

MAR 78

ER-1000



**O PROBLEMA DA CRITICALIDADE PARA REATORES TIPO PLACA
REFLETIDA NA TEORIA DE TRANSPORTE EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA**

Roberto David Martinez Garcia

DISSERTAÇÃO E TESE - IEA 049

ABRIL/1978

**O PROBLEMA DA CRITICALIDADE PARA REATORES TIPO PLACA
REFLETIDA NA TEORIA DE TRANSPORTE EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA**

R. L. do David Martinez Garcia

**Disertação para obtenção do Título de "Mestre em
Ciência e Tecnologia Nucleares" – Orientador Prof. Dr.
Yuji Ishiguro. Apresentada e defendida em 28 de Junho de
1977, na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.**

APROVADA PARA PUBLICAÇÃO EM JULHO/1977.

CONSELHO DELIBERATIVO

MEMBROS

Klaus Reinach - Presidente
Roberto D'Utra Vaz
Helcio Modesto de Costa
Ivano Humbert Marchesi
Admar Cavallini

PARTICIPANTES

Régine Elisabete Azevedo Beretta
Flávio Gori

SUPERINTENDENTE

Rômulo Ribeiro Pieroni

INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA
Caixa Postal 11.049 (Pinheiros)
Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
SÃO PAULO - BRASIL

ÍNDICE

	Página
1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – Métodos Aplicados na Teoria de Transporte	1
1.2 – Histórico	3
1.3 – Objetivo	4
2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS	5
2.1 – A Equação de Transporte em Geometria Plana no Modelo de Dois Grupos de Energia e Espelhamento Isotrópico	5
2.2 – Solução pelo Método de Expansão em Autofunções Singulares (Método do Case) ...	9
2.3 – O Método da Invariança ("Invariant Imbedding") e a Matriz H	13
2.4 – Propriedades de Ortogonalidade de Meio Intervalo dos Autovetores de Case e Integrais de Normalização	15
3 – O PROBLEMA DA CRITILIDADE	18
4 – RESULTADOS NUMÉRICOS	27
5 – CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES	32
APÊNDICE A – TABELA DE INTEGRAIS	39
APÊNDICE B – PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL	43
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

O PROBLEMA DA CRITICALIDADE PARA REATORES TIPO PLACA REFLETIDA NA TEORIA DE TRANSPORTE EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA

Roberto David Martinez Garcia

RESUMO

O problema da criticalidade para reatores a placa refletida é resolvido pela primeira vez no modelo de dois grupos de energia e espalhamento isotrópico em teoria de transporte, utilizando-se o método de expansão em autofunções singulares.

As integrais singulares que se obtêm com a aplicação da condição de continuidade da distribuição angular na interface são regularizadas por meio de um método recentemente proposto, resultando num sistema acoplado de equações integrais regulares para os coeficientes da expansão, que é resolvido por uma técnica iterativa comum.

Apresentam-se resultados numéricos que podem servir como padrão em comparações com resultados de métodos aproximados.

1 – INTRODUÇÃO

1.1 – Métodos Aplicados na Teoria de Transporte

A teoria de transporte teve suas origens ligadas aos primeiros estudos sobre transferência de radiação luminosa, no fim do século passado. Com o advento dos reatores nucleares, a teoria aplicada na Astrofísica foi reformulada para o estudo da distribuição de nêutrons em meios materiais, pois o conhecimento do comportamento neutrônico é básico para o projeto de reatores.

O fenômeno de transporte de nêutrons é descrito por uma equação fundamental denominada equação de transporte ou de Boltzmann, deduzida a partir de considerações de conservação do número de nêutrons em um elemento de volume, de maneira semelhante a outros fenômenos, como condução de calor, transferência de massa etc. A grandeza básica dessa equação é a densidade angular de nêutrons que, no caso mais geral, é função de

- posição (r)^{*}
- direção de movimento do nêutron (Ω)
- energia do nêutron (E)
- tempo (t)

A equação de Boltzmann descreve o comportamento médio da população de nêutrons num meio material, fazendo uso de parâmetros conhecidos como secções de choque, para caracterizar as

* Notação: Neste trabalho, o til colocado embaixo da representação de uma dada grandeza, significa que essa grandeza é um vetor ou matriz. O til colocado em cima representa a operação de transposição.

probabilidades de ocorrência de determinados tipos de interação entre os nêutrons e o meio. As seções de choque dependentes da energia são usualmente determinadas por processos experimentais e corrigidas, quando necessário, com métodos teóricos desenvolvidos pela Física Nuclear. Portanto, a teoria de transporte utiliza estes parâmetros para prever o resultado líquido ou macroscópico de um número extremamente grande de interações que ocorrem no meio material, a nível nuclear.

Limitou-se o presente estudo à situação estacionária em geometria plana com simetria azimutal, portanto considerar-se-á a densidade angular $N = N(z, \mu, E)$, onde $\mu = \cos \theta$ e θ é o ângulo compreendido entre o eixo z e a direção de movimento do nêutron.

Para tratar a dependência energética, dado que as seções de choque que caracterizam o meio exibem geralmente um comportamento complicado com a energia, o método mais comum é proceder-se a uma partição do intervalo de energia de interesse em um certo número de sub-intervalos, denominados grupos de energia, sendo os termos dependentes da energia tomados como valores médios em cada grupo. Evidentemente, em princípio, quanto maior o número de grupos escolhidos, maior a identidade entre modelo e realidade física; no entanto, é importante estabelecer-se um certo critério na escolha, para fins computacionais. Melhor dizendo, não é necessário tomar-se muitos grupos quando se sabe que os parâmetros não variam muito com a energia em determinada região. Além deste modelo, denominado modelo de multigrupos, há outro, o modelo contínuo de energia, em que, como o nome diz, a energia é tratada como variável contínua. Normalmente, ou a dependência energética é aproximada por funções simples, quando possível, ou é expandida em polinômios com intervalo de definição conveniente (de zero a infinito), como é o caso dos polinômios de Chebyshev-Laguerre.

Dado ainda que o fenômeno de espalhamento exhibe anisotropia, costuma-se expandir a dependência angular das seções de choque em polinômios de Legendre, truncando-se a série num certo termo. Por exemplo, tomando-se somente o termo de ordem zero corresponde ao emprego do modelo de espalhamento isotrópico; tomando-se em adição o termo de ordem um ao emprego do modelo de espalhamento linearmente anisotrópico e assim por diante.

Soluções exatas da equação de transporte, mesmo com limitações que reduzem o número de variáveis em jogo, só podem ser obtidas para problemas idealizados. Portanto, no início do desenvolvimento dos reatores nucleares, optou-se por uma versão simplificada da teoria de transporte, a chamada teoria da difusão, que, apesar de não fornecer a mesma exatidão, simplifica bastante as soluções, ignorando a dependência angular do fluxo de nêutrons e impondo uma direção preferencial para o movimento dos nêutrons, através da lei de Fick⁽²¹⁾.

A principal limitação da teoria de difusão é que, em virtude de suas hipóteses simplificadoras, não oferece bons resultados próximo a contornos físicos, interfaces e fontes. Para reatores pequenos como os reatores de pesquisa, por exemplo, este ponto é crucial.

Atualmente, em problemas práticos, principalmente cálculos de células, onde as limitações da teoria da difusão ficam evidenciadas, vem sendo empregadas soluções aproximadas da teoria de transporte, como o método de ordenadas discretas (S_N) e o método de expansão em polinômios de Legendre (P_N). Estas soluções visam aproximar a dependência angular do fluxo de nêutrons.

No método P_N , desenvolvido por Mark⁽²⁴⁾, a dependência angular é expandida em polinômios de Legendre (no caso de geometria plana com simetria azimutal) e truncada após o termo de ordem N , para fins computacionais.

O método S_N , devido a Carlson⁽⁵⁾, utiliza um número N de direções discretas para aproximar a dependência angular, transformando em somatórias as integrais angulares que aparecem na equação de transporte e em diferenças as derivadas espaciais.

A vantagem destes métodos reside no fato de seu poder de aplicação ser bastante vasto em problemas práticos. A importância principal das soluções exatas da teoria de transporte está, portanto, em servirem de padrão para comparação com soluções aproximadas, uma vez que sua aplicação em problemas reais é limitada.

O primeiro método utilizado na obtenção de soluções exatas de problemas na teoria de transporte foi o da transformada de Fourier. Consiste em se aplicar a transformada nas variáveis espaciais do fluxo angular. Após manipulações algébricas, a solução é encontrada por meio da anti-transformada. A desvantagem do método está na dificuldade de se calcular as anti-transformadas, limitando assim o método a uma classe reduzida de problemas.

Outro método, largamente empregado na obtenção de soluções exatas, é conhecido como método de expansão em autofunções singulares ou método de Case, sendo assim chamado em virtude de ter sido desenvolvido no início principalmente por K. M. Case⁽⁶⁾. A essência do método consiste numa separação de variáveis conveniente, resultando num conjunto completo de autofunções ortonormais que expandem o fluxo angular. Assim, a solução é dada por uma expansão em termos das autofunções, com coeficientes a determinar através da aplicação das condições de contorno e com a utilização das propriedades de ortogonalidade e normalização dessas autofunções.

A vantagem adicional deste método, portanto, é a maneira clássica e sistemática com que soluções de problemas de contorno são construídas, permitindo a aplicação da mesma teoria matemática⁽²⁸⁾ em outros campos, como física do plasma, propagação do som etc.

O trabalho inicial de Case e vários outros que se seguiram ficaram limitados ao modelo de um grupo de energia. Em 1961 surgiu o primeiro trabalho publicado sobre o modelo de dois grupos de energia e em 1968 sobre o modelo de multigrupos⁽³⁷⁾, utilizando o método de Case.

Uma abordagem diferente da teoria de transporte foi introduzida por Ambaumian na Astrofísica⁽²⁾. O método empregado é conhecido como método da invariância ("invariant imbedding") por formular equações integrais para funções que descrevem a reflexão e transmissão de radiação, utilizando princípios de invariância, os quais foram posteriormente sistematizados numa teoria geral por Chandrasekhar⁽⁹⁾. O método foi a seguir aplicado na teoria de transporte de nêutrons.

Além dos métodos mencionados, existem outros que não serão citados, por fugirem do escopo deste trabalho.

1.2 – Histórico

No que se refere aos métodos aproximados S_N e P_N , o desenvolvimento analítico básico foi estabelecido nos primeiros trabalhos^(5,24) e, portanto, todo o esforço foi colocado em aplicações práticas e no aperfeiçoamento das técnicas numéricas utilizadas.

Quanto ao método de Case e da invariância, a par do progressivo aumento no número de problemas solucionados, o desenvolvimento analítico vem ainda sendo construído no decorrer dos anos. Por isto, pensou-se em apresentar aqui um breve resumo histórico do desenvolvimento destes métodos.

Com a publicação do trabalho de Case⁽⁶⁾, vários foram os problemas solucionados no modelo de um grupo de energia e geometria plana, utilizando o novo método. Pode-se citar, entre outros, o problema do reator tipo placa, sem refletores, resolvido por Zelazny⁽³⁸⁾ e o mesmo problema, com a placa constituída por várias camadas de materiais diferentes e com refletores, resolvido por Kuzell⁽²⁰⁾. Ao mesmo tempo, a consistência matemática foi plenamente estabelecida, com a demonstração dos teoremas da existência e unicidade das soluções por Case e Zweifel⁽⁷⁾.

Todos os trabalhos acima referidos fazem uso de propriedades de ortogonalidade de intervalo completo, isto é, para $\mu \in (1, 1)$, o que tornava a sua aplicação para problemas de um meio semi-infinito e problemas de dois ou mais meios adjacentes bastante trabalhosa. O desenvolvimento de propriedades de semi-intervalo, para $\mu \in (0, 1)$, por Kuscer et al.⁽¹⁹⁾ tornou mais simples as soluções desses problemas. Assim, os autores solucionaram o problema de um semi-espaço infinito e, entre outros, McCormick e

Mendelson⁽²³⁾ resolveram problemas de meios finitos, como o problema do albedo. Vários foram os problemas resolvidos considerando espalhamento anisotrópico^(22,30), como também surgiram soluções para problemas em geometria cilíndrica e esférica^(10,27).

No modelo de dois grupos de energia, o método de Case foi utilizado primeiramente por Zelazny e Kuszell⁽³⁹⁾. Posteriormente, Siewert e Shieh⁽³⁴⁾ deram um tratamento matemático mais elaborado ao modelo, ao discutir o teorema da completividade das autofunções para expansões de intervalo completo, bem como propriedades de ortogonalidade e normalização, ainda que restrito a problemas de meios infinitos.

Para problemas de meios semi-infinitos e finitos, uma abordagem diferente surgia com a idéia de Pahor e Zweifel⁽²⁹⁾, ao empregarem uma combinação do método de Case com princípios de invariança desenvolvidos por Chandrasekhar para obter a distribuição de nêutrons emergente da superfície de um meio semi-infinito, conhecendo-se a incidente. Siewert e Ishiguro⁽³³⁾, indo além, conseguiram obter a solução completa no interior de um meio semi-infinito, utilizando propriedades de ortogonalidade de meio intervalo com a matriz-peso escrita em termos de uma matriz H, relacionada com a matriz de espalhamento S, sendo a sua existência e unicidade provada por Siewert et al.⁽³²⁾, e Burniston et al.⁽⁴⁾. Anteriormente, Metcalf e Zweifel^(25,26) haviam obtido soluções para problemas de meios semi-infinitos, porém, no método por eles utilizado, os coeficientes da expansão obtidos com o uso de propriedades de ortogonalidade das autofunções de Case são dados por um sistema acoplado de equações integrais singulares, que requer tratamento especial na análise numérica. O mérito do método de Siewert e Ishiguro foi obter equações integrais regulares para os coeficientes da expansão. Problemas de um meio semi-infinito e da placa crítica, sem refletores, foram solucionados com este método, no modelo de espalhamento isotrópico^(18,33) e linearmente anisotrópico⁽¹⁴⁾. Foi feita uma comparação numérica entre resultados obtidos em ambos os modelos por Ishiguro e Jorge⁽¹⁵⁾.

Uma classe de problemas de difícil solução no modelo de dois grupos é a de problemas de dois ou mais meios adjacentes. Jahuo e Rajamaki⁽¹⁷⁾ consideraram problemas de dois meios dependentes da energia, mas não reportaram resultados numéricos. Soluções que recaem em sistemas de equações integrais singulares foram obtidas⁽³⁶⁾, porém, como já foi dito, a análise numérica é trabalhosa.

Ishiguro e Maiorino⁽¹⁶⁾ resolveram o problema de Milne em dois semi-espacos adjacentes, combinando o método de Case com o princípio da invariança, no modelo de dois grupos. No entanto, o método não obteve sucesso em problemas envolvendo meios finitos, apesar de ter sido aplicado por Siewert e Burkart⁽³¹⁾ na solução do problema da criticalidade para reatores tipo placa refletida, no modelo de um grupo.

Porém, com um novo método de aplicação de condições de contorno e regularização de singularidades proposto por Ishiguro^(12,13) foi possível obter equações integrais regulares para os coeficientes da expansão em autofunções de Case, tanto no modelo de um como no de dois grupos, para problemas envolvendo dois ou mais meios adjacentes, finitos ou não.

1.3 – Objetivo

O objetivo deste trabalho é apresentar a solução de um problema clássico da teoria da difusão, anteriormente sem solução exata na teoria de transporte, o problema da placa crítica com refletores de extensão infinita, no modelo de dois grupos de energia e espalhamento isotrópico, mostrando a viabilidade do novo método referido anteriormente para o problema em questão.

