA(X(I),I,I)
   46 CALL SOMA(X(I),I,I)
C************PROBLEMA DE MILNE************E
      WRITE(6,2020)
 2020 FORMAT(/10X,'PROBLEMAS PROPÓSTOS',50(1H*))
C*****COEFICIENTES DISCRETOS E CONTINUOS *******
      DO 50 I=1,KP
      I1=NM+I
      I2=NM+I
      CALL SOD(ZU(I),ZU(I),I1,I2)
      UA(I)=-ZU(I)*ZU(I)/(ZU(I)+ZU(I))/DN(I)*((UA1(I)*SO11+UA2(I)*SO21)
     1*U1(I)+(UA1(I)*SO12+UA2(I)*SO22)*U2(I))
   50 WRITE(6,1017)I,UA(I)
 1017 FORMAT(//10X,'COEFICIENTE DISCRETO',I3,D25.12)
      WRITE(6,1019)
 1019 FORMAT(//10X,'COEFICIENTE CONTÍNUO,X,A11,A12',//)
      DO 52 I=1,N
      CALL SOD(X(I),ZU(I),I,I2)
      CA1(I)=-X(I)*ZU(I)/(X(I)+ZU(I))/CN(I)*((V11(I)*SO11+V12(I)*SO21)
     1*U1(I)+(V11(I)*SO12+V12(I)*SO22)*U2(I))
      CA2(I)=-X(I)*ZU(I)/(X(I)+ZU(I))/CN(I)*((V21(I)*SO11+V22(I)*[illegible])
     1*U1(I)+(V21(I)*SO12+V22(I)*SO22)*U2(I))
   52 WRITE(6,1021)X(I),CA1(I),CA2(I)
 1021 FORMAT(5X,F15.10,2D26.15)
      DO 54 I=1,M
      II=N+I
      CALL SOD(X(II),ZU(I),II,I2)
      CA3(I)=-X(II)*ZU(I)/(X(II)+ZU(I))/CN(II)*((V31(I)*SO11+V32(I)
     1*SO21)*U1(I)+(V31(I)*SO12+V32(I)*SO22)*U2(I))
   54 WRITE(6,1021)X(II),CA3(I)
C*****TESTE DOS COEFICIENTES*****
      WRITE(6,1023)
 1023 FORMAT(//10X,'MOMENTOS DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO,DE CADA PROBLEMA',
     1//12X,'MOMENTO',6X,'LE1',11X,'LD1',11X,'DIF1',11X,'LE2',11X,'LD2',
     111X,'DIF2')
      DO 56 I=1,11
      J=I-1
   56 CALL CHECK(J)
C*****DISTRIBUIÇÃO DE FLUXO ANGULAR  ******
      TAU(1)=[illegible]
      TAU(2)=[illegible]
      TAU(3)=1.[illegible]
      TAU(4)=2.[illegible]
      TAU(5)=5.[illegible]
      TAU(6)=1.[illegible]
      TAU(7)=1.[illegible]
```

```
      TAU(8)=2.01
      WRITE(6,1025)
 1025 FORMAT(//10X,'DISTRIBUIÇÃO FLUXO ANGULAR',//15X,'X',8X,'MYU',10X,
     1'FLUX1',20X,'FLUX2',/)
      DO 60 I=1,8
      Z=TAU(I)
      IU=21
      IF(I.EQ.1) IU=43
      DO 60 J=1,IU
      FJ=J-1
      U=0.100*FJ-1.D0
      IF(I.EQ.1) U=0.050D*FJ-1.D0
      IF(I.EQ.1.AND.J.EQ.42)U=0.99D0
      IF(I.EQ.1.AND.J.EQ.43)U=0.999D0
      CALL FLUXM(Z,U,FLUX1,FLUX2)
      IF(J.EQ.1) FLX1=FLUX1
      IF(J.EQ.1) FLX2=FLUX2
      FLX3=FLUX1/FLX1
      FLX4=FLUX2/FLX2
   60 WRITE(6,1027)Z,U,FLUX1,FLUX2,FLX3,FLX4
 1027 FORMAT(1X,2F10.5,2E25.15,2F15.10)
C*****DISTRIBUIÇÃO DA DENSIDADE ********
      WRITE(6,1029)
 1029 FORMAT(//10X,'DISTRIBUIÇÃO DO FLUXO ESCALAR',//12X,'X',7X,'FLUX-1'
     1,11X,'FLUX-1-ASSI',24X,'FLUX-2',11X,'FLUX-2-ASSI',/)
      DO 62 I=1,22
      Z=I-2
      IF(I.EQ.1)Z=0.00
      IF(I.EQ.2)Z=0.500
      CALL DENSM(Z,DEN1,DEN2,DAS1,DAS2)
      DR1=DAS1/DEN1
      DR2=DAS2/DEN2
   62 WRITE(6,1031)Z,DEN1,DAS1,DR1,DEN2,DAS2,DR2
 1031 FORMAT(1X,F6.2,6F17.12)
C*****DISTRIBUIÇÃO DA CORRENTE  *******
      WRITE(6,1033)
 1033 FORMAT(/10X,'DISTRIBUIÇÃO DA CORRENTE',/)
 10   DO 64 I=1,22
      Z=I-2
      IF(I.EQ.1)Z=0.00
      IF(I.EQ.2)Z=0.500
      CALL CORRM(Z,COR1,COR2)
   64 WRITE(6,1032)Z,COR1,COR2
 1032 FORMAT(1X,F10.5,2D25.15)
C*****DISTANCIA EXTRAPOLADA PROBLEMA DE MILNE******
      IF(KP.EQ.1)DIS1=-Z0(1)/2.D0*DLOG(-DA(1))
      DIS2=DIS1
      WRITE(6,1035)DIS1,DIS2
 1035 FORMAT(/10X,'DISTANCIA EXTRAPOLADA',//15X,2D25.12)
C*****COEFICIENTES,CALCULO TOMANDO-SE O LIMITE ANALITICAMENTE NA EQUAÇÃO
C                     ( 4-4.1-4.5.6  PROBLEMA DE MILNE*****
      WRITE(6,1037)
 1037 FORMAT(/10X,'COEFICIENTES CONTINUOS',/)
      J=NM+1
      DO 70 I=1,50
      FI=I
      U=0.020D0*FI
```

```
[illegible]
      CALL [illegible]
      CALL S[illegible](U,ZU(I),U,J)
      CALL [illegible]INM(U,U,U)
      IF(U.GT.S)GO TO 60
      A11U=-U*ZU(I)/(U+ZU(I))/CNZ*((SV11*SD11+SV12*SD21)*U1(I)
     1+(SV11*SD12+SV12*SD22)*U2(I))
      A12U=-U*ZU(I)/(U+ZU(I))/CNZ*((SV21*SD11+SV22*SD21)*U1(I)
     1+(SV21*SD12+SV22*SD22)*U2(I))
      WRITE(6,1032)U,A11U,A12U
      GO TO 70
   60 A2U=-U*ZU(I)/(U+ZU(I))/CNZ*((SUA1*SD11+SUA2*SD21)*U1(I)
     1+(SUA1*SD12+SUA2*SD22)*U2(I))
      WRITE(6,1032)U,A2U
   70 CONTINUE
      CALL CHECK2
C*****NORMALIZAÇÃO PARA A FONTE NO INFINITO,PROBLEMA DE MILNE ****
      IF(IPP.EQ.1)Q10=1.D0
      IF(IPP.EQ.1)Q20=1.D0
      Q1=(UA1(1)*WLA11(NM+1)+UA2(1)*WLA12(NM+1))/DN(1)/Q10
      Q2=(UA1(1)*WLA21(NM+1)+UA2(1)*WLA22(NM+1))/DN(1)/Q20
      IF(IPP.EQ.1)Q10=Q1
      IF(IPP.EQ.1)Q20=Q2
      WRITE(6,1039) Q1,Q2
 1039 FORMAT(/10X,'FATORES DE NORMALIZAÇÃO DA FONTE,MILNE',//15X,2D25.15
     1)
C*****TESTE DO FLUXO EMERGENTE,MILNE  *****
      Z=ZU(1)
      FS1=-DLOG((S*Z-1.D0)/S/Z)
      FS2=-1.D0+FS1*S*Z
      FS3=-0.5D0-S*Z*(1.D0-S*Z*FS1)
      FZ1=-DLOG((Z-1.D0)/Z)
      FZ2=-1.D0+FZ1*Z
      FZ3=-0.5D0-Z*Z*Z*FZ1
      EXP1=Z*(U1(I)*(C11*FS1+  Z*A11*FS2)+U2(I)*(C12*FS1+  Z*A12*FS2))
      EXP2=Z*(U1(I)*(C21*FZ1+  Z*A21*FZ2)+U2(I)*(C22*FZ1+  Z*A22*FZ2))
      EXC1=Z*(U1(I)*(C11*FS2+  Z*A11*FS3)+U2(I)*(C12*FS2+  Z*A12*FS3))
      EXC2=Z*(U1(I)*(C21*FZ2+  Z*A21*FZ3)+U2(I)*(C22*FZ2+  Z*A22*FZ3))
      FS1=DLOG((S*Z+1.D0)/S/Z),
      FS2=1.D0-FS1*S*Z
      FS3=0.5D0-S*Z*(1.D0-S*Z*FS1)
      FZ1=DLOG((Z+1.D0)/Z)
      FZ2=1.D0-FZ1*Z
      FZ3=0.5D0-Z*Z*Z*FZ1
      EXP1=EXP1+UA(I)*
     1      Z*(U1(I)*(C11*FS1-  Z*A11*FS2)+U2(I)*(C12*FS1-  Z*A12*FS2))
      EXP2=EXP2+UA(I)*
     1      Z*(U1(I)*(C21*FZ1-  Z*A21*FZ2)+U2(I)*(C22*FZ1-  Z*A22*FZ2))
      EXC1=EXC1+UA(I)*
     1      Z*(U1(I)*(C11*FS2-  Z*A11*FS3)+U2(I)*(C12*FS2-  Z*A12*FS3))
      EXC2=EXC2+UA(I)*
     1      Z*(U1(I)*(C21*FZ2-  Z*A21*FZ3)+U2(I)*(C22*FZ2-  Z*A22*FZ3))
      DO 74 I=1,NM
      U=X(I)
      FS1=DLOG((S*U+1.D0)/S/U)
      FS1=DLOG((S*U+1.D0)/S/U)
      FS2=1.D0-S*U*FS1
```

```
      F1=0.5*(U*S*(1.D0-S*U*FS1)
      F21=(1.D0+U*1.D0)/C)
      F22=1.D0-U*FZ1
      F23=0.5D0-C*C*U*FZ1
      IF(I.GT.N)GO TO 72
      EXF1=U*W(I)*(CA1(I)*(C11*FS1-  U*A11*FS2)
     1           +CA2(I)*(C12*FS1-  U*A12*FS2))+EXF1
      EXF2=U*W(I)*(CA1(I)*(C21*FZ1-  U*A21*FZ2)
     1           +CA2(I)*(C22*FZ1-  U*A22*FZ2))+EXF2
      EXC1=U*W(I)*(CA1(I)*(C11*FS2-  U*A11*FS3)
     1           +CA2(I)*(C12*FS2-  U*A12*FS3))+EXC1
      EXC2=U*W(I)*(CA1(I)*(C21*FZ2-  U*A21*FZ3)
     1           +CA2(I)*(C22*FZ2-  U*A22*FZ3))+EXC2
      GO TO 74
   72 J=I-N
      UW=U*W(I)*CA3(J)
      UU1=U21(J)
      UU2=U22(J)
      EXF1=UW*(UU1*(C11*FS1-  U*A11*FS2)+UU2*(C12*FS1-  U*A12*FS2))+EXF1
      EXF2=UW*(UU1*(C21*FZ1-  U*A21*FZ2)+UU2*(C22*FZ1-  U*A22*FZ2))+EXF2
      EXC1=UW*(UU1*(C11*FS2-  U*A11*FS3)+UU2*(C12*FS2-  U*A12*FS3))+EXC1
      EXC2=UW*(UU1*(C21*FZ2-  U*A21*FZ3)+UU2*(C22*FZ2-  U*A22*FZ3))+EXC2
   74 CONTINUE
      WRITE(6,1030)EXF1,EXF2,EXC1,EXC2
 1030 FORMAT(/10X,'FLUXO EMERGENTE',2D25.15,//10X,'CORRENTE EMERGENTE',
     1 2D25.15)
C*****TERMINO DO CALCULO  *******
      WRITE(6,1040)
 1040 FORMAT(/10X,'TERMINO DO CALCULO',50(1H*))
  130 CONTINUE
      STOP
      END
      SUBROUTINE FMATRX
C*****CALCULO DAS MATRIZES H E L *****
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER(I,J,K,M,N)
      COMMON/BLOCK1/N, ML, KP, M
      COMMON/BLOCK2/PI  ,EPS ,S   ,C11 ,C12 ,C21 ,C22 ,A11 ,A12 ,A21 ,
     1    A22, C   ,W   ,E11 ,E12 ,E21 ,F22 ,AA11,AA12,AA21,AA22,
     2ZA(4) , CN(4), U1(4), UA1(4), X11(40), X21(40), V31(05), U21(05),
     3TA(40), UA(4), U2(4), UA2(4), X12(40), X22(40), V32(05), U22(05),
     4CA1(40), CA2(40), CA3(05), CN(99), CN2, X(99), W(99),
     5OH11(99),HAH11(99),FL11(99),FAL11(99),WH11(99), WHA11(99), SO11,
     6OH12(99),OAH12(99),FL12(99),FAL12(99),WH12(99), WHA12(99), SO12,
     7OH21(99),OAH21(99),FL21(99),FAL21(99),WH21(99), WHA21(99), SO21,
     8OH22(99),OAH22(99),FL22(99),FAL22(99),WH22(99), WHA22(99), SO22,
     9HO11   , OAHO11  , BLO11  , HALO11  , WL11(99), WLA11(99), DEL11,
     1HO12   , OAHO12  , BLO12  , OALO12  , WL12(99), WLA12(99), DEL12,
     2HO21   , OAHO21  , BLO21  , OALO21  , WL21(99), WLA21(99), DEL21,
     3HO22   , OAHO22  , BLO22  , OALO22  , WL22(99), WLA22(99), DEL22,
     4OH11   , OHA11   , GL11   , GLA11   , LMO11   , LMA11    , DEA11,
     5OH12   , OHA12   , GL12   , GLA12   , LMO12   , LMA12    , DEA12,
     6OH21   , OHA21   , GL21   , GLA21   , LMO21   , LMA21    , DEA21,
     7OH22   , OHA22   , GL22   , GLA22   , LMO22   , LMA22    , DEA22,
     8SV11,SV12,SV21,SV22,SO1,SO2,H11,H12,H21,H22,LMOD,SI,SOA1,SOA2
      DIMENSION  D11(99),  D12(99),  D21(99), D22(99),
     1AR11(99),AAR11(99),RMY11(99),ARM11(99),CP11(99),CAP11(99),
     2AR12(99),AAR12(99),RMY12(99),ARM12(99),CP12(99),CAP12(99),
```