São apresentados ainda, no Capítulo 4, resultados numéricos que podem ser utilizados como padrão em comparações com resultados de métodos aproximados.

2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo são expostos os fundamentos teóricos necessários, numa forma resumida, para o modelo de dois grupos, já que os detalhes podem ser encontrados em vários trabalhos citados nas Referências Bibliográficas. Para o modelo de um grupo, o detalhamento é encontrado na bibliografia básica^(3,8).

2.1 – A Equação de Transporte em Geometria Plana no Modelo de Dois Grupos de Energia e Espalhamento Isotrópico

A equação geral de transporte, deduzida a partir de considerações de conservação do número de nêutrons num elemento de volume localizado numa posição r , é escrita como

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, \Omega, E, t) + \Omega \cdot \text{grad} \Psi(r, \Omega, E, t) + \sigma(r, E, t) \Psi(r, \Omega, E, t) = \int_{E'} \int_{\Omega'} \sigma(r, E', t) f(r; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Psi(r, \Omega', E', t) d\Omega' dE' + Q(r, \Omega, E, t) \quad (2.1.1)$$

onde

$\Psi(r, \Omega, E, t)$ – Fluxo angular de nêutrons, definido como o produto da velocidade de escalar pela densidade angular local (número médio de nêutrons na posição r , com velocidade na direção Ω e energia E no tempo t , por unidade de volume, ângulo sólido e energia). Portanto: $\Psi(r, \Omega, E, t) = vN(r, \Omega, E, t)$.

$\sigma(r, E, t)$ – Secção de choque macroscópica total, que representa a probabilidade de interação entre um nêutron e o meio, por unidade de comprimento de deslocamento do nêutron.

$f(r; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)$ – Função transferência, definida de modo que $\sigma(r, E', t) f(r; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) d\Omega' dE$ descreve a probabilidade por unidade de comprimento de um nêutron com direção Ω' e energia E' ao sofrer uma colisão com um núcleo em r , emergir com direção entre Ω e $\Omega + d\Omega$ e energia entre E e $E + dE$.

$Q(r, \Omega, E)$ – Número de nêutrons introduzidos na posição r por fontes externas, por unidade de volume, ângulo sólido, energia e tempo.

A equação de transporte, na forma da Equação (2.1.1), não leva em conta os seguintes efeitos:

- Flutuações estatísticas na densidade angular de nêutrons. Este estudo pode ser feito utilizando-se outras teorias, como a análise de Fourier.
- Colisões nêutron-nêutron. Não são relevantes, devido às baixas densidades relativas de nêutrons normalmente presentes nos reatores.
- Correções relativísticas. Nos casos de interesse para a engenharia nuclear não há necessidade de se considerar os nêutrons de energia muito alta, onde as correções relativísticas seriam importantes.

- Nêutrons atrasados. Importante no estudo do comportamento temporal dos reatores nucleares.*
- Dependência angular das secções de choque, que ocorre em casos muito raros, como alguns cristais.
- Tempo de colisão entre o nêutron e o núcleo.
- Comportamento ondulatorio. O nêutron é considerado como uma partícula pontual, descrita completamente por sua posição e velocidade.
- Efeitos de polarização, oriundos do "spin" e momento magnético do nêutron, que são desprezados devido à sua pequena magnitude.

Pode-se portanto, afirmar que, principalmente para o caso estacionário, onde os nêutrons atrasados não desempenham papel importante, a equação de transporte traduz bem a realidade física. Porém, soluções exatas dessa equação são difíceis, não só pelos métodos matemáticos que devem ser aplicados, como também por dificuldades de caráter físico, como a complicada dependência energética das secções de choque e a estreita correlação que existe entre secções de choque e fluxo angular.

Considerando-se o caso estacionário, em geometria plana com simetria azimutal (simetria na superfície de qualquer cone gerado em torno do eixo z), a equação de transporte reduz-se a

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z, \mu, E) + \sigma(z, E) \Psi(z, \mu, E) = \int_{E'} \int_{\Omega'} \sigma(z, E') f(z; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Psi(z, \mu', E') d\Omega' dE' + Q(z, \mu, E) \quad (2.1.2)$$

onde $\mu = \underline{k} \cdot \underline{\Omega} = \cos \theta$, sendo \underline{k} o versor na direção z.

Considerando que as secções de choque não variam com a posição num meio uniforme e que a função transferência depende somente do coseno do ângulo de espalhamento $\mu_0 = \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}'$, em termos angulares, pode-se expandir o termo de transferência em polinômios de Legendre. Assim

$$\sigma(E') f(E' \rightarrow E; \mu_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \sigma_{\ell}(E' \rightarrow E) P_{\ell}(\mu_0)$$

Retendo-se apenas o termo de ordem $\ell=0$ (espalhamento isotrópico), a Equação (2.1.2) pode ser escrita como

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z, \mu, E) + \sigma(E) \Psi(z, \mu, E) = \frac{1}{2} \int_{E'} \int_{\mu'} \sigma_0(E' \rightarrow E) \Psi(z, \mu', E') d\mu' dE' + Q(z, \mu, E) \quad (2.1.3)$$

* Alguns estudos da equação de transporte dependente do tempo foram feitos, porém as custas de uma falsa descrição espacial. Além disto, como a existência dos nêutrons atrasados deve ser considerada, trabalha-se simultaneamente com as equações dos precursores, o que complica o problema.

O intervalo total de energia é dividido em dois grupos. Integrando a Equação (2.1.3) nos dois sub-intervalos de energia, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi_1(z, \mu) + \sigma_1 \Psi_1(z, \mu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{11}^{(0)} \Psi_1(z, \mu') d\mu' + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{12}^{(0)} \Psi_2(z, \mu') d\mu' + q_1(z, \mu) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

e

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi_2(z, \mu) + \sigma_2 \Psi_2(z, \mu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{21}^{(0)} \Psi_1(z, \mu') d\mu' + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{22}^{(0)} \Psi_2(z, \mu') d\mu' + q_2(z, \mu) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

onde, por definição

$$\Psi_i(z, \mu) = \int_i \Psi(z, \mu, E) dE$$

$$\sigma_i = \frac{\int_i \sigma(E) \Psi(z, \mu, E) dE}{\int_i \Psi(z, \mu, E) dE}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{j+i}^{(0)} = \frac{\int_j \Psi(z, \mu', E') \int_i \sigma_o(E' + E) dE dE'}{\int_j \Psi(z, \mu', E') dE'}$$

$$q_i(z, \mu) = \int_i Q(z, \mu, E) dE$$

para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$.

As secções de choque médias de grupo σ_i e $\sigma_{ij}^{(0)}$, seguindo as definições acima, deveriam ser escritas como funções de z e μ . No entanto, evita-se, sempre que possível, trabalhar com secções de choque dependentes de z e μ , para simplificar o problema. A maneira usual é assumir a separabilidade do fluxo angular em funções de z , μ e E , o que muitas vezes não é uma boa suposição. Métodos melhores são apresentados na literatura⁽³⁾.

A secção de choque de transferência $\sigma_{ij}^{(0)}$ é dada por

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{sij}^{(0)} + \chi_i \nu_j \sigma_{fj}$$

onde $\sigma_{sij}^{(0)}$ representa a secção de choque macroscópica de transferência do grupo j para o grupo i por espalhamento isotrópico, σ_{fj} é a secção de choque macroscópica de fissão do grupo j , ν_j é o número médio de nêutrons emitidos por fissão gerada por nêutrons do grupo j e χ_i é definido como a fracção de nêutrons de fissão que aparecem no grupo i .

Com uma escolha adequada dos grupos de energia, tem-se sempre $\sigma_1 > \sigma_2$. Dividindo as Equações (2.1.4) e (2.1.5), com os termos de fontes externas iguais a zero, por σ_2 , obtém-se as equações escritas em termos de uma variável adimensional $x = \sigma_2 z$, medida em livres caminhos médios entre colisões do grupo 2 e denominada variável ótica.

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1(x, \mu) + \sigma \Psi_1(x, \mu) = q_{11} \int_{-1}^1 \Psi_1(x, \mu') d\mu' + q_{12} \int_{-1}^1 \Psi_2(x, \mu') d\mu' \quad (2.1.6)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_2(x, \mu) + \Psi_2(x, \mu) = q_{21} \int_{-1}^1 \Psi_1(x, \mu') d\mu' + q_{22} \int_{-1}^1 \Psi_2(x, \mu') d\mu' \quad (2.1.7)$$

onde

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > 1 \quad \text{e} \quad q_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^{(0)}}{2\sigma_2}$$

Estas equações podem ser escritas na forma matricial

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{\Psi}(x, \mu) + \Sigma \mathbf{\Psi}(x, \mu) = \mathbf{Q} \int_{-1}^1 \mathbf{\Psi}(x, \mu') d\mu' \quad (2.1.8)$$

onde

$$\mathbf{\Psi}(x, \mu) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x, \mu) \\ \Psi_2(x, \mu) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

Supondo que a matriz \underline{Q} não seja diagonal ou triangular ($q_{12} \cdot q_{21} \neq 0$), define-se uma matriz

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{q_{21}}{q_{12}}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

fazendo a transformação $\underline{\Psi}(x,\mu) = \underline{P}^{-1} \underline{\Psi}(x,\mu)$, a equação (2.1.8) torna-se

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{P}^{-1} \underline{\Psi}(x,\mu) + \sum \underline{P}^{-1} \underline{\Psi}(x,\mu) = \underline{Q} \int_{-1}^1 \underline{P}^{-1} \underline{\Psi}(x,\mu') d\mu' \quad (2.1.9)$$

Multiplicando pela esquerda por \underline{P} se obtém

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{\Psi}(x,\mu) + \sum \underline{\Psi}(x,\mu) = \underline{C} \int_{-1}^1 \underline{\Psi}(x,\mu') d\mu' \quad (2.1.10)$$

onde $\underline{C} = \underline{P}\underline{Q}\underline{P}^{-1}$ é simétrica

O caso em que a matriz \underline{Q} é triangular pode ser resolvido em termos da teoria de um grupo, enquanto que o caso especial $\det \underline{Q} = 0$ foi resolvido por Siewert e Zweifel⁽³⁵⁾.

2.2 – Solução pelo Método de Expansão em Autofunções Singulares (Método de Case)

A solução da Equação (2.1.10) pelo método de Case tem sido empregada em vários trabalhos, conforme exposto no Capítulo 1, podendo ser escrita genericamente na forma^(33,34)

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(x,\mu) = & \sum_{l=1}^K [A_l^{(1)} \underline{\psi}_l^{(1)}(\nu,\mu) \exp(-x/\nu_l) + A_l^{(2)} \underline{\psi}_l^{(2)}(\nu,\mu) \exp(x/\nu_l)] + \\ & + \int_{(1)} [A_1^{(1)}(\nu) \underline{\psi}_1^{(1)}(\nu,\mu) + A_2^{(1)}(\nu) \underline{\psi}_2^{(1)}(\nu,\mu)] \exp(-x/\nu) d\nu + \\ & + \int_{(2)} A^{(2)}(\nu) \underline{\psi}^{(2)}(\nu,\mu) \exp(x/\nu) d\nu \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

onde κ é o número de pares de autovalores discretos $\pm \nu_i$, podendo ser igual a 1 ou 2, dependendo das propriedades físicas do meio⁽³⁴⁾, a região (1) de integração é o intervalo dos autovalores contínuos $\nu \in (-1/\sigma, 1/\sigma)$, a região (2) corresponde a $\nu \in (-1, -1/\sigma) \cup (1/\sigma, 1)$ e as autofunções de Case são escritas como

$$\underline{\Psi}(\pm \nu_i, \mu) = \nu_i \underline{K}(\nu_i, \pm \mu) \underline{C} \underline{U}(\nu_i) \quad (2.2.2)$$

$$\underline{U}_\alpha^{(1)}(\nu, \mu) = [\nu \underline{K}(\nu, \mu) \underline{C} + \delta(\nu, \mu) \underline{\lambda}(\nu)] \underline{U}_\alpha^{(1)}(\nu) \\ \nu \in \text{região (1)} \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.2.3)$$

$$\underline{U}_\alpha^{(2)}(\nu, \mu) = [\nu \underline{K}(\nu, \mu) \underline{C} + \delta(\nu, \mu) \underline{\lambda}(\nu)] \underline{U}_\alpha^{(2)}(\nu) \\ \nu \in \text{região (2)} \quad (2.2.4)$$

Nestas fórmulas, definem-se as matrizes

$$\underline{K}(\nu_i, \pm \mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sigma \nu_i \mp \mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\nu_i \mp \mu} \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

$$\underline{K}(\nu, \mu) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ \frac{P}{\sigma \nu - \mu} & 0 \\ C & \frac{P}{\nu - \mu} \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

$$\underline{\delta}(\nu, \mu) = \begin{bmatrix} \delta(\sigma \nu - \mu) & 0 \\ 0 & \delta(\nu - \mu) \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

$$\underline{\lambda}(\nu) = \underline{I} + \nu \int_{-1}^1 \frac{\underline{\theta}(\mu)}{\mu - \nu} d\mu \underline{C} \quad (2.2.8)$$

onde P indica que as integrais devem ser avaliadas em termos do valor principal de Cauchy, δ indica a distribuição delta de Dirac, $\underline{1}$ é a matriz-unidade de ordem 2 e $\underline{\theta}(\mu)$ é definida como

$$\underline{\theta}(\mu) = \begin{bmatrix} \theta(\mu) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \in \text{região (1)} \\ 0, & \mu \in \text{região (2)} \end{cases}$$

Os vetores de normalização são dados por

$$\underline{U}(\nu_i) = \begin{bmatrix} -\Lambda_{12}(\nu_i) \\ \Lambda_{11}(\nu_i) \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

$$\underline{U}_1^{(1)}(\nu) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{U}_2^{(1)}(\nu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

$$\underline{U}^{(2)}(\nu) = \begin{bmatrix} -\lambda_{12}(\nu) \\ \lambda_{11}(\nu) \end{bmatrix} \quad \nu \in \text{região (2)} \quad (2.2.11)$$

onde $\Lambda_{m\eta}(z)$ são elementos da matriz de dispersão

$$\underline{\Lambda}(z) = \underline{1} - z \int_{-1}^1 \underline{\theta}(\mu) \frac{d\mu}{z-\mu} \underline{C}, \quad z \notin (-1,1) \quad (2.2.12)$$

Ainda na Equação (2.2.1), $A(\nu_i)$, $A(-\nu_i)$, $A_1^{(1)}(\nu)$, $A_2^{(1)}(\nu)$ e $A^{(2)}(\nu)$ representam os coeficientes da expansão em autofunções de Case, sendo determinados com a aplicação das condições de contorno específicas de cada problema.

Apesar da solução dada pela Equação (2.2.1) ter sido utilizada em diversos trabalhos^(16,18,33), pode-se escrevê-la numa forma mais compacta, introduzida na Referência 13:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(x,\mu) = & \sum_{i=1}^K [A(\nu_i) \underline{\Phi}(\nu_i,\mu) \exp(-x/\nu_i) + A(-\nu_i) \underline{\Psi}(-\nu_i,\mu) \exp(x/\nu_i)] + \\ & + \int_0^1 \underline{\Phi}(\nu,\mu) \underline{A}(\nu) \exp(-x/\nu) d\nu + \int_0^1 \underline{\Psi}(-\nu,\mu) \underline{A}(-\nu) \exp(x/\nu) d\nu \quad (2.2.13) \end{aligned}$$

onde os autovetores e coeficientes discretos são os mesmos da Equação (2.2.1), o autovetor contínuo é redefinido como a matriz 2×2

$$\underline{\Phi}(\nu, \mu) = \nu \underline{\zeta}(\nu, \mu) \underline{\zeta} + \delta(\nu, \mu) \underline{\lambda}(\nu) \quad , \quad \nu \in (-1, 1) \quad , \quad (2.2.14)$$

e $\underline{A}(\pm \nu)$ é o vetor dos coeficientes contínuos definido por

$$\underline{A}(\pm \nu) = \begin{bmatrix} A_1^{(1)}(\pm \nu) \\ A_2^{(1)}(\pm \nu) \end{bmatrix} \theta(\nu) + A^{(2)}(\pm \nu) \underline{U}^{(2)}(\nu) [1 - \theta(\nu)] \quad . \quad (2.2.15)$$

A solução geral expressa pela Equação (2.2.13) é a forma que será utilizada. Os coeficientes, como já dissemos, são determinados a partir das condições de contorno, as quais dependem do tipo de problema, podendo ser classificados como

- De intervalo completo

Resultam numa expansão do tipo de

$$\begin{aligned} \underline{f}(\mu) = & \sum_{i=1}^K [A(\nu_i) \underline{\psi}(\nu_i, \mu) + A(-\nu_i) \underline{\psi}(-\nu_i, \mu)] + \\ & + \int_{-1}^1 \underline{\psi}(\nu, \mu) \underline{A}(\nu) d\nu \quad , \quad \mu \in (-1, 1) \quad . \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

- De meio intervalo

Resultam numa expansão do tipo de

$$\underline{g}(\mu) = \sum_{i=1}^K A(\nu_i) \underline{\psi}(\nu_i, \mu) + \int_0^1 \underline{\psi}(\nu, \mu) \underline{A}(\nu) d\nu \quad , \quad \mu \in (0, 1) \quad (2.2.17)$$

onde $\underline{f}(\mu)$ e $\underline{g}(\mu)$ são vetores conhecidos.

Foi provado que a expansão (2.2.16) é válida para qualquer vetor de Holder $\underline{f}(\mu)$, sendo também deduzidas propriedades de ortogonalidade e normalização de intervalo completo⁽³⁴⁾. No entanto, a aplicação prática dessas propriedades é muito limitada, pois, exceto para problemas de meio infinito, condições de contorno de intervalo completo podem ser divididas em duas condições de meio intervalo, tornando possível assim a utilização de propriedades de ortogonalidade e normalização de meio intervalo, unicamente⁽¹²⁾.

No que concerne a expansões de meio intervalo, foi provado que a expansão (2.2.17) é completa para qualquer vetor contínuo $g(\mu)$ ⁽³²⁾. Adota-se aqui a linha desenvolvida a partir do método da invariança, que exprime as propriedades de ortogonalidade e normalização com auxílio de uma matriz \underline{H} , sendo a demonstração da existência e unicidade desta matriz equivalente à prova da completividade das autofunções para expansões do tipo da Equação (2.2.17), conforme analisado na Referência 32. Após uma breve descrição do método da invariança, serão apresentadas as relações de ortogonalidade e normalização de meio intervalo necessárias a este trabalho e desenvolvidas na Referência 33.

2.3 – O Método da Invariança ("Invariant Imbedding") e a Matriz \underline{H}

No método da invariança, estabelece-se uma relação entre o fluxo angular emergente e o incidente no contorno de um semi-espaco homogêneo ($x \geq 0$) e não multiplicador, por meio da matriz de espalhamento $\underline{S}(\mu, \mu')$, assim definida:

$$\Psi(0, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}(\mu, \mu') \Psi(0, \mu') d\mu' \quad , \quad \mu \in (0, 1) \quad (2.3.1)$$

O princípio da invariança assegura que a distribuição angular emergente de um semi-espaco plano é invariante pela adição ou subtração de camada de espessura arbitrária do mesmo material. Portanto, como a Equação (2.3.1) é válida em qualquer posição x no material, tem-se que

$$\Psi(x, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}(\mu, \mu') \Psi(x, \mu') d\mu' \quad , \quad \mu \in (0, 1) \quad (2.3.2)$$

$$x \geq 0$$

A distribuição angular $\Psi(x, \pm \mu)$ deve satisfazer a equação de Boltzmann, portanto, usando as Equações (2.3.2) e (2.1.10) e o teorema da reciprocidade aplicado à matriz \underline{S} , obtém-se

$$\underline{S}(\mu, \mu') = \begin{bmatrix} S'_{11}(\mu/\sigma, \mu'/\sigma) & S'_{12}(\mu/\sigma, \mu') \\ S'_{21}(\mu, \mu'/\sigma) & S'_{22}(\mu, \mu') \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

onde S'_{ij} são os elementos da matriz

$$\underline{S}'(\mu, \mu') = \frac{2\mu\mu'}{\mu + \mu'} \underline{H}(\mu) \underline{C} \bar{\underline{H}}(\mu') \quad (2.3.4)$$

A matriz \underline{H} é definida por

$$\tilde{H}(\mu) = \underline{1} + \frac{1}{2} \int_0^1 \underline{\theta}(\mu') \underline{S}(\mu', \mu) \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (2.3.5)$$

portanto, introduzindo a Equação (2.3.4) no integrando da Equação (2.3.5) é obtida a equação integral para a matriz \underline{H} ,

$$\underline{H}(\mu) = \underline{1} + \mu \underline{H}(\mu) \underline{C} \int_0^1 \tilde{H}(\mu') \underline{\theta}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu + \mu'} \quad \mu \notin (-1, 0) \quad (2.3.6)$$

que pode ser resolvida por um método numérico-iterativo de rápida convergência.

O procedimento apresentado foi limitado a meios não multiplicadores. Porém, desde que Siewert et al.^[32] e Burniston et al.^[4] provaram a existência e unicidade da matriz \underline{H} para todos os possíveis meios físicos e desde que a Equação (2.2.13) é uma expansão válida para qualquer meio, as mesmas expressões e propriedades serão utilizadas para caracterizar a matriz \underline{H} em meios multiplicadores.

A matriz \underline{H} satisfaz as equações integrais

$$\nu_i \int_0^1 \tilde{H}(\mu) \underline{\theta}(\mu) \frac{d\mu}{\nu_i - \mu} \underline{C} \underline{U}(\nu_i) = \underline{U}(\nu_i) \quad i = 1, \dots, K \quad (2.3.7)$$

e

$$\tilde{H}(z) \underline{\Lambda}(z) = \underline{1} + z \int_0^1 \tilde{H}(\mu) \underline{\theta}(\mu) \frac{d\mu}{\mu - z} \underline{C} \quad z \notin (0, 1) \quad (2.3.8)$$

Tomando $z = \nu \pm i 0$ na Equação (2.3.8) obtemos

$$\tilde{H}(\nu) \underline{\Lambda}(\nu) = \underline{1} + \nu \int_0^1 \tilde{H}(\mu) \underline{\theta}(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \nu} \underline{C} \quad \nu \in (0, 1) \quad (2.3.9)$$

A matriz de dispersão $\underline{\Lambda}(z)$ pode ser escrita combinada com a matriz \underline{H} como

$$\underline{H}(-z) \underline{C} \tilde{H}(z) \underline{\Lambda}(z) = \underline{C} \quad z \notin (-1, 1) \quad (2.3.10)$$

Estas equações serão aplicadas livremente na solução de várias integrais deste trabalho, as quais estão listadas no Apêndice A. Por exemplo, usando a Equação (2.3.6) pode-se escrever

$$z \int_0^1 \bar{H}(\mu) \underline{\theta}(\mu) \frac{d\mu}{\mu+z} \underline{k} = \underline{C}^{-1} \underline{k} - \underline{C}^{-1} \bar{H}^{-1}(z) \underline{k} \quad , \quad z \notin (-1,0) \quad (2.3.11)$$

e usando a Equação (2.3.9)

$$\nu \int_0^1 \bar{H}(\mu) \underline{\theta}(\mu) \frac{P}{\nu-\mu} d\mu \underline{k} = \underline{C}^{-1} \underline{k} - \bar{H}(\nu) \underline{\lambda}(\nu) \underline{C}^{-1} \underline{k} \quad , \quad \nu \in (0,1) \quad (2.3.12)$$

onde \underline{k} é qualquer matriz quadrada de ordem 2.

2.4 – Propriedades de Ortogonalidade de Meio Intervalo dos Autovetores de Caso e Integrais de Normalização

As propriedades de ortogonalidade de meio intervalo dos autovetores da solução geral dada pela Equação (2.2.1) são apresentadas na Referência 33. Porém, como a solução será utilizada na forma da Equação (2.2.13), deve-se redefinir as funções-peso, também chamadas adjuntos.

O vetor adjunto discreto é o mesmo da Referência 33.

$$\underline{\theta}(\nu, \mu) = \nu_j \underline{K}(\nu, \mu) \underline{h}(\mu) \bar{H}^{-1}(\nu) \underline{C} \underline{U}(\nu_j) \quad , \quad j = 1, \dots, K. \quad (2.4.1)$$

onde $\underline{h}(\mu)$ é dada em termos dos elementos da matriz \underline{H} por

$$\underline{h}(\mu) = \begin{bmatrix} H_{11}(\mu/\sigma) & H_{12}(\mu/\sigma) \\ H_{21}(\mu) & H_{22}(\mu) \end{bmatrix}$$

Define-se a matriz adjunta contínua como

$$\underline{\theta}(\nu, \mu) = [\nu \underline{K}(\nu, \mu) \underline{h}(\mu) \bar{H}^{-1}(\nu) \underline{C} + \delta(\nu, \mu) \underline{\lambda}(\nu)] \underline{W}(\nu), \quad \nu \in (0,1) \quad (2.4.2)$$

onde a matriz simétrica $\underline{W}(\nu)$ é dada por

$$\underline{W}(\nu) = \begin{bmatrix} N_{22}(\nu) & -N_{21}(\nu) \\ -N_{12}(\nu) & N_{11}(\nu) \end{bmatrix} \theta(\nu) + \underline{U}^{(2)}(\nu) \bar{U}^{(2)}(\nu) [1 - \theta(\nu)] \quad , \quad (2.4.3)$$

sendo

$$N_{11}(\nu) = 1 - 4c_{11} \nu \tau(\sigma\nu) + 4\nu^2 [c_{11}^2 \tau^2(\sigma\nu) + c_{12} c_{21} \tau^2(\nu)] \\ + \pi^2 \nu^2 (c_{11}^2 + c_{12} c_{21}) \quad , \quad (2.4.4)$$

$$N_{ij}(\nu) = c_{ij} [4c_{11} \nu^2 \tau^2(\sigma\nu) + 4c_{22} \nu^2 \tau^2(\nu) - 2\nu_i(\sigma\nu) - \\ - 2\nu_j \tau(\nu) + \pi^2 \nu^2 (c_{11} + c_{22})] \quad , \quad i \neq j \quad (2.4.5)$$

•

$$N_{22}(\nu) = 1 - 4c_{22} \nu \tau(\nu) + 4\nu^2 [c_{22}^2 \tau^2(\nu) + c_{12} c_{21} \tau^2(\sigma\nu)] + \\ + \pi^2 \nu^2 (c_{22}^2 + c_{12} c_{21}) \quad , \quad (2.4.6)$$

onde $\tau(x)$ é abreviação de $\tanh^{-1}(x)$.

As propriedades de ortogonalidade e normalização são dadas por⁽¹³⁾

$$\int_0^1 \bar{\varrho}(\nu, \mu) \underline{\varrho}(\nu, \mu) \mu d\mu = N(\nu) \delta_{ij} \quad , \quad (2.4.7)$$

$$\int_0^1 \bar{\varrho}(\nu, \mu) \underline{\varrho}(\nu, \mu) \mu d\mu = 0 \quad , \quad (2.4.8)$$

$$\int_0^1 \bar{\varrho}(\nu, \mu) \underline{\varrho}(\nu, \mu) \mu d\mu = 0 \quad , \quad (2.4.9)$$

•

$$\int_0^1 \bar{\varrho}(\nu, \mu) \underline{\varrho}(\nu', \mu) \underline{A}(\nu') \mu d\mu = N(\nu) \underline{A}(\nu) \delta(\nu - \nu') \quad , \quad (2.4.10)$$

onde $\underline{A}(\xi)$ na Fórmula (2.4.10) é um vetor arbitrário 2×1 e

$$N(\nu) = 2\nu^2 \left\{ c_{12}^2 \left[\frac{\sigma\nu_1}{(\sigma\nu_1)^2 - 1} - \tau\left(\frac{1}{\sigma\nu_1}\right) \right] + \right. \\ \left. + [c_{22} - 2C\nu_1 \tau\left(\frac{1}{\sigma\nu_1}\right)]^2 \left[\frac{\nu_1}{\nu_1^2 - 1} - \tau\left(\frac{1}{\nu_1}\right) \right] \right\} \quad , \quad (2.4.11)$$

$$N(\nu) = N^{(1)}(\nu) \theta(\nu) + N^{(2)}(\nu) [1 - \theta(\nu)] \quad (2.4.12)$$

com

$$N^{(1)}(\nu) = \nu \Lambda^+(\nu) \Lambda^-(\nu) \quad , \quad \nu \in (0, 1/\sigma) \quad (2.4.13)$$

e

$$N^{(2)}(\nu) = \nu \Lambda^+(\nu) \Lambda^-(\nu) \quad , \quad \nu \in (1/\sigma, 1) \quad (2.4.14)$$

onde $\Lambda^\pm(\nu)$ são os valores limites do determinante da matriz de dispersão conforme a linha de singularidade é atingida por cima ou por baixo. São dados por⁽¹⁴⁾

$$\begin{aligned} \Lambda^\pm(\nu) = & 1 - 2\nu c_{11} \tau'(\sigma\nu) - 2\nu c_{22} \tau(\nu) + \\ & + 4\nu^2 C \tau'(\sigma\nu) \tau(\nu) - \pi^2 \nu^2 C \theta(\nu) \pm \\ & \pm i\pi\nu [c_{11} \theta(\nu) + c_{22} - 2\nu C \tau(\nu) \theta(\nu) - \\ & - 2\nu C \tau'(\sigma\nu)] \quad , \quad \nu \in (0, 1) \quad , \quad (2.4.15) \end{aligned}$$

onde

$$\tau'(\sigma\nu) = \tau(\sigma\nu) \quad , \quad \nu \in (0, 1/\sigma)$$

$$\tau'(\sigma\nu) = \tau(1/\sigma\nu) \quad , \quad \nu \in (1/\sigma, 1)$$

$$C = \det \underline{\zeta}.$$

Nas aplicações práticas em problemas de dois meios, surgem várias integrais de produtos de adjuntos transpostos com autovetores pertencentes ou não ao mesmo meio, no processo de isolar os coeficientes. Todas as integrais são regulares, com exceção da que envolve o produto interno $[\underline{\theta}_\alpha(\xi, \mu), \underline{\psi}_\beta(\xi', \mu)]$, onde α e β referem-se a meios distintos e $\xi, \xi' \in (0, 1)$. Esta integral apresenta dupla singularidade removível com a aplicação do método introduzido na Referência 13.

Na avaliação das integrais, as propriedades da matriz H relacionadas no fim da Secção 2.3 desempenham importância fundamental. Por conveniência, são apresentados todos os resultados de integrais necessárias neste trabalho no Apêndice A.