```
     3AR21(99),ZAR21(99),HMY21(99),ARM21(99),CP21(99),CAP21(99),
     4AR22(99),AAR22(99),HMY22(99),ARM22(99),CP22(99),CAP22(99),
     5AQ11(99),AAQ11(99), DA11(99),
     6AQ12(99),AAQ12(99), DA12(99),
     7AQ21(99),AAQ21(99), DA21(99),
     8AQ22(99),AAQ22(99), DA22(99)
      AQ11=S-2.D0*C11
      AQ12=-2.D0*C12
      AQ21=-2.D0*C21
      AQ22=1.D0-2.D0*C22
      AAQ11=S-2.D0*C11
      AAQ12=-2.D0*C21
      AAQ21=-2.D0*C12
      AAQ22=1.D0-2.D0*C22
C*****MATRIZES  V E V-ADJUNTA E INVERSAS ****
      Z11=ZNY(1)*ZNY(1)
      Z1=ZNY(1)
      Z2=0.D0
      V11=(C11*Z11*S*A11)*U1(1)+(C12*Z11*S*A12)*U2(1)
      V21=(C21*Z11*  A21)*U1(1)+(C22*Z11*  A22)*U2(1)
      V12=0.D0
      V22=1.D0
      IF(NP.EQ.1)GO TO 30
      Z22=ZNY(2)*ZNY(2)
      Z2=ZNY(2)
      V12=(C11*Z22*S*A11)*U1(2)+(C12*Z22*S*A12)*U2(2)
      V22=(C21*Z22*  A21)*U1(2)+(C22*Z22*  A22)*U2(2)
   30 CONTINUE
      VDET=V11*V22-V21*V12
      VI11=V22/VDET
      VI12=-V12/VDET
      VI21=-V21/VDET
      VI22=V11/VDET
      AV11=(C11*Z11*S*AA11)*UA1(1)+(C21*Z11*S*AA12)*UA2(1)
      AV21=(C12*Z11*  AA21)*UA1(1)+(C22*Z11*  AA22)*UA2(1)
      AV12=0.D0
      AV22=1.D0
      IF(NP.EQ.1)GO TO 31
      AV12=(C11*Z22*S*AA11)*UA1(2)+(C21*Z22*S*AA12)*UA2(2)
      AV22=(C12*Z22*  AA21)*UA1(2)+(C22*Z22*  AA22)*UA2(2)
   31 CONTINUE
      AVDET=AV11*AV22-AV21*AV12
      AVI11=AV22/AVDET
      AVI12=-AV12/AVDET
      AVI21=-AV21/AVDET
      AVI22=AV11/AVDET
C*****MATRIZES  R E R-ADJUNTA ****
      DO 7 I=1,ML
      PK0=Z2-F(I)
      PK1=Z1-F(I)
      PK2=1.D0-F(I)
      IF(NP.EQ.1)DEM2=1.D0
      IF(NP.EQ.2)DEM2=Z2*PK2/PK0
      AR11(I)=V11*(Z1*PK2)/PK1
      AR12(I)=V12*DEM2
      AR21(I)=V21*(Z1*PK2)/PK1
      AR22(I)=V22*DEM2
```

```
      AAK11(I)=AV11*(Z1*PK2)/PK1
      AAK12(I)=AV12*DEM2
      AAK21(I)=AV21*(Z1*PK2)/PK1
      AAK22(I)=AV22*DEM2
    7 CONTINUE
C*****MATRIZES  K E K-ADJUNTA *****
      DO 8 I=1,ML
      IF(KP.EQ.1)DEI2=1.D0
      IF(KP.EQ.2)DEI2=(Z2*X(I))/(Z2*(1.D0+X(I)))
      DEI1=(Z1*X(I))/(Z1*(1.D0+X(I)))
      RMY11(I)=DEI1*V111
      RMY12(I)=DEI1*V112
      RMY21(I)=DEI2*V121
      RMY22(I)=DEI2*V122
      AKM11(I)=DEI1*AV111
      AKM12(I)=DEI1*AV112
      AKM21(I)=DEI2*AV121
      AKM22(I)=DEI2*AV122
    8 CONTINUE
C*****VALORES INICIAIS ****
      DO 10 I=1,ML
      BM11(I)=1.D0
      BM12(I)=0.D0
      BM21(I)=0.D0
      BM22(I)=1.D0
      BAM11(I)=1.D0
      BAM12(I)=0.D0
      BAM21(I)=0.D0
      BAM22(I)=1.D0
   10 CONTINUE
      BM011=1
      BM012=0.D0
      BM021=0.D0
      BM022=1.D0
      BAM011=1
      BAM012=0.D0
      BAM021=0.D0
      BAM022=1.D0
      BL011=0.D0
      BL012=0.D0
      BL021=0.D0
      BL022=0.D0
      BAL011=0.D0
      BAL012=0.D0
      BAL021=0.D0
      BAL022=0.D0
C*****MATRIZES  L E L-ADJUNTA *******
      DO 23 I=1,ML
      FL11(I)=X(I)*5
      FL12(I)=0.D0
      FL21(I)=0.D0
      FL22(I)=X(I)
      FAL11(I)=X(I)*.
      FAL12(I)=0.D0
      FAL21(I)=0.D0
      FAL22(I)=X(I)
   23 CONTINUE
```

```
C*****ITERACAO    ******
      NI=20
      II=1
C*****MATRIZ P    *****
   91 CONTINUE
      BC1=BHO11*S*A11+BHO21*A21
      BC2=BHO11*S*A12+BHO21*A22
      BC3=BHO12*S*A11+BHO22*A21
      BC4=BHO12*S*A12+BHO22*A22
      DO 60 I=1,ML
      ZN1=(ZNY(1)-1.D0)/(ZNY(1)+X(I))
      CP11(I)=ZN1*((1.D0+Z11*BC1)*U1(1)+Z11*BC2*U2(1))
      CP21(I)=ZN1*(Z11*BC3*U1(1)+(1.D0+Z11*BC4)*U2(1))
      CP12(I)=0.D0
      CP22(I)=0.D0
      IF(KP.EQ.1) GO TO 70
      ZN2=(ZNY(2)-1.D0)/(ZNY(2)+X(I))
      CP12(I)=ZN2*((1.D0+Z22*BC1)*U1(2)+Z22*BC2*U2(2))
      CP22(I)=ZN2*(Z22*BC3*U1(2)+(1.D0+Z22*BC4)*U2(2))
   70 CONTINUE
   60 CONTINUE
C*****MATRIZ Q   ****
      BC1=BLO11*S*A11+BLO21*A21
      BC2=BLO11*S*A12+BLO21*A22
      BC3=BLO12*S*A11+BLO22*A21
      BC4=BLO12*S*A12+BLO22*A22
      DO 80 I=1,ML
      ZN1=(ZNY(1)-1.D0)/(ZNY(1)+X(I))
      AQ11(I)=ZN1*((Z1*AG11+Z11*BL1)*U1(1)+(Z1*AG12+Z11*BL2)*U2(1))
      AQ21(I)=ZN1*((Z1*AG21+Z11*BL3)*U1(1)+(Z1*AG22+Z11*BL4)*U2(1))
      AQ12(I)=0.D0
      AQ22(I)=0.D0
      IF(KP.EQ.1)GO TO 90
      ZN2=(ZNY(2)-1.D0)/(ZNY(2)+X(I))
      AQ12(I)=ZN2*((Z2*AG11+Z22*BL1)*U1(2)+(Z2*AG12+Z22*BL2)*U2(2))
      AQ22(I)=ZN2*((Z2*AG21+Z22*BL3)*U1(2)+(Z2*AG22+Z22*BL4)*U2(2))
   90 CONTINUE
   80 CONTINUE
C*****MATRIZ S    *****
      CK11=1.D0-C11*BHO11-C12*BHO12
      CK12=-C11*BHO21-C12*BHO22
      CK21=-C21*BHO11-C22*BHO12
      CK22=1.D0-C21*BHO21-C22*BHO22
      DO 91 I=1,ML
      F11=1.D0-X(I)*B11*BLO11-X(I)*B12*BLO12
      F12=-X(I)*B11*BLO21-X(I)*B12*BLO22
      F21=-X(I)*B21*BLO11-X(I)*B22*BLO12
      F22=1.D0-X(I)*B21*BLO21-X(I)*B22*BLO22
      FDE=F11*F22-F21*F12
      G11=F22/FDE
      G12=-F12/FDE
      G21=-F21/FDE
      G22=F11/FDE
      GG1=CK11*G11+CK12*G21
      GG2=CK11*G12+CK12*G22
      GG3=CK21*G11+CK22*G21
      GG4=CK21*G12+CK22*G22
```

```
      D11(I)=GG1*B11+GG2*B21
      D12(I)=GG1*B12+GG2*B22
      D21(I)=GG3*B11+GG4*B21
      D22(I)=GG3*B12+GG4*B22
   91 CONTINUE
C*****A MATRIZ H-ADJUNTA  *****
      DELTA2=0.D0
      DO 34 I=1,ML
      PK7=X(I)*X(I)
      S11=0.D0
      S12=0.D0
      S21=0.D0
      S22=0.D0
      W11=0.D0
      W12=0.D0
      W21=0.D0
      W22=0.D0
      DO 35 J=1,ML
      TH=1.D0
      IF(J.GT.N)TH=0.D0
      PK6=W(J)/(X(J)*X(I))
      S11=S11+(BH11(J)*TH*AK11(J)+BH21(J)*AK21(J))*PK6
      S12=S12+(BH11(J)*TH*AK12(J)+BH21(J)*AK22(J))*PK6
      S21=S21+(BH12(J)*TH*AK11(J)+BH22(J)*AK21(J))*PK6
      S22=S22+(BH12(J)*TH*AK12(J)+BH22(J)*AK22(J))*PK6
      W11=W11+(FL11(J)*TH*AK11(J)+FL21(J)*AK21(J))*PK6
      W12=W12+(FL11(J)*TH*AK12(J)+FL21(J)*AK22(J))*PK6
      W21=W21+(FL12(J)*TH*AK11(J)+FL22(J)*AK21(J))*PK6
      W22=W22+(FL12(J)*TH*AK12(J)+FL22(J)*AK22(J))*PK6
   35 CONTINUE
      SP11=S11+CP11(I)
      SP12=S12+CP12(I)
      SP21=S21+CP21(I)
      SP22=S22+CP22(I)
      SA11=X(I)*(C11*SP11+C12*SP21)
      SA12=X(I)*(C11*SP12+C12*SP22)
      SA21=X(I)*(C21*SP11+C22*SP21)
      SA22=X(I)*(C21*SP12+C22*SP22)
      SR11=SA11*RMY11(I)+SA12*RMY21(I)
      SR12=SA11*RMY12(I)+SA12*RMY22(I)
      SR21=SA21*RMY11(I)+SA22*RMY21(I)
      SR22=SA21*RMY12(I)+SA22*RMY22(I)
      WP11=W11+AW11(I)
      WP12=W12+AW12(I)
      WP21=W21+AW21(I)
      WP22=W22+AW22(I)
      WA11=PK7*(D11(I)*WP11+D12(I)*WP21)
      WA12=PK7*(D11(I)*WP12+D12(I)*WP22)
      WA21=PK7*(D21(I)*WP11+D22(I)*WP21)
      WA22=PK7*(D21(I)*WP12+D22(I)*WP22)
      WR11=WA11*RMY11(I)+WA12*RMY21(I)
      WR12=WA11*RMY12(I)+WA12*RMY22(I)
      WR21=WA21*RMY11(I)+WA22*RMY21(I)
      WR22=WA21*RMY12(I)+WA22*RMY22(I)
      HA11=1.D0-SR11+WR11
      HA12=-SR12+WR12
      HA21=-SR21+WR21
```