3 – O PROBLEMA DA CRITICALIDADE

Considera-se aqui o sistema composto por uma placa de material multiplicador (meio 1) ocupando a região $-\alpha < x < \alpha$ e material refletor (meio 2) completando o espaço restante ($|x| > \alpha$), conforme a Figura 3.1, sendo ambos materiais homogêneos.

O problema em questão consiste em se determinar o valor da meia espessura da placa para que exista uma solução estacionária não trivial e a distribuição de nêutrons resultante em todo o espaço, sendo conhecidos os materiais que constituem os meios. Em outras palavras, deseja-se determinar o valor de α para o qual o sistema é crítico e os fluxos angulares e totais.

A equação de transporte, Equação (2.1.10), é reescrita para os dois meios como

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_i(x, \mu) + \Sigma_i \Psi_i(x, \mu) = C_i \int_{-1}^1 \Psi_i(x, \mu') d\mu' \quad (3.1.1)$$

onde

$$i = 1, \quad -\alpha < x < \alpha$$

$$i = 2, \quad |x| > \alpha$$

As condições físicas que a solução $\Psi_i(x, \mu) = P_i^{-1} \psi_i(x, \mu)$ deve obedecer são:

– Condição de simetria em relação ao plano $x = 0$.

$$\psi_i(x, \mu) = \psi_i(-x, -\mu), \quad \mu \in (-1, 1) \quad (3.1.2)$$

– Condição de não divergência para $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_2(x, \mu) = 0, \quad \mu \in (-1, 1) \quad (3.1.3)$$

– Condição de continuidade e, $x = \alpha$.

$$P_1^{-1} \psi_1(\alpha, \mu) = P_2^{-1} \psi_2(\alpha, \mu), \quad \mu \in (-1, 1) \quad (3.1.4)$$

A condição de simetria permite que seja considerado apenas o semi-espaço $x \geq 0$ para se encontrar a solução do problema, sendo a solução em $x < 0$ construída com o uso dessa condição.

As soluções gerais podem ser escritas, incorporando as condições (3.1.2) e (3.1.3), como

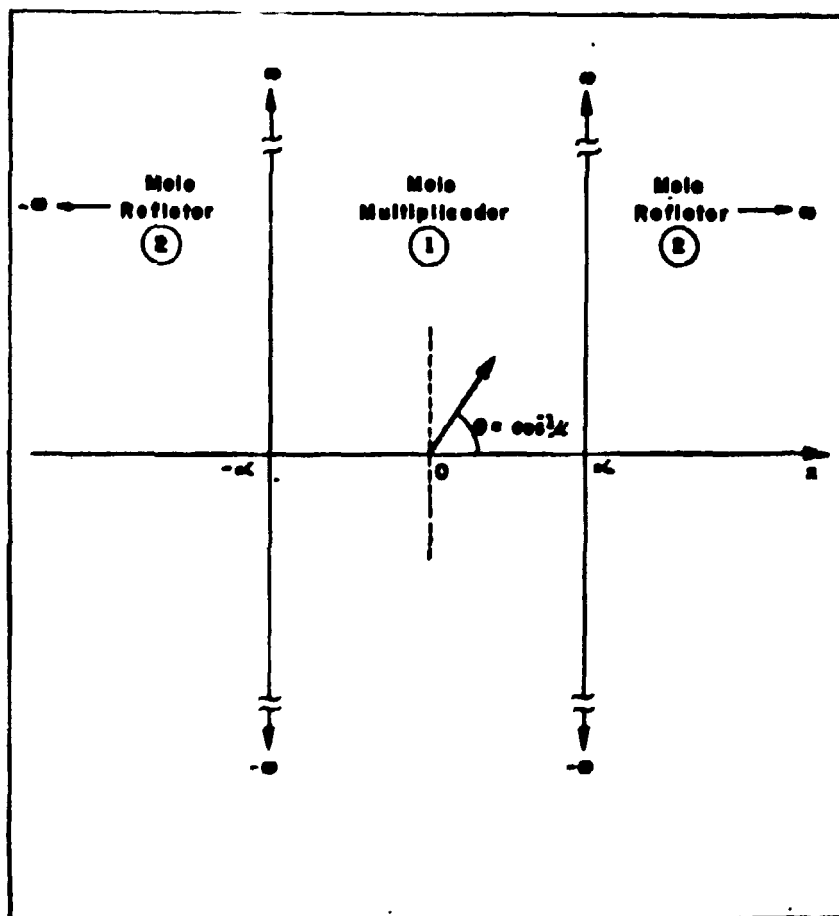


Figura 2.1 - Geometria do Problema

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x, \mu) &= \sum_{i=1}^{\kappa_1} A_1(\nu_i) \Phi_1(\nu_i, \mu) \exp[-(x + \alpha)/\nu_i] + \\
&+ \sum_{i=1}^{\kappa_1} A_1(\nu_i) \Phi_1(-\nu_i, \mu) \exp[-(\alpha - x)/\nu_i] + \\
&+ \int_0^1 \Phi_1(\nu, \mu) \underline{A}_1(\nu) \exp[-(x + \alpha)/\nu] d\nu + \\
&+ \int_0^1 \Phi_1(-\nu, \mu) \underline{A}_1(\nu) \exp[-(\alpha - x)/\nu] d\nu \quad , \quad 0 \leq x < \alpha \quad (3.1.5)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Psi_2(x, \mu) &= \sum_{i=1}^{\kappa_2} A_2(\eta_i) \Phi_2(\eta_i, \mu) \exp[-(x - \alpha)/\eta_i] + \\
&+ \int_0^1 \Phi_2(\eta, \mu) \underline{A}_2(\eta) \exp[-(x - \alpha)/\eta] d\eta \quad , \quad x \geq \alpha \quad (3.1.6)
\end{aligned}$$

Resta aplicar a condição (3.1.4) Dividindo-se em dois semi-intervalos, obtêm-se as equações

$$\underline{P}_1^{-1} \Psi_1(\alpha, -\mu) = \underline{P}_2^{-1} \Psi_2(\alpha, -\mu) \quad \mu \in (0,1) \quad (3.1.7)$$

$$\underline{P}_2^{-1} \Psi_2(\alpha, \mu) = \underline{P}_1^{-1} \Psi_1(\alpha, \mu) \quad \mu \in (0,1) \quad (3.1.8)$$

Ou, após substituição das expressões (3.1.5) e (3.1.6) e manipulações algébricas,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\kappa_1} A_1(\nu_i) \Phi_1(\nu_i, \mu) + \int_0^1 \Phi_1(\nu, \mu) \underline{A}_1(\nu) d\nu = \\
&= - \sum_{i=1}^{\kappa_1} A_1(\nu_i) \Phi_1(-\nu_i, \mu) E(\nu_i) - \\
&- \int_0^1 \Phi_1(-\nu, \mu) \underline{A}_1(\nu) E(\nu) d\nu +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{K_2} A_2(\eta_i) \underline{G} \psi_2(-\eta_i, \mu) + \\
& + \underline{G} \int_0^1 \psi_2(-\eta, \mu) A_2(\eta) d\eta \quad , \quad \mu \in (0,1)
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

e

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{K_2} A_2(\eta_i) \psi_2(\eta_i, \mu) + \int_0^1 \psi_2(\eta, \mu) A_2(\eta) d\eta = \\
& = \sum_{i=1}^{K_1} A_1(\nu_i) \underline{G}^{-1} \psi_1(\nu_i, \mu) E(\nu_i) + \\
& + \sum_{i=1}^{K_1} A_1(\nu_i) \underline{G}^{-1} \psi_1(-\nu_i, \mu) + \\
& + \underline{G}^{-1} \int_0^1 \psi_1(\nu, \mu) A_1(\nu) E(\nu) d\nu + \\
& + \underline{G}^{-1} \int_0^1 \psi_1(-\nu, \mu) A_1(\nu) d\nu \quad , \quad \mu \in (0,1) \quad .
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

onde $E(\xi) = \exp(-2\alpha/\xi)$ e $\underline{G} = \underline{P}_1 \underline{P}_2^{-1}$, supondo que os grupos são ordenados da mesma forma nos dois meios, o que é verdade em todos os conjuntos de dados que serão utilizados para obtenção de resultados numéricos.

O lado esquerdo da Equação (3.1.9) é uma expansão típica de meio intervalo para o meio multiplicador e, portanto, é possível utilizar as propriedades de ortogonalidade de meio intervalo para isolar os coeficientes $A_1(\nu_i)$ e $A_1(\nu)$. Multiplica-se então a Equação (3.1.9) por $\mu \psi_1(\xi, \mu)$, $\xi = \nu_i$ ou $\xi \in (0,1)$ e integra-se sobre $\mu \in (0,1)$.

As integrais que envolvem produtos de adjuntos transpostos com autovetores do meio 1 são relativamente simples, enquanto as que envolvem adjuntos do meio 1 com autovetores do meio 2 podem ser efetuadas, utilizando-se decomposições do tipo

$$\underline{k}(\xi, \mu) = \frac{p}{\sigma\xi - \mu} \underline{k}_1 + \frac{p}{\xi - \mu} \underline{k}_2 \tag{3.1.11}$$

com

$$k_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e usando as equações satisfeitas pela matriz H . Como todos os resultados de integrais de interesse estão listados no Apêndice A, são apresentadas aqui apenas as equações finais que se obtêm:

$$\begin{aligned} A_1(\nu_1) \left\{ 1 + \frac{\nu_1}{2} N_1^{-1}(\nu_1) \bar{X}_1(\nu_1) H_1^{-1}(\nu_1) C_1 U_1(\nu_1) E(\nu_1) \right\} = \\ + \nu_1 N_1^{-1}(\nu_1) \bar{X}_1(\nu_1) \left\{ Y_1(\nu_1) - (K_1 - 1) \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} H_1^{-1}(\nu_2) C_1 U_1(\nu_2) E(\nu_2) A_1(\nu_2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$A_1(\nu) = \nu N_1^{-1}(\nu) \bar{X}_1(\nu) \left\{ Y_1(\nu) - \sum_{i=1}^{K_1} \frac{\nu_i}{\nu + \nu_i} H_1^{-1}(\nu_i) C_1 U_1(\nu_i) E(\nu_i) A_1(\nu_i) \right\} \quad (3.1.13)$$

e, no caso $K_1 = 2$

$$\begin{aligned} A_1(\nu_2) \left\{ 1 + \frac{\nu_2}{2} N_1^{-1}(\nu_2) \bar{X}_1(\nu_2) H_1^{-1}(\nu_2) C_1 U_1(\nu_2) E(\nu_2) \right\} = \\ = \nu_2 N_1^{-1}(\nu_2) \bar{X}_1(\nu_2) \left\{ Y_1(\nu_2) - \frac{\nu_1}{\nu_2 + \nu_1} H_1^{-1}(\nu_1) C_1 U_1(\nu_1) E(\nu_1) A_1(\nu_1) \right\} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

onde

$$\bar{X}_1(\nu_i) = \bar{U}_1(\nu_i) C_1 \bar{H}_1^{-1}(\nu_i) C_1^{-1} \quad (3.1.15)$$

$$\bar{X}_1(\nu) = \bar{W}_1(\nu) C_1 \bar{H}_1^{-1}(\nu) C_1^{-1} \quad (3.1.16)$$

e

$$Y_1(\xi) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\sigma_1 \eta_i}{\sigma_2 \eta_i + \sigma_1 \xi} H_1^{-1} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \eta_i \right) k_1 + \frac{\eta_i}{\eta_i + \xi} H_1^{-1}(\eta_i) k_2 \right) G C_2 U_2(\eta_i) A_2(\eta_i) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \left\{ \frac{\sigma_1 \eta}{\sigma_2 \eta + \sigma_1 \xi} H_1^{-1} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \eta \right) \underline{k}_1 + \frac{\eta}{\eta + \xi} H_1^{-1}(\eta) \underline{k}_2 \right\} \underline{G} \underline{C}_2 \underline{A}_2(\eta) d\eta - \\
& - \int_0^1 \frac{\nu}{\nu + \xi} H_1^{-1}(\nu) \underline{C}_1 \underline{A}_1(\nu) E(\nu) d\nu \quad (3.1.17)
\end{aligned}$$

Analogamente, o lado esquerdo da Equação (3.1.10) é uma expansão típica de meio intervalo para o meio refletor, portanto utilizam-se as propriedades de ortogonalidade de meio intervalo para isolar os coeficientes $\underline{A}_2(\eta_1)$ e $\underline{A}_2(\eta)$. Multiplica-se a Equação (3.1.10) por $\mu \tilde{\underline{G}}_2(\xi, \mu)$, $\xi = \eta_1$ ou $\xi \in (0,1)$ e integra-se sobre $\mu \in (0,1)$. Da mesma maneira que para os coeficientes do meio multiplicador, as integrais cruzadas podem ser efetuadas usando-se decomposições convenientes e equações satisfeitas pela matriz \underline{H} . Porém, há um termo em integral singular dupla na expressão para o coeficiente $\underline{A}_2(\eta)$. O termo envolve o produto interno $[\theta_2(\eta, \mu), \psi_1(\nu, \mu)]$. Após a integração em μ , aparecem no resultado desse termo integrais singulares simples, sendo as singularidades do tipo $\frac{p}{\nu - \xi} \cdot E(\nu)$, $\xi = \eta$ ou $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \eta$. Um artifício para remover essas singularidades foi apresentado na Referência 13. Consiste na multiplicação da Equação (3.1.9) por

$$\tilde{\underline{G}}_2(\eta, \mu) \underline{G}^{-1} \begin{bmatrix} E\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \eta\right) & 0 \\ 0 & E(\eta) \end{bmatrix}, \quad \eta \in (0,1)$$

e integração sobre $\mu \in (0,1)$. Do lado esquerdo da equação resultante, obtém-se, além de integrais regulares, integrais singulares semelhantes às anteriores, apenas com exponenciais diferentes nos integrandos, ou seja, termos do tipo $\frac{p}{\nu - \xi} E(\xi)$, $\xi = \eta$ ou $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \eta$. Assim, somando membro a membro esta equação com a outra anteriormente obtida para o coeficiente $\underline{A}_2(\eta)$, obtém-se a seguinte equação com singularidades removidas, já que a soma dos termos singulares deixa nos integrandos termos do tipo $\frac{E(\nu) - E(\xi)}{\nu - \xi}$, $\xi = \eta$ ou $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \eta$.

$$\begin{aligned}
\underline{A}_2(\eta) = & \eta \underline{N}_2^{-1}(\eta) \tilde{\underline{X}}_2(\eta) \{ \underline{Y}_2(\eta) + \underline{C}_2 \underline{Y}_3(\eta) \} + \\
& + \eta \underline{N}_2^{-1}(\eta) \tilde{\underline{X}}_2(\eta) \sum_{i=1}^{K_2} \frac{\eta_i}{\eta + \eta_i} H_2^{-1}(\eta_i) E(\eta) \underline{C}_2 \underline{U}_2(\eta_i) \underline{A}_2(\eta_i) \quad (3.1.18)
\end{aligned}$$