```
      BB22=1.D0-SR22*QR22
      BDET=BB11*BB22-BB21*BB12
      BAB11=BB22/BDET
      BAB12=-BB12/BDET
      BAB21=-BB21/BDET
      BAB22=BB11/BDET
C*****TESTE DA CONVERGENCIA   ******
      DELTA1=DABS(BAB11-BAH11(I))+DABS(BAB12-BAH12(I))
     * +DABS(BAB21-BAH21(I))+DABS(BAB22-BAH22(I))
      IF(DELTA1.GT.DELTA2)DELTA2=DELTA1
      BAH11(I)=BAB11
      BAH12(I)=BAB12
      BAH21(I)=BAB21
      BAH22(I)=BAB22
   34 CONTINUE
C*****O MOMENTO DA MATRIZ H-ADJUNTA  ****
      BAHO11=0.D0
      BAHO12=0.D0
      BAHO21=0.D0
      BAHO22=0.D0
      DO 26 I=1,ML
      TH=1.D0
      IF(I.GT.N)TH=0.D0
      PK11=W(I)
      BAHO11=BAHO11+PK11*TH*BAH11(I)
      BAHO12=BAHO12+PK11*TH*BAH12(I)
      BAHO21=BAHO21+PK11*BAH21(I)
   26 BAHO22=BAHO22+PK11*BAH22(I)
C*****MATRIZ L-ADJUNTA    *****
      DO 38 I=1,ML
      F11=SI-X(I)*B11*BLO11-X(I)*B12*BLO12
      F12=-X(I)*B11*BLO21-X(I)*B12*BLO22
      F21=-X(I)*B21*BLO11-X(I)*B22*BLO12
      F22=1.D0-X(I)*B21*BLO21-X(I)*B22*BLO22
      FDE=F11*F22-F21*F12
      G11=F22/FDE
      G12=-F12/FDE
      G21=-F21/FDE
      G22=F11/FDE
      GG1=CK11*G11+CK12*G21
      GG2=CK11*G12+CK12*G22
      GG3=CK21*G11+CK22*G21
      GG4=CK21*G12+CK22*G22
      CAL11=X(I)*(BAH11(I)*GG1+BAH12(I)*GG3)
      CAL12=X(I)*(BAH11(I)*GG2+BAH12(I)*GG4)
      CAL21=X(I)*(BAH21(I)*GG1+BAH22(I)*GG3)
      CAL22=X(I)*(BAH21(I)*GG2+BAH22(I)*GG4)
      DELTA1=DABS(CAL11-FAL11(I))+DABS(CAL12-FAL12(I))
     * +DABS(CAL21-FAL21(I))+DABS(CAL22-FAL22(I))
      IF(DELTA1.GT.DELTA2)DELTA2=DELTA1
      FAL11(I)=CAL11
      FAL12(I)=CAL12
      FAL21(I)=CAL21
   38 FAL22(I)=CAL22
C*****O MOMENTO DA MATRIZ L-ADJUNTA   *****
      BALO11=0.D0
      BALO12=0.D0
```

```
      BALO21=0.D0
      BALO22=0.D0
      DO 39 I=1,ML
      TH=1.D0
      IF(I.GT.N)TH=0.D0
      PK11=W(I)
      BALO11=BALO11+PK11*TH*FAL11(I)
      BALO12=BALO12+PK11*TH*FAL12(I)
      BALO21=BALO21+PK11*FAL21(I)
   39 BALO22=BALO22+PK11*FAL22(I)
C*****MATRIZES P-ADJUNTAS    *****
      BCA1=BAHO11*S*AA11+BAHO21*AA21
      BCA2=BAHO11*S*AA12+BAHO21*AA22
      BCA3=BAHO12*S*AA11+BAHO22*AA21
      BCA4=BAHO12*S*AA12+BAHO22*AA22
      DO 9 I=1,ML
      ZN1=(ZNY(1)-1.D0)/(ZNY(1)+X(I))
      CAP11(I)=ZN1*((1.D0+Z11*BCA1)*UA1(1)+Z11*BCA2*UA2(1))
      CAP21(I)=ZN1*(Z11*BCA3*UA1(1)+(1.D0+Z11*BCA4)*UA2(1))
      CAP12(I)=0.D0
      CAP22(I)=0.D0
      IF(KP.EQ.1)GO TO 32
      ZN2=(ZNY(2)-1.D0)/(ZNY(2)+X(I))
      CAP12(I)=ZN2*((1.D0+Z22*BCA1)*UA1(2)+Z22*BCA2*UA2(2))
      CAP22(I)=ZN2*(Z22*BCA3*UA1(2)+(1.D0+Z22*BCA2)*UA2(2))
   32 CONTINUE
    9 CONTINUE
C*****MATRIZES Q-ADJUNTAS    ****
      BLA1=BALO11*S*AA11+BALO21*AA21
      BLA2=BALO11*S*AA12+BALO21*AA22
      BLA3=BALO12*S*AA11+BALO22*AA21
      BLA4=BALO12*S*AA12+BALO22*AA22
      DO 17 I=1,ML
      ZN1=(ZNY(1)-1.D0)/(ZNY(1)+X(I))
      AAQ11(I)=ZN1*((Z1*AG11+Z11*BLA1)*UA1(1)+(Z1*AG21+Z11*BLA2)*UA2(1))
      AAQ21(I)=ZN1*((Z1*AG12+Z11*BLA3)*UA1(1)+(Z1*AG22+Z11*BLA4)*UA2(1))
      AAQ12(I)=0.D0
      AAQ22(I)=0.D0
      IF(KP.EQ.1)GO TO 33
      ZN2=(ZNY(2)-1.D0)/(ZNY(2)+X(I))
      AAQ12(I)=ZN2*((Z2*AG11+Z22*BLA1)*UA1(2)+(Z2*AG21+Z22*BLA2)*UA2(2))
      AAQ22(I)=ZN2*((Z2*AG12+Z22*BLA3)*UA1(2)+(Z2*AG22+Z22*BLA4)*UA2(2))
   33 CONTINUE
   17 CONTINUE
C*****MATRIZES S-ADJUNTAS    ****
      DK11=1.D0-C11*BAHO11-C21*BAHO12
      DK12=-C11*BAHO21-C21*BAHO22
      DK21=-C12*BAHO11-C22*BAHO12
      DK22=1.D0-C12*BAHO21-C22*BAHO22
      DO 20 I=1,ML
      FG11=S1-X(I)*B11*BALO11-X(I)*B21*BALO21
      FG12=-X(I)*B11*BALO21-X(I)*B21*BALO22
      FG21=-X(I)*B12*BALO11-X(I)*B22*BALO12
      FG22=1.D0-X(I)*B12*BALO21-X(I)*B22*BALO22
      FGD=FG11*FG22-FG21*FG12
      GG11=FG22/FGD
      GG12=-FG12/FGD
```

```
      GG21=-FG21/FCD
      GG22=FG11/FCD
      GH1=GK11*GG11+GK12*GG21
      GH2=GK11*GG12+GK12*GG22
      GH3=GK21*GG11+GK22*GG21
      GH4=GK21*GG12+GK22*GG22
      DA11(I)=GH1*B11+GH2*B12
      DA12(I)=GH1*B21+GH2*B22
      DA21(I)=GH3*B11+GH4*B12
      DA22(I)=GH3*B21+GH4*B22
   20 CONTINUE
C**** MATRIZ H    *****
      DO 27 I=1,ML
      PK7=X(I)*X(I)
      S11=0.D0
      S12=0.D0
      S21=0.D0
      S22=0.D0
      W11=0.D0
      W12=0.D0
      W21=0.D0
      W22=0.D0
      DO 28 J=1,ML
      TH=1.D0
      IF(J.GT.N)TH=0.D0
      PK5=1.D0
      PK6=X(J)/(X(J)+X(I))
      S11=S11+PK5*(BAH11(J)*TH*AAK11(J)+BAH21(J)*AAK21(J))*PK6
      S12=S12+PK5*(BAH11(J)*TH*AAK12(J)+BAH21(J)*AAK22(J))*PK6
      S21=S21+PK5*(BAH12(J)*TH*AAK11(J)+BAH22(J)*AAK21(J))*PK6
      S22=S22+PK5*(BAH12(J)*TH*AAK12(J)+BAH22(J)*AAK22(J))*PK6
      W11=W11+PK5*(FAL11(J)*TH*AAK11(J)+FAL21(J)*AAK21(J))*PK6
      W12=W12+PK5*(FAL11(J)*TH*AAK12(J)+FAL21(J)*AAK22(J))*PK6
      W21=W21+PK5*(FAL12(J)*TH*AAK11(J)+FAL22(J)*AAK21(J))*PK6
      W22=W22+PK5*(FAL12(J)*TH*AAK12(J)+FAL22(J)*AAK22(J))*PK6
   28 CONTINUE
      SP11=S11+CAP11(I)
      SP12=S12+CAP12(I)
      SP21=S21+CAP21(I)
      SP22=S22+CAP22(I)
      SA11=X(I)*(C11*SP11+C21*SP21)
      SA12=X(I)*(C11*SP12+C21*SP22)
      SA21=X(I)*(C12*SP11+C22*SP21)
      SA22=X(I)*(C12*SP12+C22*SP22)
      SH11=SA11*AHP11(I)+SA12*AHP21(I)
      SH12=SA11*AHP12(I)+SA12*AHP22(I)
      SH21=SA21*AHP11(I)+SA22*AHP21(I)
      SH22=SA21*AHP12(I)+SA22*AHP22(I)
      WP11=W11+AAG11(I)
      WP12=W12+AAG12(I)
      WP21=W21+AAG21(I)
      WP22=W22+AAG22(I)
      WA11=PK7*(DA11(I)*WP11+DA12(I)*WP21)
      WA12=PK7*(DA11(I)*WP12+DA12(I)*WP22)
      WA21=PK7*(DA21(I)*WP11+DA22(I)*WP21)
      WA22=PK7*(DA21(I)*WP12+DA22(I)*WP22)
      WH11=WA11*AHP11(I)+WA12*AHP21(I)
```

```
      GH12=GA11*ARM12(I)+GA12*ARM22(I)
      GH21=GA21*ARM11(I)+GA22*ARM21(I)
      GH22=GA21*ARM12(I)+GA22*ARM22(I)
      GD11=1.D0-SH11*GR11
      GD12=-SH12*GR12
      GD21=-SH21*GR21
      GD22=1.D0-SH22*GR22
      BADET=GD11*GD22-GD21*GD12
      BHL11=GD22/BADET
      BHL12=-GD12/BADET
      BHL21=-GD21/BADET
      BHL22=GD11/BADET
C**** TESTE DA CONVERGÊNCIA  ****
      DELTA1=DABS(BHL11-BH11(I))+DABS(BHL12-BH12(I))+DABS(BHL21-BH21(I))
     *+DABS(BHL22-BH22(I))
      IF(DELTA1.GT.DELTA2)DELTA2=DELTA1
      BH11(I)=BHL11
      BH12(I)=BHL12
      BH21(I)=BHL21
      BH22(I)=BHL22
   27 CONTINUE
C**** O MOMENTO DA MATRIZ H   ***
      BHO11=0.D0
      BHO12=0.D0
      BHO21=0.D0
      BHO22=0.D0
      DO 29 I=1,ML
      TH=1.D0
      IF(I.GT.N)TH=0.D0
      PK11=W(I)
      BHO11=BHO11+PK11*TH*BH11(I)
      BHO12=BHO12+PK11*TH*BH12(I)
      BHO21=BHO21+PK11*BH21(I)
   29 BHO22=BHO22+PK11*BH22(I)
C**** MATRIZ L     *****
      DO 30 I=1,ML
      FG11=1-X(I)*B11*BALO11-X(I)*B21*BALO12
      FG12=-X(I)*B11*BALO21-X(I)*B21*BALO22
      FG21=-X(I)*B12*BALO11-X(I)*B22*BALO12
      FG22=1.D0-X(I)*B1[illegible]*BALO21-X(I)*B22*BALO22
      FGD=FG11*FG22-F[illegible]12
      [illegible]1=FG22/FGD
      [illegible]=-FG12/F[illegible]
      [illegible]=-FG21/FGD
      [illegible]2=FG11/FGD
      GH1=DR11*GG11+DR12*GG21
      GH2=DR11*GG12+DR12*GG22
      GH3=DR21*GG11+DR22*GG21
      GH4=DR21*GG12+DR22*GG22
      CL11=X(I)*(BH11(I)*GH1+BH12(I)*GH3)
      CL12=X(I)*(BH11(I)*GH2+BH12(I)*GH4)
      CL21=X(I)*(BH21(I)*GH1+BH22(I)*GH3)
      CL22=X(I)*(BH21(I)*GH2+BH22(I)*GH4)
C**** TESTE DA CONVERGÊNCIA ****
      DELTA1=DABS(CL11-FL11(I))+DABS(CL12-FL12(I))+DABS(CL21-FL21(I))
     * +DABS(CL22-FL22(I))
      IF(DELTA1.GT.DELTA2)DELTA2=DELTA1
```

```
      FL11(I)=CL11
      FL12(I)=CL12
      FL21(I)=CL21
      FL22(I)=CL22
   36 CONTINUE
      WRITE(6,1027) IT,DELTA2
 1027 FORMAT(20X,'ITERACAO',I5,D15.3)
C**** O MOMENTO DA MATRIZ L ****
      BL011=0.D0
      BL012=0.D0
      BL021=0.D0
      BL022=0.D0
      DO 37 I=1,ML
      TH=1.D0
      IF(I.GT.N)TH=0.D0
      PKI1=W(I)
      BL011=BL011+PKI1*TH*FL11(I)
      BL012=BL012+PKI1*TH*FL12(I)
      BL021=BL021+PKI1*FL21(I)
   37 BL022=BL022+PKI1*FL22(I)
      IF(DELTA2.LT.EPS)GO TO 40
      IT=IT+1
      IF(IT.LE.NN)GO TO 41
   40 CONTINUE
      WRITE(6,1026)
 1026 FORMAT(/10X,'HA11(I)=',20X,'HA12(I)=',20X,'HA21(I)=',20X,
     * 'HA22(I)',/)
      DO 42 I=1,ML
   42 WRITE(6,2001)BAH11(I),BAH12(I),BAH21(I),BAH22(I)
 2001 FORMAT(2X,4(D26.15,2X))
      WRITE(6,1031)
 1031 FORMAT(/10X,' H11(I)=',20X,' H12(I)=',20X,' H21(I)=',20X,
     * ' H22(I)=',/)
      DO 43 I=1,ML
   43 WRITE(6,2001)BH11(I),BH12(I),BH21(I),BH22(I)
      WRITE(6,1032)
 1032 FORMAT(/10X,' L11(I)=',20X,' L12(I)=',20X,' L21(I)=',20X,
     * ' L22(I)=',/)
      DO 44 I=1,ML
   44 WRITE(6,2001)FL11(I),FL12(I),FL21(I),FL22(I)
      WRITE(6,1033)
 1033 FORMAT(/10X,'LA11(I)=',20X,'LA12(I)=',20X,'LA21(I)=',20X,
     * 'LA22(I)=',/)
      DO 45 I=1,ML
   45 WRITE(6,2001)FAL11(I),FAL12(I),FAL21(I),FAL22(I)
      WRITE(6,1034)
 1034 FORMAT(/10X,' HA011=',25X,' HA012=',25X,' HA021=',25X,' HA022=',/)
      WRITE(6,2002)BAH011,BAH012,BAH021,BAH022
 2002 FORMAT(5X,4(26.15))
      WRITE(6,1035)
 1035 FORMAT(/10X,' H011=',25X,' H012=',25X,' H021=',25X,' H022=',/)
      WRITE(6,2002)BH011,BH012,BH021,BH022
      WRITE(6,1036)
 1036 FORMAT(/10X,' L011=',25X,' L012=',25X,' L021=',25X,' L022=',/)
      WRITE(6,2002)BL011,BL012,BL021,BL022
      WRITE(6,1037)
 1037 FORMAT(/10X,' LA011=',25X,' LA012=',25X,' LA021=',25X,' LA022=',/)
```

```
      WRITE(6,2002)BALO11,BALO12,BALO21,BALO22
C**** TESTE DA EQUAÇÃO III-3.11A,B ***
      DO 46 J=1,KP
      T11=0.D0
      T12=0.D0
      T21=0.D0
      T22=0.D0
      SS11=0.D0
      SS12=0.D0
      SS21=0.D0
      SS22=0.D0
      DO 47 I=1,ML
      PK8=ZNY(J)
      PK9=PK8*PK8
      PK10=W(I)/(PK8-X(I))
      TH=1.D0
      IF(I.GT.NI)TH=0.D0
      T11=T11+PK9*EH11(I)*TH*PK10
      T12=T12+PK9*EH21(I)*PK10
      T21=T21+PK9*EH12(I)*TH*PK10
      T22=T22+PK9*EH22(I)*PK10
      SS11=SS11+PK9*EL11(I)*TH*PK10
      SS12=SS12+PK9*EL21(I)*PK10
      SS21=SS21+PK9*EL12(I)*TH*PK10
      SS22=SS22+PK9*EL22(I)*PK10
   47 CONTINUE
      W11=(C11*PK9*S*A11)*U1(J)+(C12*PK9*S*A12)*U2(J)
      W21=(C21*PK9*  A21)*U1(J)+(C22*PK9*  A22)*U2(J)
      ZZ11=PK9*(T11*W11+T12*W21)
      ZZ21=PK9*(T21*W11+T22*W21)
      WW11=(1.D0+PK9*(BHO11*S*A11+BHO21*A21))*U1(J)
     1           +PK9*(BHO11*S*A12+BHO21*A22)*U2(J)
      WW21=       PK9*(BHO12*S*A11+BHO22*A21)*U1(J)
     1     +(1.D0+PK9*(BHO12*S*A12+BHO22*A22))*U2(J)
      SZ11=PK9*(SS11*W11+SS12*W21)
      SZ21=PK9*(SS21*W11+SS22*W21)
      SW11=(PK8*(S    -2.D0*C11)+PK9*(BLO11*S*A11+BLO21*A21))*U1(J)
     1     +(PK8*(    -2.D0*C12)+PK9*(BLO11*S*A12+BLO21*A22))*U2(J)
      SW21=(PK8*(    -2.D0*C21)+PK9*(BLO12*S*A11+BLO22*A21))*U1(J)
     1     +(PK8*(1.D0-2.D0*C22)+PK9*(BLO12*S*A12+BLO22*A22))*U2(J)
      D1=DABS(ZZ11-WW11)
      D2=DABS(ZZ21-WW21)
      D3=DABS(SZ11-SW11)
      D4=DABS(SZ21-SW21)
      WRITE(6,1040)ZZ11,WW11,D1,ZZ21,WW21,D2
 1040 FORMAT(1X,'VINCULO DISCRETO SOBRE H',/(/10X,3D20.5))
      WRITE(6,1041)SZ11,SW11,D3,SZ21,SW21,D4
 1041 FORMAT(1X,'VINCULO DISCRETO SOBRE L',/(/10X,3D20.5))
   46 CONTINUE
C**** LADO DIREITO DA EQUAÇÃO III-3.12 ****
      PZ11=C11-2.D0*SI*C11*C11-2.D0*C12*C21
      PZ12=C21-2.D0*C22*C21-2.D0*SI*C11*C21
      PZ21=C12-2.D0*SI*C11*C12-2.D0*C12*C22
      PZ22=C22-2.D0*C22*C22-2.D0*SI*C21*C12
      PT11=0.D0
      PT12=0.D0
      PT21=0.D0
```

```
      P[illegible]
      P[illegible]
      P[illegible]
      P[illegible]
      P[illegible]
      PB3=2.D0/3.D0
      PB11=B11-PB3*S1*B11*B11-PB3*B12*B21
      PB12=B21-PB3*B21*B22-PB3*S1*B11*B21
      PB21=B12-PB3*S1*B11*B12-PB3*B12*B22
      PB22=B22-PB3*B22*B22-PB3*S1*B12*B21
C**** LADO ESQUERDO DA EQUAÇÃO III-3.12 ***
      PH11=0.D0
      PH12=0.D0
      PH21=0.D0
      PH22=0.D0
      PJ11=0.D0
      PJ12=0.D0
      PJ21=0.D0
      PJ22=0.D0
      PL11=0.D0
      PL12=0.D0
      PL21=0.D0
      PL22=0.D0
      PN11=0.D0
      PN12=0.D0
      PN21=0.D0
      PN22=0.D0
      DO 40 I=1,M[illegible]
      TH=1.D0
      IF(I.GT.N)TH=[illegible]
      PK12=A(I)*A(I)
      PH11=PH11+PK12*GAH11(I)*TH
      PH12=PH12+PK12*GAH12(I)
      PH21=PH21+PK12*GAH21(I)*TH
      PH22=PH22+PK12*GAH22(I)
      PJ11=PJ11+PK12*FAL11(I)*TH
      PJ12=PJ12+PK12*FAL12(I)
      PJ21=PJ21+PK12*FAL21(I)*TH
      PJ22=PJ22+PK12*FAL22(I)
      PL11=PL11+PK12*TH*EH11(I)
      PL12=PL12+PK12*TH*EH12(I)
      PL21=PL21+PK12*EH21(I)
      PL22=PL22+PK12*EH22(I)
      PN11=PN11+PK12*TH*FL11(I)
      PN12=PN12+PK12*TH*FL12(I)
      PN21=PN21+PK12*FL21(I)
      PN22=PN22+PK12*FL22(I)
   40 CONTINUE
      PA1=C11*BHC11+C21*BHC21
      PA2=C11*BHC12+C21*BHC22
      PA3=C12*BHC11+C22*BHC21
      PA4=C12*BHC12+C22*BHC22
      PE11=(PA1*C11+PA2*C12)-C11
      PE12=(PA1*C21+PA2*C22)-C21
      PE21=(PA3*C11+PA4*C12)-C12
      PE22=(PA3*C21+PA4*C22)-C22
      PG11=(BAHC11*C11+BAHC21*C12)-1.D0
```

```
PO12=BAMC11*C21+BAMC21*C22
PO21=BAMC12*C11+BAMC22*C12
PO22=(BAMC12*C21+BAMC22*C22)-1.00
PA5=C11*ELC11+C21*ELC21
PA6=C11*ELC12+C21*ELC22
PA7=C12*ELC11+C22*ELC21
PA8=C12*ELC12+C22*ELC22
PI11=PA5*B11+PA6*B12
PI12=PA5*B21+PA6*B22
PI21=PA7*B11+PA8*B12
PI22=PA7*B21+PA8*B22
PM11=-(BALC11*C11+BALC21*C12)
PM12=-(BALC11*C21+BALC21*C22)
PM21=-(BALC12*C11+BALC22*C12)
PM22=-(BALC12*C21+BALC22*C22)
PO11=PE11*PG11+PE12*PG21+PI11*PM11+PI12*PM21
PO12=PE11*PG12+PE12*PG22+PI11*PM12+PI12*PM22
PO21=PE21*PG11+PE22*PG21+PI21*PM11+PI22*PM21
PO22=PE21*PG12+PE22*PG22+PI21*PM12+PI22*PM22
PK11=-(PH11*S*B11+PH12*B12)
PK12=-(PH11*S*B21+PH12*B22)
PK21=-(PH21*S*B11+PH22*B12)
PK22=-(PH21*S*B21+PH22*B22)
PU11=(PJ11*S*B11+PJ12*B12)-1.00
PU12=PJ11*S*B21+PJ12*B22
PU21=PJ21*S*B11+PJ22*B12
PU22=(PJ21*S*B21+PJ22*B22)-1.00
PV11=PE11*PK11+PE12*PK21+PI11*PU11+PI12*PU21
PV12=PE11*PK12+PE12*PK22+PI11*PU12+PI12*PU22
PV21=PE21*PK11+PE22*PK21+PI21*PU11+PI22*PU21
PV22=PE21*PK12+PE22*PK22+PI21*PU12+PI22*PU22
PA9=B11*S*PL11+B21*PL21
PA10=B11*S*PL12+B21*PL22
PA11=B12*S*PL11+B22*PL21
PA12=B12*S*PL12+B22*PL22
PX11=PA9*C11+PA10*C12
PX12=PA9*C21+PA10*C22
PX21=PA11*C11+PA12*C12
PX22=PA11*C21+PA12*C22
PY1=B11*S*PN11+B21*PN21
PY2=B11*S*PN12+B21*PN22
PY3=B12*S*PN11+B22*PN21
PY4=B12*S*PN12+B22*PN22
PW11=(PY1*B11+PY2*B12)-B11
PW12=(PY1*B21+PY2*B22)-B21
PW21=(PY3*B11+PY4*B12)-B12
PW22=(PY3*B21+PY4*B22)-B22
PS11=PX11*PG11+PX12*PG21+PW11*PM11+PW12*PM21
PS12=PX11*PG12+PX12*PG22+PW11*PM12+PW12*PM22
PS21=PX21*PG11+PX22*PG21+PW21*PM11+PW22*PM21
PS22=PX21*PG12+PX22*PG22+PW21*PM12+PW22*PM22
PY11=PX11*PK11+PX12*PK21+PW11*PU11+PW12*PU21
PY12=PX11*PK12+PX12*PK22+PW11*PU12+PW12*PU22
PY21=PX21*PK11+PX22*PK21+PW21*PU11+PW22*PU21
PY22=PX21*PK12+PX22*PK22+PW21*PU12+PW22*PU22
WRITE(6,1043)PO11,PO12,PV11,PV12,PO21,PO22,PV21,PV22,PS11,PS12,
*             PY11,PY12,PS21,PS22,PY21,PY22
```

```
1043 FORMAT(/10X,'RELACAO DE MOMENTO,LE',//(10X,4D15.3))
     WRITE(6,1045)PZ11,PZ12,PT11,PT12,PZ21,PZ22,PT21,PT22,PW11,PW12,
    *             PB11,PB12,PW21,PW22,PB21,PB22
1045 FORMAT(/10X,'RELAÇÃO DE MOMENTO,LD',//(10X,4D15.3))
     F1=DABS(PU11-PZ11)
     F2=DABS(PU12-PZ12)
     F3=DABS(PU21-PZ21)
     F4=DABS(PU22-PZ22)
     F4=DABS(PU22-PZ22)
     F5=DABS(PV11-PT11)
     F6=DABS(PV12-PT12)
     F7=DABS(PV21-PT21)
     F8=DABS(PV22-PT22)
     G1=DABS(PS11-PW11)
     G2=DABS(PS12-PW12)
     G3=DABS(PS21-PW21)
     G4=DABS(PS22-PW22)
     G5=DABS(PY11-PB11)
     G6=DABS(PY12-PB12)
     G7=DABS(PY21-PB21)
     G8=DABS(PY22-PB22)
     WRITE(6,1047)F1,F2,F5,F6,F3,F4,F7,F8,G1,G2,G5,G6,G3,G4,G7,G8
1047 FORMAT(/10X,'RELAÇÃO DE MOMENTO,DIF',//(10X,4D15.3))
   5 CONTINUE
     RETURN
     END
     SUBROUTINE LAMBDA(Z)
C**** CALCULO DE LAMBDA E DELTA,EQUAÇÕES APÊNDICE A ****
     FT(W)=DLOG(DABS((1.D0+W)/(1.D0-W)))/2.D0
     ZZ=Z*Z
     FTZ=FT(Z)
     FTS=0.D0
     SZ=DABS(S1-Z)
     IF(SZ.LT.EPS) GO TO 10
     FTS=FT(S*Z)
  10 DEL11=C11+S*ZZ*A11
     DEL12=C12+S*ZZ*A12
     DEL21=C21+  ZZ*A21
     DEL22=C22+  ZZ*A22
     DEA11=C11+S*ZZ*AA11
     DEA12=C21+S*ZZ*AA12
     DEA21=C12+  ZZ*AA21
     DEA22=C22+  ZZ*AA22
     LMU11=1.D0+2.D0*A11*ZZ-2.D0*Z*DEL11*FTS
     LMU12=     2.D0*A12*ZZ-2.D0*Z*DEL12*FTS
     LMU21=     2.D0*A21*ZZ-2.D0*Z*DEL21*FTZ
     LMU22=1.D0+2.D0*A22*ZZ-2.D0*Z*DEL22*FTZ
     LMA11=1.D0+2.D0*AA11*ZZ-2.D0*Z*DEA11*FTS
     LMA12=     2.D0*AA12*ZZ-2.D0*Z*DEA12*FTS
     LMA21=     2.D0*AA21*ZZ-2.D0*Z*DEA21*FTZ
     LMA22=1.D0+2.D0*AA22*ZZ-2.D0*Z*DEA22*FTZ
     LMDD=LMU11*LMU22-LMU12*LMU21
     RETURN
     END
     SUBROUTINE VECT(Z,I1,I2)
C**** CALCULO DOS VETORES DE NORMALIZAÇÃO V.E U ****
     IF I2=1,STORE AT I1
```