Na expressão obtida inicialmente para os coeficientes discretos $\underline{A}_2(\eta_i)$ não permanecem singularidades, porém o procedimento acima é repetido, não só porque equações com forma semelhante à da Equação (3.1.18), como também porque a experiência mostrou que, em termos numéricos-iterativos, essa forma é mais favorável. Tem-se, assim

$$\begin{aligned}
A_2(\eta_1) \left\{ 1 - \frac{\eta_1}{2} N_2^{-1}(\eta_1) \tilde{X}_2(\eta_1) H_2^{-1}(\eta_1) E(\eta_1) C_2 U_2(\eta_1) \right\} = \\
= \eta_1 N_2^{-1}(\eta_1) \tilde{X}_2(\eta_1) \{ Y_2(\eta_1) + C_2 Y_3(\eta_1) \} + \\
+ (\kappa_2 - 1) \eta_1 N_2^{-1}(\eta_1) \tilde{X}_2(\eta_1) \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} H_2^{-1}(\eta_2) E(\eta_2) C_2 U_2(\eta_2) A_2(\eta_2) \quad (3.1.19)
\end{aligned}$$

e, no caso $\kappa_2 = 2$

$$\begin{aligned}
A_2(\eta_2) \left\{ 1 - \frac{\eta_2}{2} N_2^{-1}(\eta_2) \tilde{X}_2(\eta_2) H_2^{-1}(\eta_2) E(\eta_2) C_2 U_2(\eta_2) \right\} = \\
= \eta_2 N_2^{-1}(\eta_2) \tilde{X}_2(\eta_2) \{ Y_2(\eta_2) + C_2 Y_3(\eta_2) \} + \\
+ \eta_2 N_2^{-1}(\eta_2) \tilde{X}_2(\eta_2) \frac{\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} H_2^{-1}(\eta_1) E(\eta_1) C_2 U_2(\eta_1) A_2(\eta_1) \quad (3.1.20)
\end{aligned}$$

Nas Equações (3.1.18) a (3.1.20) as matrizes $\tilde{X}_2(\eta_1)$ e $\tilde{X}_2(\eta_2)$ são definidas de maneira análoga a (3.1.15) e (3.1.16), apenas substituindo o subscrito 1 por 2. Define-se também

$$E(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \xi & 0 \\ 0 & E(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.1.21)$$

$$\begin{aligned}
Y_1(\xi) = \sum_{i=1}^{\kappa_1} \left\{ \frac{\sigma_2 \nu_i}{\sigma_1 \nu_i + \sigma_2 \xi} H_2^{-1} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \nu_i \right) k_1 [1 - E(\nu_i) E \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \xi \right)] + \right. \\
+ \frac{\nu_i}{\nu_i + \xi} H_2^{-1}(\nu_i) k_2 [1 - E(\nu_i) E(\xi)] G^{-1} C_2 U_1(\nu_i) A_1(\nu_i) + \\
\left. + \sum_{i=1}^{\kappa_1} \left(\frac{\sigma_2 \nu_i}{\sigma_1 \nu_i - \sigma_2 \xi} H_2^{-1} \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \nu_i \right) k_1 [E(\nu_i) - E \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \xi \right)] + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\nu_1}{\nu_1 - \xi} \tilde{H}_2^{-1}(-\nu_1) k_2 [E(\nu_1) - E(\xi)] \} G^{-1} C_1 U_1(\nu_1) A_1(\nu_1) + \\
& + \int_0^1 \left\{ \frac{\sigma_2 \nu}{\sigma_1 \nu + \sigma_2 \xi} \tilde{H}_2^{-1} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \nu \right) k_2 \left[1 - E(\nu) E \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \xi \right) \right] + \right. \\
& + \frac{\nu}{\nu + \xi} \tilde{H}_2^{-1}(\nu) k_2 [1 - E(\nu) E(\xi)] \} G^{-1} C_1 A_1(\nu) d\nu + \\
& + \int_0^1 \frac{\eta}{\eta + \xi} \tilde{H}_2^{-1}(\eta) E(\xi) C_2 A_2(\eta) d\eta
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

e

$$\begin{aligned}
Y_3(\xi) = & \int_0^1 \left\{ \frac{\sigma_2 \nu}{\sigma_1 \nu + \sigma_2 \xi} \tilde{H}_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \nu \right) C_2^{-1} \tilde{\lambda}_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \nu \right) k_1 [E(\nu) - E \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \xi \right)] + \right. \\
& + \frac{\nu}{\nu - \xi} \tilde{H}_2(\nu) C_2^{-1} \tilde{\lambda}_2(\nu) k_2 [E(\nu) - E(\xi)] \} G^{-1} C_1 A_1(\nu) d\nu + \\
& + \int_0^1 \left\{ \frac{\sigma_1 \nu}{\sigma_2 \xi - \sigma_1 \nu} \tilde{H}_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \nu \right) k_1 [E(\nu) - E \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \xi \right)] + \right. \\
& + \frac{\nu}{\xi - \nu} \tilde{H}_2(\nu) k_2 [E(\nu) - E(\xi)] \} G^{-1} \underline{C}_1 \underline{\lambda}_1(\nu) \underline{A}_1(\nu) d\nu
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

A procura de uma solução não trivial permite a normalização $A_1(\nu_1) = \exp(\alpha/\nu_1)$, portanto, com o auxílio da Equação (3.1.12) a meia espessura crítica é dada por

$$\alpha = \frac{\pi}{2} |\nu_1| + \frac{\nu_1}{2} \ln \left\{ \frac{N}{D} \right\} \tag{3.1.24}$$

onde

$$N = \frac{\nu_1}{2} N_1^{-1}(\nu_1) \tilde{\Sigma}_1(\nu_1) \tilde{H}_1^{-1}(\nu_1) C_1 U_1(\nu_1)$$

e

$$D = 1 - \nu_1 N_1^{-1}(\nu_1) \tilde{X}_1(\nu_1) \exp(-\alpha/\nu_1) \{ \underline{Y}_1(\nu_1) - \\ - (\kappa_1 - 1) \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} H_1^{-1}(\nu_2) \underline{C}_1 \underline{U}_1(\nu_2) E(\nu_2) A_1(\nu_2) \}$$

As Equações (3.1.13), (3.1.14), (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20) e (3.1.24) constituem um sistema acoplado de equações integrais regulares, cuja solução numérico-iterativa fornece o valor da meia espessura crítica e os coeficientes da expansão em autovetores da Case nos dois meios considerados.

O vetor fluxo angular é dado, para $x \geq 0$, por

$$I_1(x, \mu) = P_1^{-1} \Psi_1(x, \mu) \quad , \quad 0 \leq x < \alpha \quad (3.1.25)$$

$$I_2(x, \mu) = P_2^{-1} \Psi_2(x, \mu) \quad , \quad x \geq \alpha \quad (3.1.26)$$

onde $\Psi_1(x, \mu)$ e $\Psi_2(x, \mu)$ são dados pelas expansões (3.1.5) e (3.1.6) respectivamente. Para $x < 0$, a solução é encontrada com a condição (3.1.2).

O vetor fluxo total é dado por

$$\rho_1(x) = \int_0^1 I_1(x, \mu) d\mu \quad (3.1.27)$$

Introduzindo as expressões (3.1.25) e (3.1.26) na definição (3.1.27) obtém-se

$$\rho_1(x) = P_1^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{\kappa_1} A_i(\nu_i) \underline{U}_1(\nu_i) \exp[-(x + \alpha)/\nu_i] + \right. \\ + \sum_{i=1}^{\kappa_1} A_i(\nu_i) \underline{U}_1(\nu_i) \exp[-(\alpha - x)/\nu_i] + \\ + \int_0^1 A_1(\nu) \exp[-(x + \alpha)/\nu] d\nu + \\ \left. + \int_0^1 A_1(\nu) \exp[-(\alpha - x)/\nu] d\nu \right\} \quad (3.1.28)$$

e

$$\rho_2(x) = P_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^{K_2} A_2(\eta_i) U_2(\eta_i) \exp\{-(x-\alpha)/\eta_i\} + \int_0^1 A_2(\eta) \exp\{-(x-\alpha)/\eta\} d\eta \right) \quad (3.1.29)$$

4 – RESULTADOS NUMÉRICOS

Utilizou-se, para obtenção de resultados numéricos, dois conjuntos de secções de choque para meio multiplicador e um conjunto para meio refletor, conforme as Tabelas IV.1 e IV.2, gerados com auxílio do código de computação XSDRN⁽¹¹⁾. Os meios foram considerados de extensão infinita e tomados à temperatura ambiente de 294,6 K.

Tabela IV.1

Conjuntos de Secções de Choque

Conjunto	Material	Propriedade	Intervalo de Energia	
			Grupo 1	Grupo 2
C ₁	U ²³⁵ + H ₂ O ; U/H = 1/500	Multiplicador	0 – 0,3eV	0,3eV – 15MeV
C ₂	U ²³⁵ + H ₂ O ; U/H = 1/1000	Multiplicador	0 – 0,3eV	0,3eV – 15MeV
R ₁	H ₂ O	Espalhador	0 – 0,3eV	0,3eV – 15MeV

Tabela IV.2

Secções de Choque Macroscópicas*

Secção de choque	Conjunto		
	C ₁	C ₂	R ₁
σ_1	2,9628	2,9727	2,9865
σ_2	0,88655	0,88721	0,88798
$\sigma_{g11}^{(o)}$	2,8751	2,9183	2,9676
$\sigma_{g12}^{(o)}$	0,04536	0,04635	0,04749
$\sigma_{g11}^{(o)}$	0,00116	0,000767	0,000336
$\sigma_{g22}^{(o)}$	0,83807	0,83892	0,83975
$\nu_1 \sigma_{f1}$	0,14324	0,07391	—
$\nu_2 \sigma_{f2}$	0,00412	0,00209	—
χ_1	0,0	0,0	—
χ_2	1,0	1,0	—

* - Expressas em cm⁻¹

Dois casos foram estudados, simulando reatores térmicos; o Caso 1 é a combinação dos conjuntos $C_1 - R_1$ e o Caso 2 a combinação $C_2 - R_1$.

Para cada conjunto de dados foram calculados os autovalores discretos e a matriz H , para utilização posterior. O procedimento numérico detalhado está apresentado no Apêndice B. Na Tabela IV.3 mostra-se os autovalores discretos positivos de cada conjunto, bem como o parâmetro k_{BMS} , introduzido na Referência 4, que caracteriza uma espécie de fator de multiplicação infinito na teoria de multigrupos.

Tabela IV.3
Autovalores Discretos Positivos e Fator de Multiplicação Infinito

Conjunto	Autovalores		k_{BMS}
	ν_1	ν_2	
C_1	i3,43768081	—	1,0112
C_2	i4,72108596	1,15212848	1,0048
R_1	2,60401996	2,12297930	0,9938

Resolvendo-se o sistema acoplado de equações integrais referido no fim do Capítulo 4, com uma técnica iterativa, obtêm-se os coeficientes e a meia espessura crítica para os dois casos, conforme resultados nas Tabelas IV.4 e IV.5. Na Figura 4.1 estão apresentados os coeficientes contínuos para o Caso 1, sendo A_1 e A_2 as componentes do vetor $A_1(\nu)$ e B_1 e B_2 as componentes do vetor $A_2(\eta)$.

Tabela IV.4
Coeficientes Discretos

Caso	$A_1(\nu_1)$	$A_1(\nu_2)$	$A_2(\eta_1)$	$A_2(\eta_2)$
1	0,80512 - i0,59311	—	19,251	- 16,777
2	0,636642 - i0,771159	0,404827	9,85111	- 7,94372

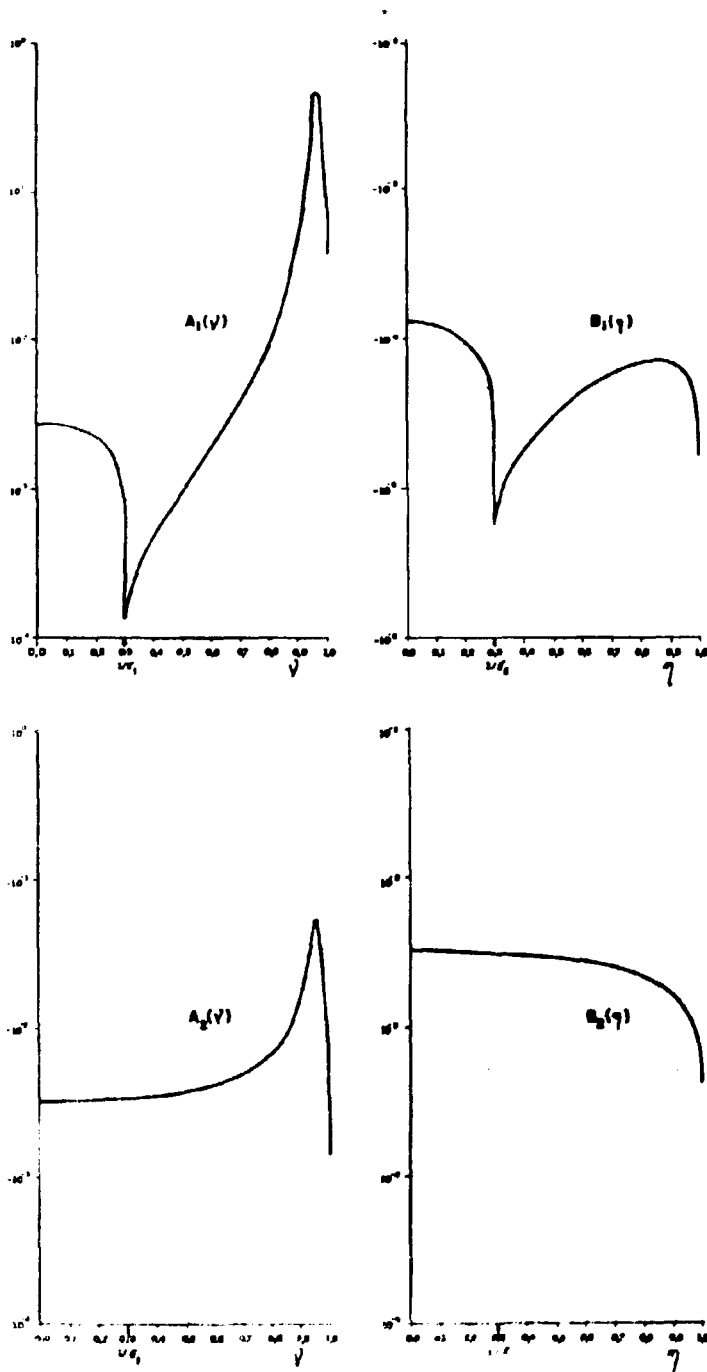


Figura 4.1 - Coeficientes Contínuos - Caso 1

O esquema iterativo está apresentado no Apêndice B. As integrais foram calculadas numericamente pelo método de quadraturas de Gauss^(3,9) que expressa integrais como somatórias, de modo que

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^N \omega_i f_i(x_i) + R_N$$

para uma escolha conveniente dos nós (x_i) e pesos (ω_i), é uma fórmula exata (ou seja, $R_N = 0$) se $f(x)$ puder ser expressa por um polinômio de ordem até $(2N - 1)$. Os nós e pesos são tabelados em manuais de funções matemáticas, para diversas ordens de quadratura⁽¹⁾.

Os cálculos foram feitos em dupla precisão no computador IBM-370/155 do Instituto de Energia Atômica, São Paulo, sendo o programa escrito em linguagem Fortran IV-H.

Para a precisão apresentada na Tabela IV.5 foram necessárias 39 iterações no Caso 1 e 51 iterações no Caso 2. Usou-se, no cálculo numérico de integrais no intervalo (0,1), 20 pontos de quadratura (nós) para o sub-intervalo (0,1/σ) e 40 pontos para o sub-intervalo (1/σ,1), em virtude dos picos apresentados neste sub-intervalo pelos coeficientes contínuos, nos casos em que $K = 1$.

Nas Figuras 4.2 a 4.5 são apresentadas as distribuições angulares de nêutrons resultantes na interface ($x = a$) e em dois pontos próximos, para dentro e para fora de interface, em ambos os casos estudados. Pode-se observar a descontinuidade dos fluxos angulares na interface, originada pela descontinuidade física dos meios⁽³⁾.