```
      IF (I2.LT.3)GO TO 20
      CALL LAMEUA(2)
      P2=P1*F1*Z*Z
      SV11= LMA12*LMU12+LMA22*LMU22+PZ*(DEA12*DEL12+DEA22*DEL22)
      SV12=-LMA11*LMU12-LMA21*LMU22-PZ*(DEA11*DEL12+DEA21*DEL22)
      SV21=-LMA12*LMU11-LMA22*LMU21-PZ*(DEA12*DEL11+DEA22*DEL21)
      SV22= LMA11*LMU11+LMA21*LMU21+PZ*(DEA11*DEL11+DEA21*DEL21)
      IF (I2.EQ.1)GO TO 10
      RETURN
   10 V11(I1)=SV11
      V12(I1)=SV12
      V21(I1)=SV21
      V22(I1)=SV22
      RETURN
   20 CALL LAMEUA(2)
      SU1=-LMU12
      SU2= LMU11
      SUA1=-LMA12
      SUA2= LMA11
      IF(I2.EQ.1)GO TO 30
      RETURN
   30 IF(Z.GT.1.D0)GO TO 32
      J=I1-N
      U1(J)=SU1
      U2(J)=SU2
      V31(J)=SUA1
      V32(J)=SUA2
      RETURN
   32 U1(I1)=SU1
      U2(I1)=SU2
      UA1(I1)=SUA1
      UA2(I1)=SUA2
      RETURN
      END
      SUBROUTINE NORM(Z,I1,I2)
C**** CALCULO DAS INTEGRAIS DE NORMALIZAÇÃO ****
C     IF I2=1,STORE AT I1
      FT(W)=DLOG(DABS((1.DO+W)/(1.DO-W)))/2.DO
      ZZ=Z*Z
      P1Z=A11*A22+2.DO*A*ZZ
      P2Z=C11*(3*A11+2.DO*C11*A22-2.DO*C12*A21)*ZZ+2.DO*3*A*ZZ*ZZ
      P3Z=C22*(  A22+2.DO*C22*A11-2.DO*C21*A12)*ZZ+2.D0*  A*ZZ*ZZ
      P4Z=C*(3*C22*A11+C11*A22-C12*A21-3*C21*A12)*ZZ+3*A*ZZ*ZZ
      FTZ=FT(Z)
      FT3=FT(3*Z)
      IF(Z.GT.1.DO)GO TO 20
      TH=1.DO
      IF(Z.GT.3)TH=0.DO
      LMH=1.D0+2.DO*ZZ*P1Z-2.DO*Z*P2Z*FTS-2.DO*Z*P3Z*FTZ
     1    +4.DO*ZZ*P4Z*FTS*FTZ-P1*P1*ZZ*P4Z*TH
      LM1=P1*Z*(P2Z*TH+P3Z-2.DO*Z*P4Z*(FTZ*TH+FTS))
      LNZ=Z*(LPH*LMH+LM1*LM1)
      IF(I2.EQ.1)GO TO 10
      RETURN
   10 GN(I1)=GN2
      RETURN
   20 TP2=-1.D0/C22-1.D0
```

```
      TPS=-S/(S*S*ZZ-1.D0)
      PP1=4.D0*A*Z
      PP2=2.D0*(S*A11+2.D0*C11*A22-2.D0*C12*A21)*Z+8.D0*S*A*ZZ*Z
      PP3=2.D0*(  A22+2.D0*C22*A11-2.D0*C21*A12)*Z+8.D0*  A*ZZ*Z
      PP4=2.D0*(S*C22*A11+C11*A22-C12*A21-S*C21*A12)*Z+4.D0*S*A*ZZ*Z
      DNZ=4.D0*Z*P1Z+2.D0*ZZ*PP1-2.D0*P2Z*FTS-2.D0*Z*PP2*FTS-2.D0*Z
     1*P2Z*TPS-2.D0*P3Z*FTZ-2.D0*Z*PP3*FTZ-2.D0*Z*P3Z*TPZ+8.D0*Z*P4Z
     2*FTS*FTZ+4.D0*ZZ*PP4*FTS*FTZ+4.D0*ZZ*P4Z*TPS*FTZ+4.D0*ZZ*P4Z
     3*FTS*TPZ
      DNZ=ZZ*(P3Z-2.D0*Z*P4Z*FTS)*DNZ
      IF(I2.EQ.1)GO TO 30
      RETURN
   30 DN(II)=DNZ
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SFI(Z,I1,I2)
C**** CALCULO DO MODULO DO INVERSO DO DETERMINANTE DE H-(-NYU-I),EQUACAO
C      III-3.10 *****
C     IF I1=1, CALCULA H EM Z
C     IF I1=2, CALCULA H-ADJUNTA EM Z,SAIDA = GH
C     IF I2=1, CALCULA O INVERSO,SAIDA=SD
      T1=0.D0
      T2=0.D0
      IF(I1.EQ.1)T1=1.D0
      IF(I1.EQ.2)T2=1.D0
      S11=0.D0
      S12=0.D0
      S21=0.D0
      S22=0.D0
      F11=0.D0
      F12=0.D0
      F21=0.D0
      F22=0.D0
      DO 10 I=1,NP
      TH=1.D0
      IF(I.GT.N)TH=0.D0
      WW=W(I)/(X(I)+Z)
      S11=S11+(HA11(I)*T1+H11(I)*T2)*TH*WW
      S12=S12+(HA21(I)*T1+H21(I)*T2)*     WW
      S21=S21+(HA12(I)*T1+H12(I)*T2)*TH*WW
      S22=S22+(HA22(I)*T1+H22(I)*T2)*     WW
      F11=F11+(LA11(I)*T1+L11(I)*T2)*TH*WW
      F12=F12+(LA21(I)*T1+L21(I)*T2)*     WW
      F21=F21+(LA12(I)*T1+L12(I)*T2)*TH*WW
   10 F22=F22+(LA22(I)*T1+L22(I)*T2)*     WW
      CH11=1.D0-T1*(C11*HA011+C21*HA012)-T2*(C11*H011+C12*H012)
      CH12=     -T1*(C11*HA021+C21*HA022)-T2*(C11*H021+C12*H022)
      CH21=     -T1*(C12*HA011+C22*HA012)-T2*(C21*H011+C22*H012)
      CH22=1.D0-T1*(C12*HA021+C22*HA022)-T2*(C21*H021+C22*H022)
      BL11=S1   -T1*(B11*LA011+B21*LA012)*Z -(B11*L011+B12*L012)*T2*Z
      BL12=     -T1*(B11*LA021+B21*LA022)*Z -(B11*L021+B12*L022)*T2*Z
      BL21=     -T1*(B12*LA011+B22*LA012)*Z -(B21*L011+B22*L012)*T2*Z
      BL22=1.D0-T1*(B12*LA021+B22*LA022)*Z -(B21*L021+B22*L022)*T2*Z
      DFD=BL11*BL22-BL12*BL21
      CL11=( CH11*BL22-CH12*BL21)/DFD
      CL12=(-CH11*BL12+CH12*BL11)/DFD
      CL21=( CH21*BL22-CH22*BL21)/DFD
```

```
      [illegible]
      [illegible]
      CH12=C11*S12+(C21*T1+C12*T2)*S22
      CH21=(C12*T1+C21*T2)*S11+C22*S21
      CH22=(C12*T1+C21*T2)*S12+C22*S22
      BL11=B11*T11+(B21*T1+B12*T2)*T21
      BL12=B11*T12+(B21*T1+B12*T2)*T22
      BL21=(B12*T1+B21*T2)*T11+B22*T21
      BL22=(B12*T1+B21*T2)*T12+B22*T22
      SO11=1.D0-Z*CH11+Z*Z*(CL11*BL11+CL12*BL21)
      SO12=     -Z*CH12+Z*Z*(CL11*BL12+CL12*BL22)
      SO21=     -Z*CH21+Z*Z*(CL21*BL11+CL22*BL21)
      SO22=1.D0-Z*CH22+Z*Z*(CL21*BL12+CL22*BL22)
      IF(I2.EQ.1)RETURN
      SDD=SO11*SO22-SO12*SO21
      WH11= SO22/SDD
      WH12=-SO12/SDD
      WH21=-SO21/SDD
      WH22= SO11/SDD
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SINGH(Z,IC,IH)
C
C**** TESTE DA EQUACAO INTEGRAL SINGULAR ,EQUAÇÃO II-3.15A ****
C     IF IC=0, NOS PONTOS DE NYU=Z
C     IF IC.NE.0, ELEMENTO DE ORDEM IC-1
C     IF IH=1, EQUAÇÃO DA MATRIZ H
C     IF IH=2, EQUAÇÃO DA MATRIZ H-ADJUNTA
      DIMENSION PL(20)
      T1=0.D0
      T2=0.D0
      IF(IH.EQ.1)T1=1.D0
      IF(IH.EQ.2)T2=1.D0
      IF(IC.NE.0)GO TO 20
      CALL LAMBDA(Z)
      CALL SH(Z,IH,0)
      LM11=LMO11*T1+LMA11*T2
      LM12=LMO12*T1+LMA12*T2
      LM21=LMO21*T1+LMA21*T2
      LM22=LMO22*T1+LMA22*T2
      LH11=WH11*LM11+WH21*LM21
      LH12=WH11*LM12+WH21*LM22
      LH21=WH12*LM11+WH22*LM21
      LH22=WH12*LM12+WH22*LM22
      TZ=1.D0
      IF(Z.GT.S)TZ=0.D0
      CA11=(C11*Z*Z*S*A11)*T1+(C11*Z*Z*S*AA11)*T2
      CA12=(C12*Z*Z*S*A12)*T1+(C21*Z*Z*S*AA12)*T2
      CA21=(C21*Z*Z*  A21)*T1+(C12*Z*Z  *AA21)*T2
      CA22=(C22*Z*Z  *A22)*T1+(C22*Z*Z  *AA22)*T2
      LOGZ=DLOG((1.D0-Z)/Z)*Z
      HZ11= WH11*TZ*CA11+WH21*CA21
      HZ12= WH11*TZ*CA12+WH21*CA22
      HZ21= WH12*TZ*CA11+WH22*CA21
      HZ22= WH12*TZ*CA12+WH22*CA22
      HH11=HZ11*LOGZ+1.D0
      HH12=HZ12*LOGZ
```

```
      RH21=H221*CCCZ
      RH22=H222*CCCZ*1.D0
      DO 10 I=1,NP
      U=X(I)
      TH=1.D0
      IF(I.GT.N)TH=0.D0
      CA11=T1*(C11+U*Z*S*A11)+T2*(C11+U*Z*S*AA11)
      CA12=T1*(C12+U*Z*S*A12)+T2*(C21+U*Z*S*AA12)
      CA21=T1*(C21+U*Z   *A21)+T2*(C12+U*Z   *AA21)
      CA22=T1*(C22+U*Z   *A22)+T2*(C22+U*Z   *AA22)
      WZ=W(I)/(C-Z)*Z
      HH11=H11(I)*T1+HA11(I)*T2
      HH12=H12(I)*T1+HA12(I)*T2
      HH21=H21(I)*T1+HA21(I)*T2
      HH22=H22(I)*T1+HA22(I)*T2
      RH11=RH11+(HH11*TH*CA11+HH21*CA21-H211)*WZ
      RH12=RH12+(HH11*TH*CA12+HH21*CA22-H212)*WZ
      RH21=RH21+(HH12*TH*CA11+HH22*CA21-H221)*WZ
   10 RH22=RH22+(HH12*TH*CA12+HH22*CA22-H222)*WZ
      DH11=DABS(LH11-RH11)
      DH12=DABS(LH12-RH12)
      DH21=DABS(LH21-RH21)
      DH22=DABS(LH22-RH22)
      WRITE(6,11)Z,LH11,LH12,RH11,RH12,DH11,DH12,LH21,LH22,RH21,RH22,
     1DH21,DH22
   11 FORMAT(1X,7D15.3,/25X,6D15.3,/)
      RETURN
   20 IA=IC-1
      FI=IC
      PO(1)=1.D0
      LH11=0.D0
      LH12=0.D0
      LH21=0.D0
      LH22=0.D0
      RH11=1.D0/FI
      RH12=0.D0
      RH21=0.D0
      RH22=      /FI
      DO         ,NP
      U=X(
      TH=1.D0
      IF(I.GT.N)TH=0.D0
      CALL CAMCA(C)
      LM11=T1*CM11+T2*LMA11
      LM12=T1*CM12+T2*LMA12
      LM21=T1*CM21+T2*LMA21
      LM22=T1*CM22+T2*LMA22
      HH11=T1*H11(I)+T2*HA11(I)
      HH12=T1*H12(I)+T2*HA12(I)
      HH21=T1*H21(I)+T2*HA21(I)
      HH22=T1*H22(I)+T2*HA22(I)
      DO 22 II=1,IC
   22 PO(II+1)=PO(II)*U
      LH11=LH11+(HH11*LM11+HH21*LM21)*PO(IC)*W(I)
      LH12=LH12+(HH11*LM12+HH21*LM22)*PO(IC)*W(I)
      LH21=LH21+(HH12*LM11+HH22*LM21)*PO(IC)*W(I)
      LH22=LH22+(HH12*LM12+HH22*LM22)*PO(IC)*W(I)
```

```
      FU1=-P(IC+1)*DLOG(1.D0-U1/U)
      FU2=FU1*U
      DO 24 I1=1,IC
      F1=I1
      FU1=FU1-PU(IC+1-I1)/F1
   24 FU2=FU2-PU(IC+2-I1)/F1
      F1=IC+1
      FU2=FU2-1.D0/F1
      CA11=C11*FU1+U*S*(A11*T1+AA11*T2)*FU2
      CA12=(C12*T1+C21*T2)*FU1+U*S*(A12*T1+AA12*T2)*FU2
      CA21=(C21*T1+C12*T2)*FU1+U*  (A21*T1+AA21*T2)*FU2
      CA22=C22*FU1+U*(A22*T1+AA22*T2)*FU2
      HH11=HH11*(HF11*TH*CA11+HH21*CA21)*W(I)
      HH12=HH12*(HF11*TH*CA12+HH21*CA22)*W(I)
      HH21=HH21*(HF12*TH*CA11+HH22*CA21)*W(I)
   30 HH22=HH22*(HF12*TH*CA12+HH22*CA22)*W(I)
      DH11=DABS(LF11-HH11)
      DH12=DABS(LF12-HH12)
      DH21=DABS(LF21-HH21)
      DH22=DABS(LF22-HH22)
      WRITE(6,31)(A,LF11,LF12,HH11,HH12,DH11,DH12,
     1            LF21,LF22,HH21,HH22,DH21,DH22
   31 FORMAT(1X,A,I5,6E15.3,/15X,6E15.3,/)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE [illegible](Z,I1,I,IC)
C**** CALCULO DA MATRIZ DPLGA(Z),EQUAÇÃO II-3.21 ****
C     IF I2=1,STORE AT I1
      DO 14 J=1,2
      T1=0.D0
      T2=0.D0
      IF(J.EQ.1)T1=1.D0
      IF(J.EQ.2)T2=1.D0
      SH11=0.D0
      SH12=0.D0
      SH21=0.D0
      SH22=0.D0
      DO 10 K=1,NM
      U=R(K)
      HL11=H11(K)*T1+H12(K)*T2
      HL12=H12(K)*T1+H11(K)*T2
      HL21=H21(K)*T1+H22(K)*T2
      HL22=H22(K)*T1+H21(K)*T2
      TH=1.D0
      IF(K.EQ.NM)TH=0.5D0
      SH11=SH11+(HL11*(TH*(C11-U*Z*S*A11)+HL21*(C21-U*Z*A21))/(U+Z)*W(K)
      SH12=SH12+(HL11*(TH*(C12-U*Z*S*A12)+HL21*(C22-U*Z*A22))/(U+Z)*W(K)
      SH21=SH21+(HL12*(TH*(C11-U*Z*S*A11)+HL22*(C21-U*Z*A21))/(U+Z)*W(K)
   10 SH22=SH22+(HL12*(TH*(C12-U*Z*S*A12)+HL22*(C22-U*Z*A22))/(U+Z)*W(K)
      IF(J.EQ.2)GO TO 12
      GH11=1.D0-Z*SH11
      GH12=    -Z*SH12
      GH21=    -Z*SH21
      GH22=1.D0-Z*SH22
      GO TO 14
   12 GL11=-Z*SH11-Z*S*H11
      GL12=-Z*SH12-Z*S*H12
```

```
      [illegible]
      [illegible]
   14 CONTINUE
      IF(I.LE.[illegible]) GO TO 12
      RETURN
   16 WH11(I,I)=WH11
      WH12(I,I)=WH12
      WH21(I,I)=WH21
      WH22(I,I)=WH22
      WL11(I,I)=WL11
      WL12(I,I)=WL12
      WL21(I,I)=WL21
      WL22(I,I)=WL22
      RETURN
      END
      [illegible]
C**** CALCULO DA MATRIZ OPERATIZ-ADJUNTA, EQUAÇÃO II-3.16    *****
C     [illegible] AT II
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      IF(J.EQ.1)T1=1.00
      IF(J.EQ.2)T2=1.00
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
   10 [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
   12 [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
   14 CONTINUE
      [illegible]
      RETURN
   16 [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
```

```
      WLA11(I1)=GLA11
      WLA12(I1)=GLA12
      WLA21(I1)=GLA21
      WLA22(I1)=GLA22
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SLU(Z1,Z2,I1,I2)
C**** CALCULO DO PRODUTO OMEGA-ADJUNTA*D*OMEGA  ****
C     IF I1=0,CALCULA OMEGA-ADJUNTA(Z1)
C     IF I2=0,CALCULA OMEGA(Z2)
      IF(I1.EQ.0)GO TO 12
      GHA11=WHA11(I1)
      GHA12=WHA12(I1)
      GHA21=WHA21(I1)
      GHA22=WHA22(I1)
      GLA11=WLA11(I1)
      GLA12=WLA12(I1)
      GLA21=WLA21(I1)
      GLA22=WLA22(I1)
      GO TO 14
   12 CALL SUA(Z1,G,0)
   14 IF(I2.EQ.0)GO TO 16
      GH11=WH11(I2)
      GH12=WH12(I2)
      GH21=WH21(I2)
      GH22=WH22(I2)
      GL11=WL11(I2)
      GL12=WL12(I2)
      GL21=WL21(I2)
      GL22=WL22(I2)
      GO TO 18
   16 CALL SUM(Z2,G,0)
   18 CG11=GHA11*C11+GHA21*C21
      CG12=GHA11*C12+GHA21*C22
      CG21=GHA12*C11+GHA22*C21
      CG22=GHA12*C12+GHA22*C22
      SU11=CG11*GH11+CG12*GH21
      SU12=CG11*GH12+CG12*GH22
      SU21=CG21*GH11+CG22*GH21
      SU22=CG21*GH12+CG22*GH22
      CG11=GLA11*C11+GLA21*D21
      CG12=GLA11*C12+GLA21*D22
      CG21=GLA12*C11+GLA22*D21
      CG22=GLA12*C12+GLA22*D22
      SU11=SU11*CG11*GL11+CG12*GL21
      SU12=SU12*CG11*GL12+CG12*GL22
      SU21=SU21*CG21*GL11+CG22*GL21
      SU22=SU22*CG21*GL12+CG22*GL22
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CHECK(IC)
C**** TESTE DAS CALCULOS DE CONTORNO    *****
C     CALCULO DO MOMENTO DE ORDEM IC
      DIMENSION PSU(20),PSI(20)
      PSU(1)=1.D0
      PSI(1)=1.D0
      [illegible]
```

```
      SM2=0.D0
      DO 20 I1=1,NP
      Z=ZO(I1)
      CALL LAMBDA(Z)
      DO 20 I2=1,2
      TH=1.D0
      IF(I2.EQ.2)TH=-1.D0
      IF(I1.GT.1.AND.I2.EQ.2)GO TO 20
      S1=0.D0
      S2=0.D0
      S3=0.D0
      S4=0.D0
      DO 10 I3=1,NW
      U=X(I3)
      UU=U**IC
      S1=S1+(C11+TH*Z*U*A11)/(S*Z-TH*U)*UU*W(I3)
      S2=S2+(C12+TH*Z*U*A12)/(S*Z-TH*U)*UU*W(I3)
      S3=S3+(C21+TH*Z*U*A21)/(  Z-TH*U)*UU*W(I3)
   10 S4=S4+(C22+TH*Z*U*A22)/(  Z-TH*U)*UU*W(I3)
      IF(I2.EQ.2)GO TO 12
      SM1=SM1+CA(I1)*Z*(LMU11*S2-LMU12*S1)
      SM2=SM2+CA(I1)*Z*(LMU11*S4-LMU12*S3)
      GO TO 20
   12 SL1=-Z*(LMU11*S2-LMU12*S1)
      SL2=-Z*(LMU11*S4-LMU12*S3)
   20 CONTINUE
      DO 40 I=1,N
      U=X(I)
      CALL LAMBDA(U)
      IF(IC.EQ.0) GO TO 33
      DO 32 I1=1,IC
      P30(I1+1)=FL0(I1)*S*U
   32 P31(I1+1)=FL1(I1)*U
   33 FU1=P30(IC+1)*DLOG(S*U/(1.D0-S*U))
      FU2=FU1*S*U
      FU3=P31(IC+1)*DLOG(  U/(1.D0-  U))
      FU4=FU3*  U
      IF(IC.EQ.0)GO TO 36
      DO 34 I1=1,IC
      FI=I1
      FU1=FU1-P30(IC+1-I1)/FI
      FU2=FU2-P30(IC+2-I1)/FI
      FU3=FU3-P31(IC+1-I1)/FI
   34 FU4=FU4-P31(IC+2-I1)/FI
   36 FI=IC+1
      FU2=FU2-1.D0/FI
      FU4=FU4-1.D0/FI
      SM1=SM1+CA1(I)*(U*(C11*FU1+U*A11*FU2)*P30(IC+1)*LMU11)*W(I)
     1         +CA2(I)*(U*(C12*FU1+U*A12*FU2)*P30(IC+1)*LMU12)*W(I)
      SM2=SM2+CA1(I)*(U*(C21*FU3+U*A21*FU4)*P31(IC+1)*LMU21)*W(I)
     1         +CA2(I)*(U*(C22*FU3+U*A22*FU4)*P31(IC+1)*LMU22)*W(I)
   40 CONTINUE
      DO 50 I=1,M
      U=X1(I)
      CALL LAMBDA(U)
      IF(IC.EQ.0) GO TO 43
      DO 42 I1=1,IC
```

```
      PSO(II+1)=PSO(II)*S*U
   42 PSI(II+1)=PSI(II)*U
   43 FO1=PSO(IC+1)*DLOG(S*U/(S*U-1.D0))
      FO2=FO1*S*U
      FO3=PSI(IC+1)*DLOG(U/(1.D0-U))
      FO4=FO3*U
      IF(IC.EQ.0)GO TO 46
      DO 44 II=1,IC
      FI=II
      FO1=FO1-PSO(IC+1-II)/FI
      FO2=FO2-PSO(IC+2-II)/FI
      FO3=FO3-PSI(IC+1-II)/FI
   44 FO4=FO4-PSI(IC+2-II)/FI
   46 FI=IC+1
      FO2=FO2-1.D0/FI
      FO4=FO4-1.D0/FI
      SR1=SR1+CA3(I)*U*((EMO11*C12-EMO12*C11)*FO1
     1                 +U*(EMO11*A12-EMO12*A11)*FO2)*W(N+I)
      SR2=SR2+CA3(I)*U*((EMO11*C22-EMO12*C21)*FO3
     1                 +U*(EMO11*A22-EMO12*A21)*FO4+PSI(IC+1)/U*[illegible]
     2                 W(N+I))
   50 CONTINUE
      DIF1=DABS(SC1-SR1)
      DIF2=DABS(SC2-SR2)
      WRITE(6,51)IC,SC1,SR1,DIF1,SC2,SR2,DIF2
   51 FORMAT(1X,I3,6D15.3)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DENSM(Z,DEN1,DEN2,DASA1,DAS2)
C**** CALCULO DO FLUXO ESCALAR ****
      EXO=DEXP(-Z/Z0(1))
      DEN1=D1(1)/EXO*CA(1)*C1(1)*EXO
      DEN2=D2(1)/EXO*DA(1)*D2(1)*EXO
      IF(MP.EQ.1)GO TO 20
      DO 10 I=2,MP
      EXO=DEXP(-Z/Z0(I))
      DEN1=DEN1+CA(I)*C1(I)*EXO
   10 DEN2=DEN2+CA(I)*C2(I)*EXO
   20 DAS1=DEN1
      DAS2=DEN2
      DO 22 I=1,K
      EXO=DEXP(-Z/X(I))
      DEN1=DEN1+CA1(I)*EXO*W(I)
   22 DEN2=DEN2+CA2(I)*EXO*W(I)
      DO 24 I=1,M
      EXO=DEXP(-Z/X(N+I))
      DEN1=DEN1+CA3(I)*C21(I)*EXO*W(N+I)
   24 DEN2=DEN2+CA3(I)*C22(I)*EXO*W(N+I)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FLUANG(Z,UU,FLUX1,FLUX2)
C**** CALCULO DA DISTRIBUICAO DO FLUXO ANGULAR   *****
C     Z E' A DISTANCIA,UU E' O ANGULO
C**** TERMO DISCRETO ****
      DO 20 I=1,MP
      ZI=Z0(I)
      CALL CARGA(ZI)
```