Desde que um dos propósitos do trabalho é fornecer resultados que possam ser usados como padrão, apresenta-se na Tabela IV.6 a distribuição angular de nêutrons do grupo 1 para o Caso 1.

Nas Figuras 4.6 e 4.7 são apresentados os fluxos totais até $x = 3a$, tendo sido o fluxo do grupo 1 normalizado como 1 para $x = 0$. As unidades dos fluxos são nêutrons por unidade de comprimento ao quadrado por unidade de tempo. As Tabelas IV.7 e IV.8 relacionam alguns valores dos fluxos totais, para os dois casos.

Tabela IV.5
Meia Espessura Crítica (α)

Caso	α (l.c.m.) ^a	α (cm)
1	2,1828	2,4819
2	4,16787	4,68823

^a - Expressa em livres caminhos médios do grupo 2 no meio multiplicador.

Tabela IV.6
Fluxo Angular (Grupo 1) para o Caso 1

μ	$\Psi_1(x, \mu)$			
	$x = 0,75\alpha$	$x = \alpha^-$	$x = \alpha^+$	$x = 1,25\alpha$
- 0,95	0,018029	0,020187	0,020186	0,020875
- 0,9	0,017980	0,020166	0,020165	0,020888
- 0,8	0,017879	0,020119	0,020118	0,020910
- 0,7	0,017776	0,020063	0,020062	0,020927
- 0,6	0,017675	0,019998	0,019997	0,020939
- 0,5	0,017578	0,019924	0,019923	0,020946
- 0,4	0,017488	0,019838	0,019837	0,020947
- 0,3	0,017410	0,019740	0,019740	0,020942
- 0,2	0,017342	0,019628	0,019627	0,020930
- 0,1	0,017284	0,019497	0,019496	0,020911
- 0,05	0,017257	0,019421	0,019421	0,020898
0,05	0,017208	0,018781	0,018781	0,020867
0,1	0,017186	0,018707	0,018707	0,020848
0,2	0,017145	0,018578	0,018578	0,020802
0,3	0,017108	0,018466	0,018466	0,020745
0,4	0,017075	0,018366	0,018366	0,020674
0,5	0,017045	0,018276	0,018276	0,020591
0,6	0,017018	0,018194	0,018194	0,020499
0,7	0,016994	0,018119	0,018119	0,020401
0,8	0,016972	0,018050	0,018050	0,020301
0,9	0,016951	0,017987	0,017987	0,020199
0,95	0,016942	0,017957	0,017957	0,020149

Tabela IV.7
Fluxo Total - Caso 1

x	x/α	$\rho_1(x)$	$\rho_2(x)$
0,0	0,0	1,0000	1,9112
0,43652	0,2	1,0010	1,8924
0,87305	0,4	1,0060	1,8350
1,3096	0,6	1,0215	1,7362
1,7461	0,8	1,0604	1,5879
2,1826	1,0	1,1540	1,3505
2,1826*	1,0	1,1639	1,3505
2,6191	1,2	1,2437	1,0981
3,0657	1,4	1,2622	0,91600
3,4922	1,6	1,2379	0,76817
3,9287	1,8	1,1854	0,64666
4,3652	2,0	1,1151	0,54341

Tabela IV.8
Fluxo Total – Caso 2

x	x/α	$\rho_1(x)$	$\rho_2(x)$
0,0	0,0	1,00000	1,24151
0,831535	0,2	0,987786	1,22128
1,66307	0,4	0,953323	1,16061
2,49460	0,6	0,904111	1,05899
3,32614	0,8	0,856477	0,913133
4,15767 ⁻	1,0	0,848039	0,698097
4,15767 ⁺	1,0	0,848038	0,698097
4,98921	1,2	0,825891	0,486900
5,82074	1,4	0,739104	0,349459
6,65228	1,6	0,630788	0,251922
7,48381	1,8	0,521646	0,181912
8,31535	2,0	0,421808	0,131471

5 – CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Problemas envolvendo dois meios, no modelo de dois grupos, permaneceram insolúveis durante longo tempo, em virtude de certas dificuldades na regularização das equações integrais para os coeficientes da expansão em autofunções de Case.

Particularmente, foi mostrado aqui que para o problema da criticalidade para reatores tipo placa refletida em dois grupos, um problema clássico na teoria da difusão e anteriormente sem solução na teoria de transporte, a regularização pode ser efetuada, usando-se o método proposto na Referência 13.

Em termos de padrão numérico, pode-se afirmar que os resultados do Caso 2 são melhores, visto apresentarem maior número de algarismos significativos. Esta diferença em relação ao Caso 1 é originária do fato do meio multiplicador do Caso 2 possuir dois pares de autovalores discretos e, portanto os coeficientes contínuos não apresentarem picos na região $(1/\alpha, 1)$. Assim, para melhorar a precisão do Caso 1, se desejado, o procedimento recomendável seria aumentar o número de pontos de quadratura, nessa região, para integração numérica, com o inconveniente do aumento consequente no tempo de computação.

Como continuidade natural deste trabalho, encontra-se o caso dos refletores finitos, que poderá fornecer resultados interessantes num estudo de efetividade de refletores para reatores com núcleo pequeno, inclusive podendo ser facilmente reduzido ao caso da placa simples, isto é, sem refletores.

Sugere-se também um estudo levando em conta o espalhamento anisotrópico, principalmente em virtude dos meios considerados conterem hidrogênio, material espalhador bastante anisotrópico. Conforme comentado no Capítulo 1, já foi realizado este tipo de estudo⁽¹⁵⁾, porém seria interessante repeti-lo para um problema de dois meios. Na Tabela V.1 são apresentadas as partes linearmente anisotrópicas das secções de choque para os meios considerados, para que possam ser utilizados como subsídio a esse estudo.