```
      IF(I.EQ.J)GO TO 10
      FLUX1=Z1/(S*Z1+UO)*(LMU11*(C12-Z1*UO*A12)-LMU12*(C11-Z1*UO*A11))
     1      /DEXP(-Z/Z1)
      FLUX2=Z1/(S*Z1+UO)*(LMU11*(C22-Z1*UO*A22)-LMU12*(C21-Z1*UO*A21))
     1      /DEXP(-Z/Z1)
      IF(Z.LT.EPS.AND.I.EQ.1)WRITE(6,11)Z,UO,FLUX1,FLUX2
   11 FORMAT(8X,2F7.2,2F15.10)
   10 FLUX1=Z1/(S*Z1-UO)*(LMU11*(C12+Z1*UO*A12)-LMU12*(C11+Z1*UO*A11))
     1      *DEXP(-Z/Z1)*CA(I)+FLUX1
      FLUX2=Z1/(S*Z1-UO)*(LMU11*(C22+Z1*UO*A22)-LMU12*(C21+Z1*UO*A21))
     1      *DEXP(-Z/Z1)*CA(I)+FLUX2
   20 CONTINUE
      IF(UO.LE.EPS)GO TO 22
C**** CONTINUUM,FLUX1,REGION 1,UO.GT.0  ****
C**** REGULARIZAÇÃO ******
      US=UO/S
      CALL VECT(US,C,C)
      J1=NM+1
      CALL SOU (US,ZU(1),C,J1)
      CALL FNORM(US,U,U)
      A1S=(SV11*SC11+SV12*SU21)*U1(1)+(SV11*SU12+SV12*SU22)*U2(1)
      A2S=(SV21*SU11+SV22*SU21)*U1(1)+(SV21*SU12+SV22*SU22)*U2(1)
      A1S=-A1S*US*ZU(1)/(US*ZU(1))/CN2
      A2S=-A2S*US*ZU(1)/(US*ZU(1))/CN2
      FU1=US*A1S*(C11*US*UO*A11)*DEXP(-Z/US)
      FU2=US*A2S*(C12*US*UO*A12)*DEXP(-Z/US)
      GO TO 24
   22 FU1=0.D0
      FU2=0.D0
   24 SUM1=0.D0
      SUM2=0.D0
      DO 40 I=1,N
      U=X(I)
      EXU=DEXP(-Z/U)
      SUM1=SUM1+(U*CA1(I)*(C11+U*UO*A11)*EXU-FU1)/(S*U-UO)*W(I)
   40 SUM2=SUM2+(U*CA2(I)*(C12+U*UO*A12)*EXU-FU2)/(S*U-UO)*W(I)
      IF(UO.LT.EPS)GO TO 41
      FLUX1=FLUX1+SUM1+SUM2+(FU1+FU2)*DLOG((1.D0-UO)/UO)/S
      CALL CA4BUA(US)
      EXU=DEXP(-Z/US)
      FLUX1=FLUX1+A1S*LMU11*EXU/S+A2S*LMU12*EXU/S
      GO TO 42
   41 FLUX1=FLUX1+SUM1+SUM2
   42 SUM1=0.D0
C*** FLUXO1,REGIÃO2
      DO 50 I=1,P
      U=X(N+I)
   50 SUM1=SUM1+CA3(I)*U/(S*U-UO)*((C11*U*UO*A11)*U1(I)
     1                            +(C12*U*UO*A12)*U2(I))
     2 *DEXP(-Z/U)*W(N+I)
      FLUX1=FLUX1+SUM1
C**** FIM DO FLUXO 1
C**** FLUXO 2,REGIÃO 1,REGULARIZAÇÃO ***
      IF(UO.LT.EPS.OR.UO.GT.S))GO TO 51
      CALL VECT(US,U,U)
      J1=NM+1
      CALL SOU (US,ZU(1),U,J1)
```

```
      CALL [illegible]
      CALL LAMBDA(CC)
      A1S=(SV11*SD11+SV12*SD21)*U1(1)+(SV11*SD12+SV12*SD22)*U2(1)
      A2S=(SV21*SD11+SV22*SD21)*U1(1)+(SV21*SD12+SV22*SD22)*U2(1)
      A1S=-A1S*CC*ZU(1)/(CO*ZU(1))/CN2
      A2S=-A2S*UU*ZU(1)/(CO*ZU(1))/CN2
      FU1=UU*A1S*(C21+UC*UO*A21)*DEXP(-Z/UO)
      FU2=UU*A2S*(C22+UU*CO*A22)*DEXP(-Z/UO)
      GO TO 53
   51 FU1=0.D0
      FU2=0.D0
   53 SUM1=0.DC
      SUM2=0.DC
      DO 52 I=1,N
      U=X(I)
      EXU=DEXP(-Z/U)
      SUM1=SUM1+(U*CA1(I)*(C21+U*UO*A21)*EXU-FU1)/(U-UO)*W(I)
   52 SUM2=SUM2+(U*CA2(I)*(C22+U*UO*A22)*EXU-FU2)/(U-UO)*W(I)
      IF(UO.LT.EPS.OR.UO.GT.S1) GO TO 55
      FLUX2=FLUX2+SUM1+SUM2+(FU1+FU2)*DLOG((S1-UO)/UO)
     1              +(A1S*LMD21+A2S*LMD22)*DEXP(-Z/UO)
      GO TO 56
   55 FLUX2=FLUX2+SUM1+SUM2
C**** FLUXO GIRECIÃO 2 ****
   56 EPS1=1.DC-EPS
      IF(UO.LT.S1.OR.UO.GT.EPS1) GO TO 58
      CALL VECT(CC,C,D)
      J1=NM+1
      CALL SOD (CC,ZU(1),C,J1)
      CALL FNORM(CC,D,D)
      CALL LAMBDA(CC)
      UUO=UO*UC
      A1S=(SUA1*SD11+SUA2*SD21)*U1(1)+(SUA1*SD12+SUA2*SD22)*U2(1)
      A1S=-A1S*CC*ZU(1)/(CO+ZU(1))/CN2
      FU1=UO*A1S*(LMD11*(C22+UUO *A22)-LMD12*(C21+UUO *A21))*DEXP(-Z/UO)
      GO TO 60
   58 FU1=0.D0
   60 SUM1=0.DC
      DO 74 I=1,M
      U=X(N+I)
   74 SUM1=SUM1+(CA3(I)*U*((C21+U*UO*A21)*U21(I)+(C22+U*UO*A22)*U22(I))
     1     *DEXP(-Z/U)-FU1)/(U-UO)*W(N+I)
      FLUX2=FLUX2+SUM1
      IF(UO.LT.S1.OR.UO.GT.EPS1) RETURN
      FLUX2=FLUX2+FU1*DLOG((1.D0-UO)/(UO-S1))+A1S*LMOD*DEXP(-Z/UO)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CCRR(Z,CUR1,CUR2)
C**** CALCULO DA DISTRIBUIÇAO DA CORRENTE****
      EXU=DEXP(-Z/ZU(1))
      CUR1=ZU(1)*(CA(1)*EXU-1.D0/EXU)*(G11*U1(1)+G12*U2(1))
      CUR2=ZU(1)*(CA(1)*EXU-1.D0/EXU)*(G21*U1(1)+G22*U2(1))
      IF(KP.EQ.1)GO TO 20
      DO 10 I=2,KP
      EXU=DEXP(-Z/ZU(I))
      CUR1=CUR1+CA(I)*ZU(I)*(G11*U1(I)+G12*U2(I))*EXU
   10 CUR2=CUR2+DA(I)*ZU(I)*(G21*U1(I)+G22*U2(I))*EXU
```

```
   20 DO 22 I=1,N
      U=X(I)
      EXU=DEXP(-Z/U)
      COR1=COR1+U*(CA1(I)*G11+CA2(I)*G12)*EXU*W(I)
   22 COR2=COR2+U*(CA1(I)*G21+CA2(I)*G22)*EXU*W(I)
      DO 24 I=1,P
      U=X(N+I)
      EXU=DEXP(-Z/U)
      COR1=COR1+CA3(I)*U*(G11*U21(I)+G12*U22(I))*EXU*W(N+I)
   24 COR2=COR2+CA3(I)*U*(G21*U21(I)+G22*U22(I))*EXU*W(N+I)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CHECK2
C     CALCULO DOS COEFICIENTES CONTINUOS,EM O,1/S,E 1 PARA PROBLEMA
C     DE MILNE
      WRITE(6,11)
   11 FORMAT(/10X,'TESTE DAS INTEGRAIS DE NORMALIZAÇÃO,REGIÃO 1',/)
      DO 20 I=1,N
      U=X(I)
      CN2=U*(V11(I)*V22(I)-V12(I)*V21(I))
      DCN=DABS(CN2-CN(I))
   20 WRITE(6,21)CN2,CN(I),DCN
   21 FORMAT(15X,3G15.3)
C     COEFICIENTE EM O
      A110=-(C11*WH11(NP+1)+C12*WH21(NP+1))*U1(I)
     1      -(C11*WH12(NP+1)+C12*WH22(NP+1))*U2(I)
      A120=-(C21*WH11(NP+1)+C22*WH21(NP+1))*U1(I)
     1      -(C21*WH12(NP+1)+C22*WH22(NP+1))*U2(I)
      WRITE(6,25)A110,A120
   25 FORMAT(/10X,'A11(O), A12(O)',2D25.15)
C     COEFICIENTE EM 1/S
      CALL CAMCA(S1)
      PZ=PI*PI*S1*S1
      CN2= DEA11*DEL11*(LMA22*LMU22+PZ*(DEA12*DEL12+DEA22*DEL22))
     1    +DEA12*DEL12*(LMA21*LMU21+PZ*(DEA11*DEL11+DEA21*DEL21))
     2    -DEA11*DEL12*(LMA22*LMU21+PZ*(DEA12*DEL11+DEA22*DEL21))
     3    -DEA12*DEL11*(LMA21*LMU22+PZ*(DEA11*DEL12+DEA21*DEL22))
      AL11= DEA12*DEL12/CN2
      AL12=-DEA11*DEL12/CN2
      AL21=-DEA12*DEL11/CN2
      AL22= DEA11*DEL11/CN2
      I2=NM+1
      CALL SOU(S1,Z0(I),C,I2)
      DO1=SO11*D1(I)+SO12*D2(I)
      DO2=SO21*D1(I)+SO22*D2(I)
      A1S=-    Z0(I)/(S1+Z0(I))*(AL11*DO1+AL12*DO2)
      A2S=-    Z0(I)/(S1+Z0(I))*(AL21*DO1+AL22*DO2)
      WRITE(6,31)A1S,A2S
   31 FORMAT(/10X,'A11(1/S), A12(1/S)',2D25.15)
      RETURN
      END
C*****       PROGRAMA PRI,CALCULO DOS AUTO-VALORES ***********
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-V,X,Y),INTEGER(I-N),COMPLEX*16 (W,W,Z)
      COMMON/BLOCK1/S1,S,PI,A11,A12,A21,A22,B11,B22,B12,B21,C11,C22,C12,C
     *21,C,A
      DIMENSION T(100), C(100),      V(2,100),    Y(2),    Z0Y(2),    PP1(2
     *0),   PP2(20)
```

```
      F1(Y)=DLOG(DABS((1.D0+Y)/(1.D0-Y)))/2.D0
      ZJ=DCMPLX(0.D0,1.D0)
C     VARIAVEIS
      N=20
      M1=3
      M2=4
      M3=M1+1
      M=M1+M2
      N2=N/2
      PI=3.141592653589793D0
      NL=0
C     INPUT
      READ(5,1000)(T(N2+I),U(N2+I),I=1,N2)
 1000 FORMAT(2F26.15)
      WRITE(6,1010)
 1010 FORMAT(15X,'ABS  ',25X,'PESOS ' ,//)
      WRITE(6,1011)(T(N2+I),U(N2+I),I=1,N2)
 1011 FORMAT(10X,2F30.15)
      DO 12 K=1,N2
      T(K)=-T(N+1-K)
   12 U(K)=U(N+1-K)
      READ(5,1025)(PP1(I),I=1,20)
      READ(5,1025)(PP2(I),I=1,20)
 1025 FORMAT(20F4.2)
   96 READ(5,1001)S1,S2,S11,S12,S21,S22
 1001 FORMAT(6F6.4)
      S=S1/S2
      SI=1.D0/S
      WRITE(6,1012)S1,S2,S11,S12,S21,S22,S,SI
 1012 FORMAT(15X,'DATA SET S1,S2,S11,S12,S21,S22,S,SI',//,10X,8F10.5)
C     SUB-INTERVALOS
      XI(1)=0.D0
      XI(2)=0.2D0
      XI(3)=1.D0/S-0.01D0
      XI(4)=1.D0/S
      XI(5)=0.85D0
      XI(6)=0.90D0
      XI(7)=0.995D0
      XI(8)=1.D0
      DO 20 I=1,M
      DO 20 J=1,N
   20 Y(I,J)=(XI(I+1)-XI(I))/2.D0*T(J)+(XI(I+1)+XI(I))/2.D0
      WRITE(6,1015)
 1015 FORMAT(/,10X,'TESTE DA QUADRATURA')
      DO 10 I=1,16
      II=I-1
      SUM=0.D0
      DO 21 J=1,M
      DO 21 K=1,N
   21 SUM=SUM+(XI(J+1)-XI(J))/2.D0*Y(J,K)**II*U(K)
   10 WRITE(6,1016)II,SUM
 1016 FORMAT(/,10X,I5,F25.15)
C*****COMANDOS DE DEFINIÇÃO DA MATRIZ C,VER NO OUTRO PROGRAMA*****
      DO 100 IPP=1,20
      P1=PP1(IPP)
      P2=PP2(IPP)
      WRITE(6,1026)
```

```
 1020 FORMAT(//,10X,12(1P*))
      WRITE(6,1013)P1,P2
 1013 FORMAT(15X,'P1=',F10.5,/,15X,'P2=',F10.5)
C*****COMANDOS DE DEFINIÇÃO DA MATRIZ B,VER NO OUTRO PROGRAMA*****
C*****COMANDOS DE DEFINIÇÃO DA MATRIZ A,VER NO OUTRO PROGRAMA*****
C     CALCULO DA INTEGRAL
      WRITE(6,1002)
 1002 FORMAT(10X,'MYU=X',10X,'S(X)',11X,'R(X)',11X,'TETA',/)
      SUM1=0.D0
      SUM2=0.D0
      TH=0.D0
      THETA2=0.D0
      DO 30 I=1,M
      DO 30 J=1,N
      X=Y(I,J)
      P1L=A11+A22+2.D0*A*EI
      P2L=C11+(S*A11+2.D0*C11*A22-2.D0*C12*A21)*EI+2.D0*S*EJ*EJ*A
      P3L=C22+(A22+2.D0*C22*A11-2.D0*C21*A12)*EJ+2.D0*A*EJ*EJ
      P4L=C+(S*C22*A11+C11*A22-C12*A21-S*C21*A12)*EJ+S*A*EJ*EJ
      THETAL=1.D0
      IF(X.GT.S))THETAL=0.D0
      SX=P1*X*(P2L*THETAL+P3L-2.D0*X*P4L*FT(X)*THETAL-2.D0*X*P4L*
     1   FT(S*X))
      RX=1.D0+2.D0*EJ*P1L-2.D0*X*P2L*FT(S*X)-2.D0*X*P3L*FT(X)+4.D0*EJ*
     1   P4L*FT(S*X)*FT(X)-P1*P1*EJ*P4L*THETAL
      EJ=X*X
      THETA=DATAN2(SX,RX)
      IF(THETA-THETA2.LT.-5.D0)TH=TH+1.D0
      IF(THETA-THETA2.GT.5.D0) TH=TH-1.D0
      THETA2=THETA
      THETA=THETA+2.D0*TH*PI
      SUM1=SUM1+(X(I+1)-X(I))/2.D0*THETA*X/(EJ+1.D0)*U(J)
      SUM2=SUM2+(X(I+1)-X(I))/2.D0*THETA*X/(EJ+4.D0)*U(J)
   30 WRITE(6,1003)X,SX,RX,THETA
 1003 FORMAT(/5X,4E15.5)
      WRITE(6,1004)SUM1,SUM2
 1004 FORMAT(/10X,'INTEGRAL=',D26.15,10X,D26.15)
      ZM1=ZL(2J)
      RM1=ZM1
      WRITE(6,1017)ZM1
 1017 FORMAT(/10X,'LAMBDA(1)=',2D20.5)
      RMINF=(1.D0-2.D0*(C11*A11/3.D0/S)/S)*(1.D0-2.D0*(C22*A22/3.D0))
     1      -(2.D0*(C12*A12/3.D0/S)/S)*(2.D0*(C21*A21/3.D0))
      WRITE(6,1005)RM1,RMINF
 1005 FORMAT(/10X,'LAMBDA(1)=',D26.15,//,10X,'LAMBDA(INF)=',D26.15)
C     TESTE DE KAPPA,NUMERO DE AUTO-VALORES
      IF(THETA.LE.PI) GO TO 40
      IF(THETA.LE.2.D0*PI) GO TO 50
      WRITE(6,1018)
 1018 FORMAT(/10X,'KAPPA MAIOR DO QUE 2')
      GO TO 100
   40 ZNY(1)=-1.D0+2.D0*DEXP(-2.D0/PI*SUM1)*RM1/RMINF
      KP=1
      WRITE(6,1006)
 1006 FORMAT(/10X,'NYU-1 QUADRADO=',2D26.15)
      ZNY(1)=(DSQRT(ZNY(1)))
      WRITE(6,1007)
```

```
 1007 FORMAT(/10X,'AUTO-VALOR DISCRETO',2D26.15)
      GO TO 93
   50 DEL1=4.D0*CDEXP(-2.D0/PI*SUM1)*RM11/RMINF
      DEL2=25.D0*CDEXP(-2.D0/PI*SUM2)*RMI/RPINF
      RY=5.D0-(DEL1-DEL2)/3.D0
      SY=4.D0+(4.D0*DEL1-DEL2)/3.D0
      DEL=RY*RY-4.D0*SY
      IF(DEL.GT.0.D0) GO TO 52
      WRITE(6,1024)
 1024 FORMAT(/10X,'RAIZES COMPLEXAS')
      GO TO 100
   52 KP=2
      ZNY(1)=(RY-DSQRT(DEL))/2.D0
      ZNY(2)=(RY+DSQRT(DEL))/2.D0
      WRITE(6,1008)ZNY(1),ZNY(2)
 1008 FORMAT(/10X,'NYU-1 QUADRADO=',2D26.15,//,10X,'NYU-2 QUADRADO=',
     1      2D26.15)
      ZNY(1)=CDSQRT(ZNY(1))
      ZNY(2)=CDSQRT(ZNY(2))
      WRITE(6,1009)ZNY(1),ZNY(2)
 1009 FORMAT(/10X,'AUTO-VALORES DISCRETOS',2D26.15,/,30X,2D26.15)
C     ITERAÇÃO PARA REFINAR AS RAIZES E TESTAR OS RESULTADOS
   93 WRITE(6,1021)KP
 1021 FORMAT(/10X,'KAPPA=',I2)
      EPS=1.D-13
      NN=5
      DO 1 II=1,KP
      IT=1
      Z=ZNY(II)
      HR=ZL(Z)
      HZ=ZFL(Z)
      WRITE(6,1022)II,HR,HZ
 1022 FORMAT(/10X,'EM NYU-',I1,/,10X,'LAMBDA=',2D26.15,/,10X,'DERIVADA
     1         DE LAMBDA=',2D26.15)
    2 ZLAM=ZL(Z)
      ZFLA=ZFL(Z)
      IF(CDABS(ZFLA).LT.EPS) GO TO 3
      GO TO 4
    3 Z=Z+1.D-05
      GO TO 2
    4 Z1=Z-ZLAM/ZFLA
      WRITE(6,1020)IT
 1020 FORMAT(/10X,'ITERAÇÃO=',I3)
      DO 5 I1=1,4
      EP1=1.D-03*1.D-02**(I1-1)
      ZL1=ZL(Z1+EP1)
      ZL2=ZL(Z1+2*EP1)
      ZL3=ZL(Z1-EP1)
      ZL4=ZL(Z1-2*EP1)
    5 WRITE(6,1023)Z1,EP1,ZL1,ZL2,ZL3,ZL4
 1023 FORMAT(/10X,'TESTE DAS ITERAÇÕES,Z=',2D30.15,/,10X,'EP1=',D15.2,
     1       /10X,2D20.2))
      IF(CDABS(Z1-Z).LT.EPS) GO TO 7
      Z=Z1
      IT=IT+1
      IF(IT.LE.NN) GO TO 2
      WRITE(6,1019)
```

```
1019 FORMAT(/10X,'ITERAÇÃO FALHOU')
     GO TO 100
   7 WRITE(6,1020)I1,Z1
1020 FORMAT(/10X,'RAIZ CONVERGENTE,I=',I2,//,10X,D30.15)
   1 CONTINUE
 100 CONTINUE
     NL=NL+1
     IF(NL-1)96,96,97
  97 CONTINUE
     STOP
     END
     FUNCTION ZL(Z)
     ZT(H)=DLOG((1.D0+H)/(1.D0-H))/2.D0
     ZP=Z*Z
     W12=A11+A22+2.D0*A*ZP
     W22=C11+(S*A11+2.D0*C11*A22-2.D0*C12*A21)*ZP+2.D0*S*A*ZP*ZP
     W32=C22+(A22+2.D0*C22*A11-2.D0*C21*A12)*ZP+2.D0*A*ZP*ZP
     W42=C+(S*C22*A11+C11*A22-C12*A21-S*C21*A12)*ZP+S*A*ZP*ZP
     ZL=1.D0+2.D0*ZP*W12-2.D0*Z*W22*ZT(1.D0/S/Z)-2.D0*Z*W32*ZT(1.D0/Z)
    1   +4.D0*ZP*W42*ZT(1.D0/S/Z)*ZT(1.D0/Z)
     RETURN
     END
     FUNCTION ZFL(Z)
     ZTL(H)=1.D0/(1.D0-H*H)
     ZT(H)=DLOG((1.D0+H)/(1.D0-H))/2.D0
     ZP=Z*Z
     WL1=4.D0*A*Z
     WL2=(S*A11+2.D0*C11*A22-2.D0*C12*A21)*2.D0*Z+8.D0*S*A*ZP*Z
     WL3=(A22+2.D0*C22*A11-2.D0*C21*A12)*2.D0*Z+8.D0*A*ZP*Z
     WL4=(S*C22*A11+C11*A22-C12*A21-S*C21*A12)*2.D0*Z+4.D0*S*A*ZP*Z
     ZFL=4.D0*Z*W12+2.D0*ZP*WL1-2.D0*W22*ZT(1.D0/Z)-2.D0*Z*WL2*
    1     ZT(1.D0/S/Z)-2.D0*Z*W22*ZTL(S*Z)*S-2.D0*W32*ZT(1.D0/Z)-2.D0*Z*
    2     WL3*ZT(1.D0/Z)-2.D0*Z*W32*ZTL(Z)+8.D0*Z*W42*ZT(1.D0/S/Z)*
    3     ZT(1.D0/Z)+4.D0*ZP*WL4*ZT(1.D0/S/Z)*ZT(1.D0/Z)+4.D0*ZP*ZTL(S*Z
    4     )*S*ZT(1.D0/Z)+4.D0*ZP*W42*ZT(1.D0/S/Z)*ZTL(Z)
     RETURN
     END
```

ABSTRACT

Typical half-space problems in two-group neutron transport theory are solved numerically using the singular-eigenfunction-expansion technique, considering isotropic and linearly anisotropic scattering.

Numerical results are reported for the Albedo, Milne and Constant-Source problems in a half-space pure light-water medium using isotropic scattering data set of Metcalf and Zweifel and considering various degrees of anisotropy.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BOSLER, G. E. & METCALF, D. R. Critical slab solution to the two-group neutron-transport equation for linearly anisotropic scattering. *Trans. Am. nucl. Soc.*, 15(2): 913-4, Nov. 1972.

2. BURNISTON, E. E. & SIEWERT, C. E. The use of Reimann problems in solving a class of transcendental equations. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 73(1):111-8, Jan. 1973.

3. ______ et alii. Matrix Reimann-Hilbert problems related to neutron transport theory. *Nucl. Sci. Engng.*, 45(3):331-2, Sep. 1971.

4. ______ et alii. Steady-state solutions in two-group theory of neutron diffusion. *J. math. Phys.*, 13(10):1461-5, Oct. 1972.

5. CASE, K. M. Elementary solutions of the transport equation and their applications. *Ann. Phys.*, 9:1-23, 1960.

6. ______ et alii. *Linear transport theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1967.

7. CHANDRASEKHAR, S. *Radiactive transfer*. London, Oxford University Press, s.d.

8. CLARK, Jr., M. & HANSEN, K. F. *Numerical methods of reactor analysis*. New York, Academic Press, 1964.

9. ISHIGURO, Y. *Two-group neutron-transport theory with linearly anisotropic scattering: half-range orthogonality and critical slab problem*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, ago. 1973. (IEA-306).

10. ______ et alii. *Two-group Milne Problem: a numerical study of the effect of scattering anisotropy*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, dez. 1974. (IEA-368).

11. JORGE, E. & ISHIGURO, Y. Two-group transport calculations with linearly anisotropic scattering. *Trans. Am. nucl. Soc.*, 22:353, Nov. 1975.

12. KAPER, H. G. Elementary solutions of the reduced three-dimensional transport equation. *J. math. Phys.*, 10(2):286-97, Feb. 1969.

13. KRIESE, J. T. & SIEWERT, C. E. An expedient method for calculating H-matrices. *Astrophys. J.*, 164:389-91, 1971.

14. ______ et alii. Two-group critical problems for slabs and spheres. *Nucl. Sci. Engng.*, 50(1):3-9, Jan. 1973.

15. LEONARD, A. & FERZIGER, J. H. Energy-dependent neutron transport theory in plane geometry. 3. Half-range completeness and half space problems. *Nucl. Sci. Engng.*, 26(2):181-91, Oct. 1966.

16. METCALF, D. R. & ZWEIFEL, P. F. Solution of the two-group neutron transport equation. I. *Nucl. Sci. Engng.*, 33(3):307-17, Sep. 1968.

17. ______ & ZWEIFEL, P. F. Solution of the two-group neutron transport equation II. *Nucl. Sci. Engng.*, 33(3):318-26, Sep. 1968.

18. PAHOR, S. Albedo and Milne's problem for thermal neutrons. *Nucl. Sci. Engng.*, 31(1):110-6, Jan. 1968.

19. ______. A new approach to half-space transport problems. *Nucl. Sci. Engng.*, 26(2):192-99, Oct. 1966.

20. ______. One-speed neutron transport in slab geometry. *Nucl. Sci. Engng.*, 29(2):248-53, Aug. 1967.

21. ______ & SHULTIS J. K. Half-space general multigroup transport theory. *J. Nucl. Energy*, 23(8):477-93, 1969.

22. REITH, R. J. & SIEWERT, C. E. Two-group neutron transport theory with anisotropic scattering. *Nucl. Sci. Engng.*, 47(1):156-62, Jan. 1972.

23. SCHNATZ, T. W. & SIEWERT, C. E. Two-group transport theory in spherical geometry. *J. math. Phys.*, 11(3):766-71, Mar. 1970.

24. SCHULTIS, J. K. Anisotropic multigroup transport theory. *Nucl. Sci. Engng.*, 38(2):83-93, Nov. 1969.

25. SIEWERT, C. E. An the half-range orthogonality theorem appropriate to the scattering of polarized light. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 12:683-94, 1972.

26. ______ & ISHIGURO, Y. Two-group neutron transport theory: half-range orthogonality, normalization integrals, applications and computation. *J. Nucl. Energy*, 26(5):251-69, 1972.

27. ______ & SHIEH, P. S. Two group transport theory. *J. Nucl. Energy*, 21(5):383-92, 1967.

28. ______ & ZWEIFEL P. F. An exact solution of equations of radioactive transfer for local thermodynamic equilibrium in the nongray case. Picket fence approximation. *Ann. Phys.*, 36(1): 61-85, Jan. 1966.

29. ______ & ZWEIFEL, P. F. Radiactive transfer, II. *J. math. Phys.*, 7(11):2092-102, Nov. 1966

30. ______ et alii. Two-group neutron-transport theory: existence and uniqueness of the H-matrix. *J. nucl. Energy*, 26(9):469-82, 1972.

31. SILVENNOINEN, P. & ZWEIFEL, P. F. On the discrete spectrum of the transport operator. *Nucl. Sci. Engng.*, 42(1):103-4, Oct. 1970.

32. ______ & ZWEIFEL, P. F. On multigroup transport theory with a degenerate transfer Kernel. *J. math. Phys.*, 13(8):1114-7, Aug. 1972.

33. YOSHIMURA, T. & KATSURAGI, S. Multigroup treatment of neutron transport in plane geometry. *Nucl. Sci. Engng.*, 33(3):297-302, Sep. 1968.

34. ZELAZNY, R. & KUSZELL, A. Two-group approach in neutron transport theory in plane geometry. *Ann. Phys.*, 16(1):81-95, Oct. 1961.

INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA
Caixa Postal, 11049 – Pinheiros
CEP 05508
01000 – São Paulo – SP

Telefone: 211-6011
Endereço Telegráfico – IEATOMICA
Telex – 011-23592 IENA BR