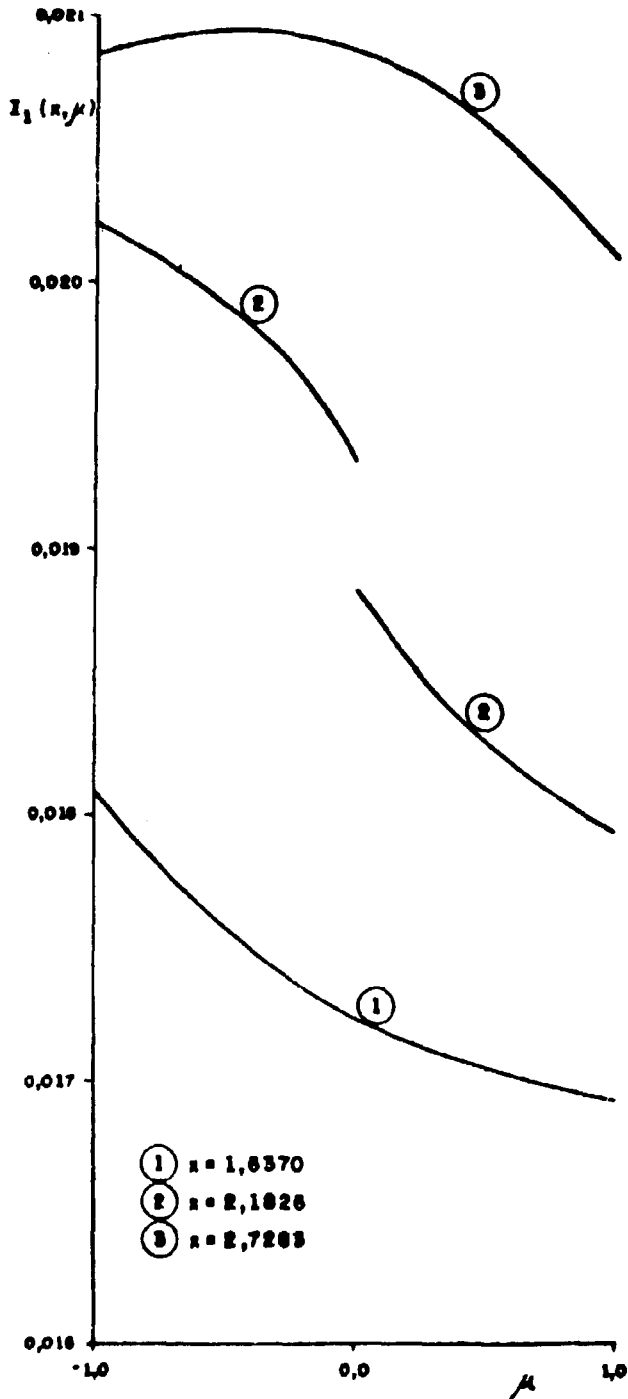


Figura 4.2 - Distribuição Angular Grupo 1 - Caso 1

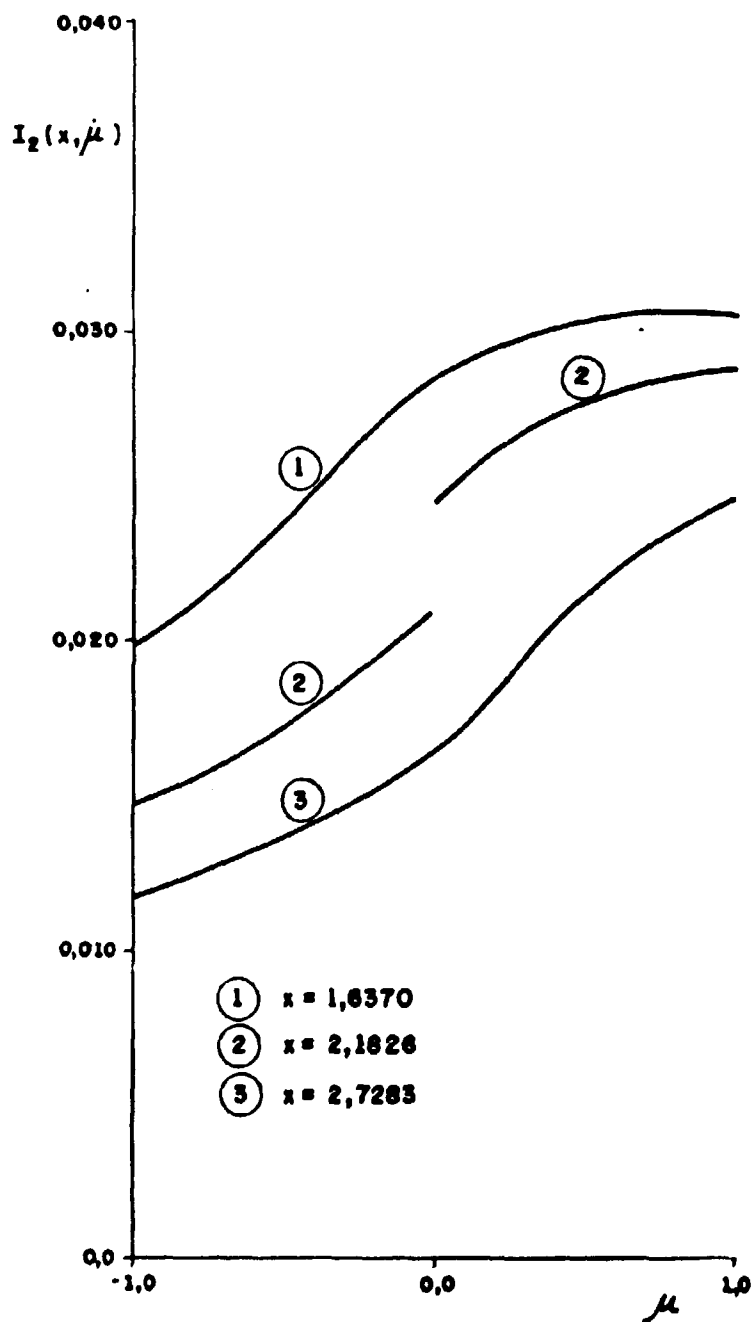


Figura 4.3 - Distribuição Angular Grupo 2 - Caso 1

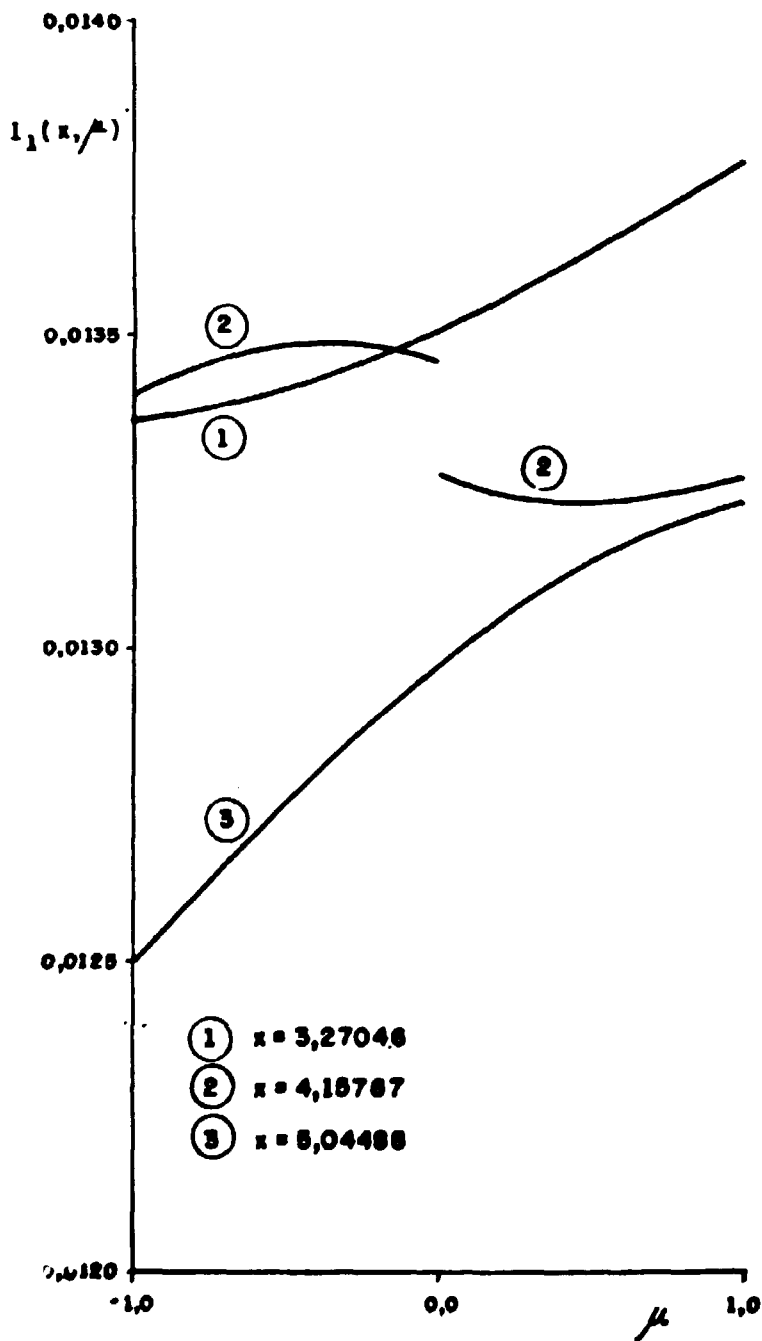


Figura 4.4 - Distribuição Angular Grupo 1 - Caso 2

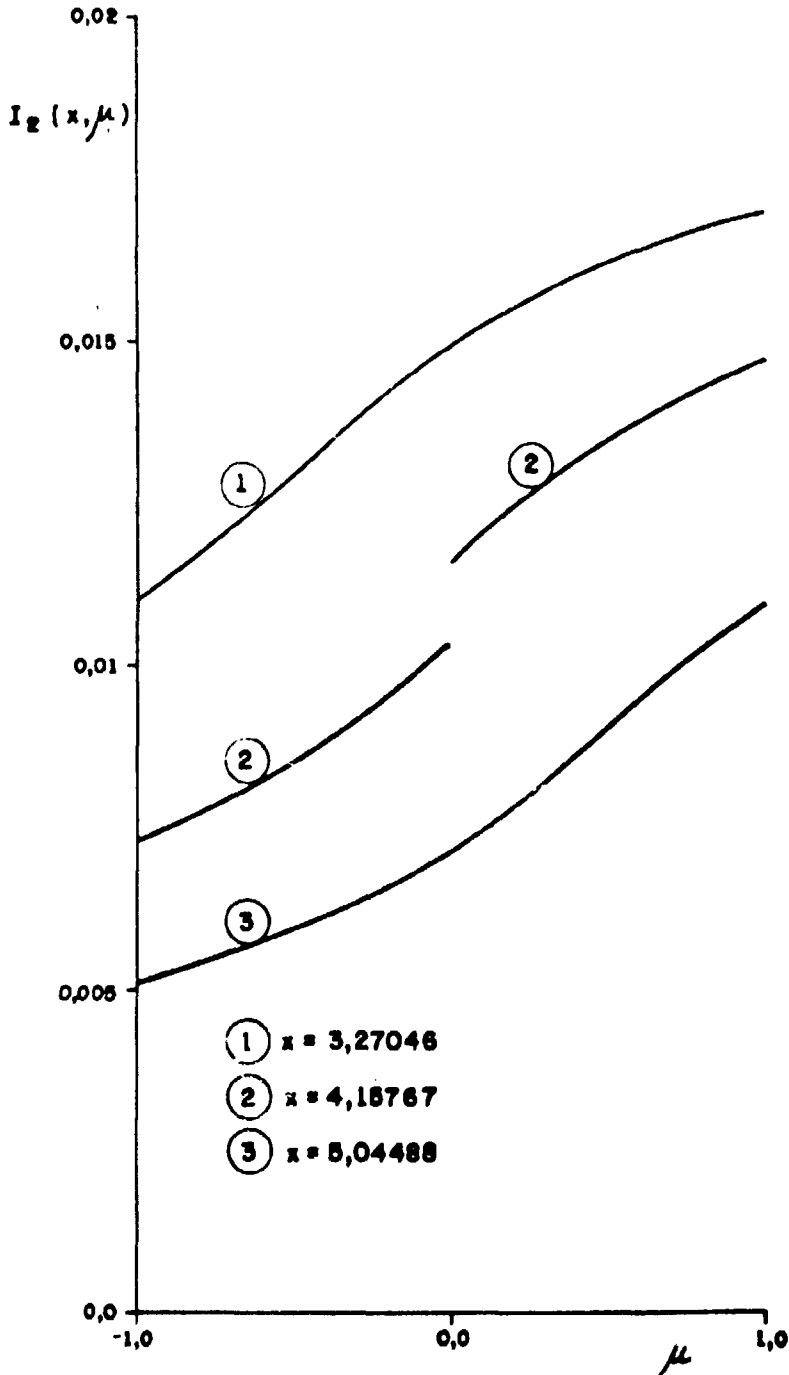


Figura 4.5 - Distribuição Angular Grupo 2 - Caso 2

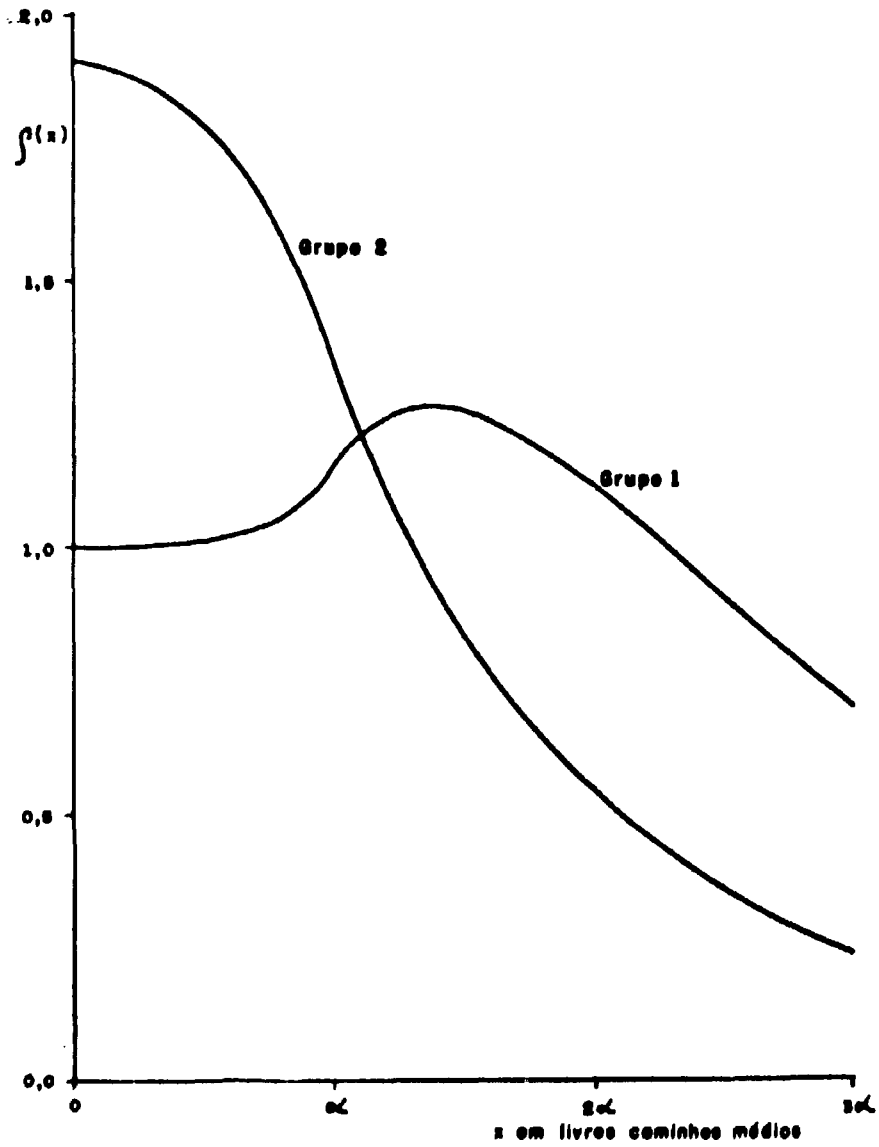


Figura 4.6 - Fluxo Total - Caso 1

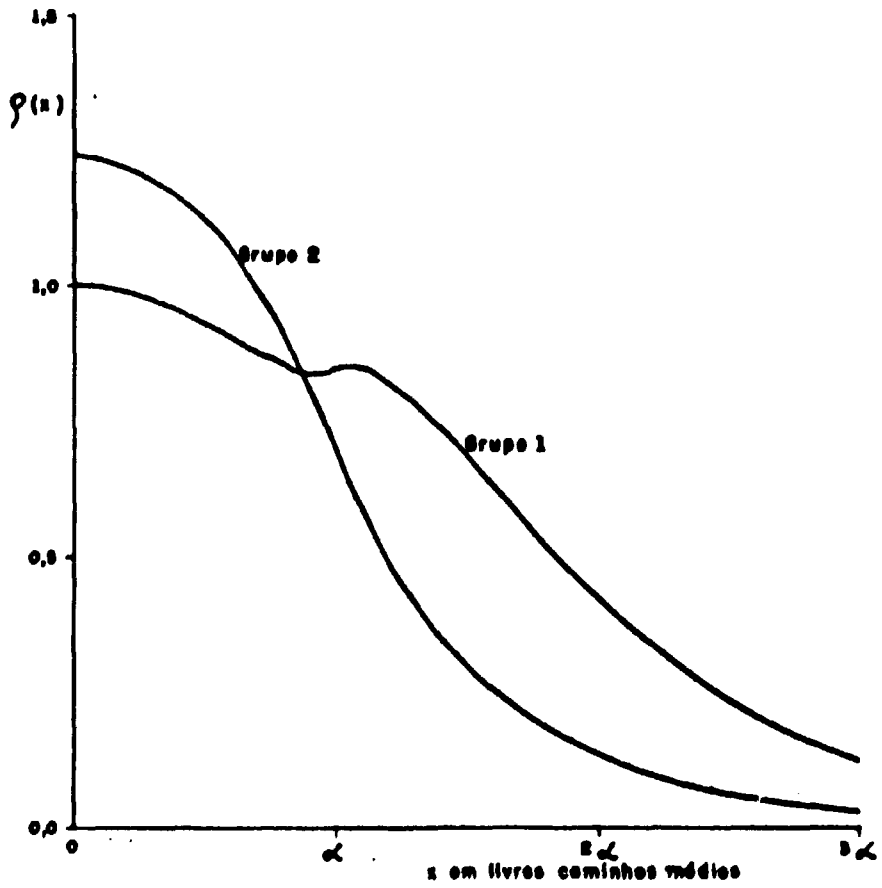


Figura 4.7 - Fluxo Total - Caso 2

Tabela V.1
Secções de Choque Macroscópicas Linearmente Anisotrópicas

Secção de choque	C_1	Conjunto C_2	R_1
$\sigma_{S11}^{(1)}$	0,0	0,0	0,0
$\sigma_{S12}^{(1)}$	0,00391	0,00398	0,00401
$\sigma_{S21}^{(1)}$	0,0	0,0	0,0
$\sigma_{S22}^{(1)}$	1,3778	1,3781	1,3782

* - Expressas em cm^{-1} .

APÊNDICE A

TABELA DE INTEGRAIS

Neste apêndice são apresentados todos os resultados das integrais necessárias para se isolar os coeficientes da expansão, servindo, inclusive, para futuras aplicações.

Define-se, como no Capítulo 3,

$$\bar{X}(\nu_1) = \bar{U}(\nu_1) \bar{C} \bar{H}^{-1}(\nu_1) \bar{C}^{-1} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\bar{X}(\nu) = \bar{W}(\nu) \bar{C} \bar{H}^{-1}(\nu) \bar{C} \quad (\text{A.2})$$

1) Adjuntos e Autofunções Referentes ao Mesmo Meio

$$\int_0^1 \bar{\theta}(\nu_1, \mu) \bar{\psi}(-\nu_1, \mu) \mu d\mu = \frac{\nu_1 \nu_1}{\nu_1 + \nu_1} \bar{X}(\nu_1) \bar{H}^{-1}(\nu_1) \bar{C} \bar{U}(\nu_1) \quad (\text{A.3})$$

$$\int_0^1 \bar{\theta}(\nu_1, \mu) \bar{\psi}(-\nu, \mu) \mu d\mu = \frac{\nu_1 \nu}{\nu_1 + \nu} \bar{X}(\nu_1) \bar{H}^{-1}(\nu) \bar{C} \quad (\text{A.4})$$

$$\int_0^1 \bar{\theta}(\nu, \mu) \Psi(-\nu, \mu) \mu d\mu = \frac{\nu, \nu'}{\nu + \nu'} \bar{X}(\nu) \underline{H}^{-1}(\nu) \underline{C} \underline{U}(\nu_1) \quad (\text{A.5})$$

e

$$\int_0^1 \bar{\theta}(\nu, \mu) \Psi(-\nu', \mu) \mu d\mu = \frac{\nu \nu'}{\nu + \nu'} \bar{X}(\nu) \underline{H}^{-1}(\nu') \underline{C} \quad (\text{A.6})$$

onde ν_1, ν_1' são positivos e $\nu, \nu' \in (0, 1)$.

2) Adjuntos e Autofunções Referentes a Meios Distintos

Nas fórmulas abaixo, \underline{F} representa uma matriz diagonal 2×2 arbitrária, sendo que neste caso, $\underline{F} = \underline{G}$ ou \underline{G}^{-1} e $\underline{\Gamma}(\xi)$, um vetor arbitrário 2×1 , incorpora um coeficiente contínuo $\underline{A}(\xi)$ e uma função exponencial $E(\xi)$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{\theta}_\alpha(\nu_1, \mu) \underline{F} \underline{\psi}_\beta(\pm \eta_1, \mu) \mu d\mu &= \nu_1 \bar{X}_\alpha(\nu_1) \left[\frac{\nu_\alpha \eta_1}{\sigma_\beta \eta_1 \mp \sigma_\alpha \nu_1} \underline{H}_\alpha^{-1}(\mp \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta_1) \underline{k}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta_1}{\eta_1 \mp \nu_1} \underline{H}_\alpha^{-1}(\mp \eta_1) \underline{k}_2 \right] \underline{F} \underline{C}_\beta \underline{U}_\beta(\eta_1) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{\theta}_\alpha(\nu_1, \mu) \underline{F} \underline{\psi}_\beta(\eta, \mu) \mu d\mu &= \nu_1 \bar{X}_\alpha(\nu_1) \underline{C}_\alpha \left[\frac{\sigma_\alpha \eta}{\sigma_\beta \eta - \sigma_\alpha \nu_1} \underline{H}_\alpha(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta) \underline{C}_\alpha^{-1} \bar{\lambda}_\alpha(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta) \underline{k}_1 \underline{F} \underline{C}_\beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta}{\eta - \nu_1} \underline{H}_\alpha(\eta) \underline{C}_\alpha^{-1} \bar{\lambda}_\alpha(\eta) \underline{k}_2 \underline{F} \underline{C}_\beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_\beta \eta}{\sigma_\alpha \nu_1 - \sigma_\beta \eta} \underline{H}_\alpha(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta) \underline{k}_1 \underline{F} \underline{\theta}_\beta(\eta) \bar{\lambda}_\beta(\eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta}{\nu_1 - \eta} \underline{H}_\alpha(\eta) \underline{k}_2 \underline{F} \underline{\theta}_\beta(\eta) \bar{\lambda}_\beta(\eta) \right] \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \bar{\theta}_\alpha(\nu_1, \mu) \underline{F} \underline{\psi}_\beta(-\eta, \mu) \mu d\mu = \nu_1 \bar{X}_\alpha(\nu_1) \left[\frac{\sigma_\alpha \eta}{\sigma_\beta \eta + \sigma_\alpha \nu_1} \underline{H}_\alpha^{-1}(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta) \underline{k}_1 + \right.$$

$$+ \frac{\eta}{\eta + \nu_1} \mathbb{H}_\alpha^{-1}(\eta) k_2 \} \mathbb{F} \mathbb{C}_\alpha \quad (\text{A.9})$$

$$\int_0^1 \bar{\theta}_\alpha(\nu, \mu) \mathbb{F} \psi_\beta(\pm \eta, \mu) d\mu = \nu \bar{X}_\alpha(\nu) \left[\frac{\sigma_\alpha \eta_1}{\sigma_\beta \eta_1 + \sigma_\alpha \nu} \mathbb{H}_\alpha^{-1} \left(\mp \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta_1 \right) k_1 + \right. \\ \left. + \frac{\eta_1}{\eta_1 \mp \nu} \mathbb{H}_\alpha^{-1}(\mp \eta_1) k_2 \right] \mathbb{F} \mathbb{C}_\beta \mathbb{U}_\beta(\eta_1) \quad (\text{A.10})$$

$$\int_0^1 \bar{\theta}_\alpha(\nu, \mu) \mathbb{F} \psi_\beta(-\eta, \mu) d\mu = \nu \bar{X}_\alpha(\nu) \left[\frac{\sigma_\alpha \eta}{\sigma_\beta \eta + \sigma_\alpha \nu} \mathbb{H}_\alpha^{-1} \left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta \right) k_1 + \right. \\ \left. + \frac{\eta}{\eta + \nu} \mathbb{H}_\alpha^{-1}(\eta) k_2 \right] \mathbb{F} \mathbb{C}_\beta \quad (\text{A.11})$$

$$\int_0^1 \bar{\theta}_\alpha(\nu, \mu) \mathbb{F} \int_0^1 \psi_\beta(\eta, \mu) \Gamma(\eta) d\eta d\mu = \\ = \nu \bar{X}_\alpha(\nu) \mathbb{C}_\alpha \left\{ \int_0^1 \left[\sigma_\alpha \eta \frac{\mathbb{P}}{\sigma_\beta \eta - \sigma_\alpha \nu} \mathbb{H}_\alpha \left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta \right) \mathbb{C}_\alpha^{-1} \bar{\lambda}_\alpha \left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta \right) k_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta \frac{\mathbb{P}}{\eta - \nu} \mathbb{H}_\alpha(\eta) \mathbb{C}_\alpha^{-1} \bar{\lambda}_\alpha(\eta) k_2 \right] \mathbb{F} \mathbb{C}_\beta \Gamma(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left[\sigma_\beta \eta \frac{\mathbb{P}}{\sigma_\alpha \nu - \sigma_\beta \eta} \mathbb{H}_\alpha \left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \eta \right) k_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta \frac{\mathbb{P}}{\nu - \eta} \mathbb{H}_\alpha(\eta) k_2 \right] \mathbb{F} \theta_\beta(\eta) \lambda_\beta(\eta) \Gamma(\eta) d\eta \right\} + \\ + \nu \bar{W}_\alpha(\nu) \mathbb{C}_\alpha \mathbb{C}_\beta \alpha(\nu) \pi^2 \left[\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} \nu \right)^2 k_1 \mathbb{F} \mathbb{C}_\beta \Gamma \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} \nu \right) + \right. \\ \left. + \nu^2 k_2 \mathbb{F} \mathbb{C}_\beta \Gamma(\nu) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \nu \bar{W}_\alpha(\nu) \bar{\lambda}_\alpha(\nu) \bar{\rho}_\alpha(\nu) \left[\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} k_1 \Gamma_{\lambda_\beta} \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} \nu \right) \Gamma \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} \nu \right) + \right. \\
& \left. + k_2 \Gamma_{\lambda_\beta}(\nu) \Gamma(\nu) \right] .
\end{aligned} \tag{A.12}$$

onde todos os autovalores representados são positivos.

Nota: Somente a integral (A.12) é singular.

APÊNDICE B

PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

Inicialmente, foram calculados os autovalores discretos dos conjuntos de dados, usando-se o método do passo, seguido de uma refinação com a técnica iterativa de Newton-Raphson, que encontra as raízes da função de dispersão $\Lambda(z)$, por meio de

$$\nu_0^{(i+1)} = \nu_0^{(i)} - \frac{\Lambda(\nu_0^{(i)})}{\Lambda'(\nu_0^{(i)})} \quad (B.1)$$

onde i indica a ordem da iteração e Λ' a derivada de Λ . A expressão acima é repetida tantas vezes quantas necessárias para obtenção da precisão desejada em ν_0 . No presente caso, após localizar as raízes dentro de 10^{-2} de erro com o método do passo, obtiveram-se os autovalores com precisão de 10^{-11} , usando-se uma média de 5 iterações na técnica de Newton-Raphson.

Para o cálculo da matriz H , utilizou-se a Equação (2.3.6) modificada para

$$\underline{H}^{-1}(\mu) = \underline{I} - \mu \underline{C} \int_0^1 \underline{\tilde{H}}(\mu') \underline{\theta}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu + \mu'} \quad , \quad \mu \notin (-1,0) \quad (B.2)$$

combinada com o vínculo

$$\nu_1 \int_0^1 \underline{\tilde{H}}(\mu') \underline{\theta}(\mu') \frac{d\mu'}{\nu_1 - \mu'} \underline{C} \underline{U}(\nu_1) = \underline{U}(\nu_1) \quad (B.3)$$

conforme procedimento apresentado na Referência 14.

Após manipulações algébricas, a Equação (B.2) pode ser escrita, incorporando o vínculo, Equação (B.3), como

$$\underline{H}^{-1}(\mu) = \underline{I} - \mu \underline{C} \left[\int_0^1 \underline{\tilde{H}}(\mu') \underline{\theta}(\mu') \underline{Z}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu + \mu'} + \underline{P}(\mu) \right] \underline{R}(\mu) \quad (B.4)$$

onde

$$\underline{Z}(\mu) = \underline{Y} \underline{\Delta}(-\mu) \quad (B.5)$$

$$\underline{P}(\mu) = \frac{\nu_1 - 1}{\nu_1 + \mu} [\underline{U}(\nu_1) \quad \underline{0}] + (\kappa - 1) \frac{\nu_2 - 1}{\nu_2 + \mu} [\underline{0} \quad \underline{U}(\nu_2)] \quad (\text{B.6})$$

$$\underline{R}(\mu) = \underline{\Delta}^{-1}(\mu) \underline{Y}^{-1} \quad (\text{B.7})$$

sendo, para $\kappa = 1$

$$\underline{\Delta}(\mu) = \begin{bmatrix} \frac{\nu_1(1+\mu)}{\nu_1+\mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

e

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{C} \underline{U}(\nu_1) & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

e, para $\kappa = 2$

$$\underline{\Delta}(\mu) = \begin{bmatrix} \frac{\nu_1(1+\mu)}{\nu_1+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\nu_2(1+\mu)}{\nu_2+\mu} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

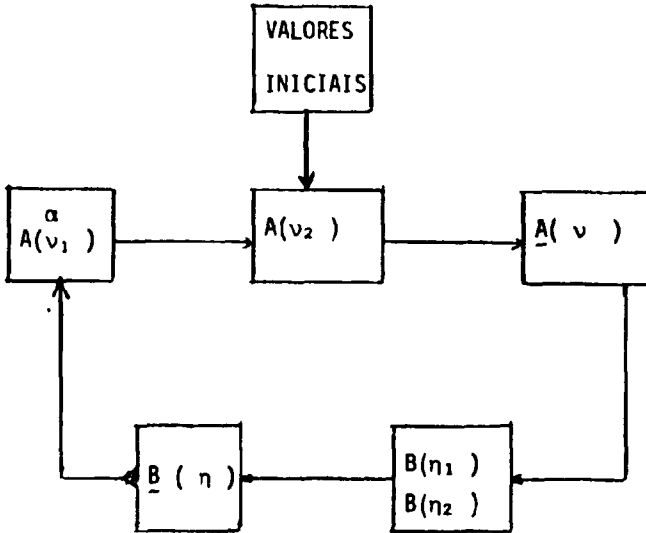
$$\underline{Y} = [\underline{C} \underline{U}(\nu_1) \quad \underline{C} \underline{U}(\nu_2)] \quad (\text{B.11})$$

A Equação (B.4) foi solucionada iterativamente, aproximando-se as integrais pelo método de quadraturas de Gauss (60 pontos). Para uma precisão de 10^{-10} , foram necessárias por volta de 30 iterações por conjunto.

Conhecendo-se as matrizes \underline{H}_j , procedeu-se à solução do sistema acoplado de equações que forneça os coeficientes e a meia espessura crítica, iterativamente.

O valor inicial da meia espessura crítica foi tirado de uma solução \underline{P}_N de baixa ordem ($N = 3$), o coeficiente $A(\nu_1)$ com a normalização $\exp(\alpha/\nu_1)$ e os demais coeficientes postos arbitrariamente iguais a zero. O ciclo foi repetido até que nenhum dos parâmetros variasse mais de 10^{-6} entre iterações.

1) esquema adotado foi o seguinte



Além dos dois casos para os quais foram apresentados resultados numéricos no Capítulo 4, tentou-se resolver um sistema modelando um reator rápido, no entanto a convergência revelou-se muito lenta, realmente proibitiva em termos de tempo de computação, mesmo realizando-se certas inversões no esquema iterativo apresentado.

Para conhecer a precisão dos resultados obtidos, testou-se numericamente a condição de continuidade na interface, Equação (3.1.4) em duas formas. A primeira, conhecida como "teste dos momentos" verifica a igualdade

$$\int_{-1}^1 I_1(\alpha, \mu) \mu^k d\mu = \int_{-1}^1 \underline{I}_1(\alpha, \mu) \mu^k d\mu \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.12})$$

e a outra, o chamado "teste ponto a ponto", verifica se

$$I_1(\alpha, \mu_j) = \underline{I}_1(\alpha, \mu_j) \quad (\text{B.13})$$

para qualquer $\mu_j \in (-1, 1)$.

O teste dos momentos foi aplicado até a ordem $k = 20$, fornecendo um mínimo de 5 dígitos de precisão no Caso 1 e 6 dígitos no Caso 2.

Na verificação dos resultados do teste ponto a ponto, observou-se particularmente que a precisão obtida é geralmente igual à fornecida pelo teste dos momentos, exceto para valores de $|\mu|$ próximo a 1. Isto é causado pelo comportamento numérico de certas funções matemáticas como $\ln\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$ que estão embutidas na expressão final do fluxo angular. O teste dos momentos

também tem problemas deste tipo, porém atenuados pela integração sobre $\mu \in (-1,1)$ e portanto, é mais apropriado para indicar a precisão geral obtida na meia espessura crítica e fluxo total, uma vez que mede a precisão média no intervalo angular e não influências locais como o teste ponto a ponto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A., eds. *Handbook of mathematical functions*. New York, Dover, 1965.
2. AMBARZUMIAN, V. A. Diffuse reflection of light by a foggy medium. *C. r. Acad. Sci. USSR*, Moscow, 38:229-32, 1943.
3. BELL, G. I. & GLASSTONE, S. *Nuclear reactor theory*. New York, Van Nostrand Reinhold, 1970.
4. BURNISTON, E. E.; MULLIKIN, T. W. & SIEWERT, C. E. Steady-state solutions in two-group theory of neutron diffusion. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 13:1461-5, 1972.
5. CARLSON, B. G. *Solution of transport equation by S_N approximations*. Los Alamos, N. Mex., Los Alamos Scientific Laboratory, 1953. (LA-1599).
6. CASE, K. M. Elementary solutions of the transport equation and their applications. *Ann. Phys.*, New York, 9:1-23, 1960.
7. _____ & ZWEIFEL, P. F. Existence and uniqueness theorems for the neutrons transport equation. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 4:1276-85, 1963.
8. _____ & ZWEIFEL, P. F. *Linear transport theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1967.
9. CHANDRASEKHAR, S. *Radiative transfer*. London, Oxford University Press, 1950.
10. ERDMANN, R. C. & SIEWERT, C. E. Green's functions for the one-speed transport equation in spherical geometry. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 9:81-9, 1968.
11. GREENE, N. M. & CRAVEN, C. N. *XSDRN: a discrete ordinates spectral averaging code*. Oak Ridge, Oak Ridge National Laboratory, July 1969. (ORNL-TM-2500).
12. ISHIGURO, Y. On multi-region problems in plane geometry and the use of half-range orthogonality relations. (Aceito para publicação em *Nucl. Sci. Engng*, New York).
13. ISHIGURO, Y. On two-media problems in two-group neutron transport theory. (Submetido para publicação em *Nucl. Sci. Engng*, New York).
14. _____, *Two-group neutron-transport theory with linearly anisotropic scattering: half-range orthogonality and critical slab problem*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, ago. 1973. (IEA-306).
15. _____ & JORGE, E. *Two-group Milne problem: a numerical study of the effect of scattering anisotropy*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, dez. 1974. (IEA-368).

16. _____ & MAIORINO, J. R. Two half-space Milne problem in two-group neutron transport theory. *Trans. Am. nucl. Soc.*, Hinsdale, Ill., 22:253-4, 1975.
17. JAHUO, P. & RAJAMAKI, M. Energy dependent neutron transport theory in adjacent half-spaces. *Nucl. Sci. Engng.*, New York, 43:145-53, 1971.
18. KRIESE, J. T.; SIEWERT, C. E. & YENER, Y. Two-group critical problem for slabs and spheres in neutron-transport theory. *Nucl. Sci. Engng.*, New York, 50:3-9, 1973.
19. KUSCER, I.; McCORMICK, N. J. & SUMMERFIELD, G. C. Orthogonality of Case's eigenfunctions in one-speed transport theory. *Ann. Phys.*, New York, 30:411-21, 1964.
20. KUSZELL, A. The critical problems for multilayer slab systems. *Acta phys. pol.*, Warsaw, 20:567-89, 1961.
21. LAMARSH, J. R. *Introduction to nuclear reactor theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
22. McCORMICK, N. J. & KUSCER, I. Half-space neutron transport with linearly anisotropic scattering. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 6:1939-45, 1965.
23. _____ & MENDELSON, M. R. Transport solution of the one-speed slab albedo problem. *Nucl. Sci. Engng.*, New York, 20:462-7, 1964.
24. MARK, J. C. *The spherical harmonics method. 1*. Chalk River, Ont., National Research Council of Canada, Atomic Energy Project, Division of Research, 1957. (CRT-340).
25. METCALF, D. R. & ZWEIFEL, P. F. Solution of two-group neutron transport equation. 1. *Nucl. Sci. Engng.*, New York, 33:307-17, 1968.
26. _____ & ZWEIFEL, P. F. _____. 2. *Nucl. Sci. Engng.*, New York, 33:318-26, 1968.
27. MITSIS, G. J. *Transport solutions to the monoenergetic critical problems*. Argonne, Ill., Argonne National Laboratory, Nov. 1963. (ANL-6787).
28. MUSKHELISHVILI, N. I. *Singular integral equations*. Groningen, P. Noordhoff, 1953.
29. PAHOR, S. & ZWEIFEL, P. F. Invariant imbedding and Case eigenfunctions. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 10:581-9, 1969.
30. SHURE, F. & NATELSON, M. Anisotropic scattering in half-space transport problems. *Ann. Phys.*, New York, 26:274-91, 1964.
31. SIEWERT, C. E. & BURKART, A. R. On the critical reactor problem for a reflected slab. *Nucl. Sci. Engng.*, New York, 58:253-5, 1975.
32. _____; BURNISTON, E. E. & BRIESE, J. T. Two-group neutron transport theory: existence and uniqueness of the H-matrix. *J. nucl. Energy*, London, 26:469-82, 1972.
33. _____ & ISHIGURO, Y. Two group neutron-transport theory: half-range orthogonality, normalization integrals, applications and computations. *J. nucl. Energy*, London, 26:251-69, 1972.

34. _____ & SHIEH, P. S. Two-group transport theory. *J. nucl. Energy*, London, 21:383-92, 1967.
35. _____ & ZWEIFEL, P. F. An exact solution of equations of radiative transfer for local thermodynamic equilibrium in the non-gray Case: picket fence approximation. *Ann. Phys.*, New York, 36:61-85, 1966.
36. STEWART III, J. E. *Two-media solutions to the neutron transport equation*. Charlottesville, University of Virginia, 1974. (Ph.D. Thesis).
37. YOSHIMURA, T. & KATSURAGI, S. Multigroup treatment of neutron transport in plane geometry. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 33:297-302, 1968.
38. ZELAZNY, R. Exact solution of a critical problem for a slab. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 2:538-42, 1961.
39. _____ & KUSZELL, A. Two-group approach in neutron transport theory in plane geometry. *Ann. Phys.*, New York, 16:81-5, 1961.

