

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
SECRETARIA DA INDÚSTRIA, COMÉRCIO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Autarquia Associada à UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**MAXIMIZAÇÃO DA POTÊNCIA DE UM REATOR TIPO PLACA, REFLETIDO,
COM DUPLA CRITICALIDADE EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO DA INTERFACE
CERNE REFLETOR**

MARIA CLARA FILIPPINI IERARDI

**Dissertação apresentada ao Instituto de Pesquisas
Energéticas e Nucleares como parte dos
requisitos para obtenção do grau de "Mestre -
Área Reatores Nucleares de Potência e
Tecnologia do Combustível Nuclear".**

**Orientadora:
Dra. Wilma Sonia Hehl de Sylos Cintra**

**São Paulo
1980**

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
SECRETARIA DA INDÚSTRIA, COMÉRCIO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Autarquia Associada à UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

MAXIMIZAÇÃO DA POTÊNCIA DE UM REATOR
TIPO PLACA, REFLETIDO, COM DUPLA
CRITICALIDADE EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO
DA INTERFACE CERNE REFLETOR



MARIA CLARA FILIPPINI IERARDI

Dissertação apresentada ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares como parte dos requisitos para obtenção do grau de "Mestre - Área Reatores Nucleares de Potência e Tecnologia do Combustível Nuclear".

Orientadora

Dra. Wilma Sonia Hehl de Sylos Cintra

SÃO PAULO
1980

T621.039.56
I22M

A0

ALDO,

CESAR E DANIELA

A G R A D E C I M E N T O S

Agradeço a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a execução deste trabalho.

Em especial, agradeço às seguintes pessoas e Instituições:

- Profa. Dra. Wilma Sonia Hehl de Sylos Cintra pela orientação, dedicação e amizade.

- Prof. Dr. Yují Ishiguro pelo interesse, sugestões e apoio.

- Prof. Dr. Atair Rios Neto pelas discussões e interesse.

- Prof. Dr. Antonio Dias Diegues, Gerente do Centro de Engenharia Nuclear do IPEN, pelas discussões e sugestões.

- Ao Mestre Wilson Nunes dos Santos pelos esclarecimentos e discussões.

- Ao IPEN e ao PRONUCLEAR pelos meios materiais e pelo auxílio financeiro.

- Aos colegas Joamar R. Vincent Read, Cesar Antonio Cinci e José Roberto Menezes Monteiro pelas discussões e sugestões.

- A Sra. Dayse Duarte Caliõ pelo trabalho de datilografia.

Í N D I C E

<u>RESUMO</u>	i
<u>ABSTRACT</u>	ii
1. <u>INTRODUÇÃO</u>	
1-1. Considerações Gerais	1
1-2. Revisão Bibliográfica	2
1-3. Objetivos	4
2. <u>FUNDAMENTOS TEÓRICOS UTILIZADOS NESTE TRABALHO</u>	
2-1. A Teoria de Difusão	6
2-2. A Teoria de Controle Ótimo.....	11
3. <u>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS</u>	
3-1. As Equações de Difusão	15
3-2. Elementos do Problema de Otimização	17
3-3. Normalização do Problema	23.
3-4. Resolução do Sistema de Equações Obtido	25
3-5. Condição de Criticalidade e Continuidade da Hamiltonia na	28
3-6. Sistema Adjunto para Dois Grupos de Energia de Neutrons	30
3-7. Cálculo da Potência	33
3-8. Cálculo da Massa Crítica	33
4. <u>APLICAÇÃO NUMÉRICA EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS</u>	35
5. <u>COMENTÁRIOS EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS</u>	48

6.	<u>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM QUATRO GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS</u>	
6-1.	As Equações de Difusão	52
6-2.	Elementos do Problema de Otimização	53
6-3.	Resolução do Sistema de Equações para Quatro Grupos de Energia de Neutrons	60
6-4.	Sistema Adjunto em Quatro Grupos de Energia de Neutrons	64
7.	<u>RESULTADOS NUMÉRICOS EM QUATRO GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS</u>	66
8.	<u>COMENTÁRIOS GERAIS</u>	80
	<u>APÊNDICE</u>	
	Zona Singular	84
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88

R E S U M O

Determina-se, através da Teoria de Controle Ótimo, a distribuição de combustível que maximiza a potência de um reator tipo placa, infinito, refletido, descrito pelo modelo da teoria de difusão. Tem-se como vínculos, o limite máximo permissível da densidade de potência e o limite máximo permissível da distribuição de combustível.

O vínculo na concentração de combustível é tal que, introduz de uma maneira não convencional, o refletor no reator.

Resultados em dois e quatro grupos de energia foram obtidos.

Foi verificada a existência de uma dupla criticidade dependendo da posição da interface cerne-refletor. Entretanto, somente uma das posições da interface que torna o reator crítico, maximiza a potência do mesmo.

A B S T R A C T

Using optimal control techniques, it is obtained the fuel distribution which maximizes the power of an infinite, reflected slab nuclear reactor. The reactor is described by a diffusion theory model. Both the maximum permissible power density and the maximum permissible fuel concentration are the only restraints.

The fuel concentration restraint is such that it introduces the reflector in the reactor in a non-conventional way.

Numerical results for both two and four energy groups are presented.

It is observed a double criticality depending on the position of the core-reflector interface. However, only one of these two conditions leads to maximum power reactor.

1. INTRODUÇÃO

1-1. Considerações Gerais

É de conhecimento geral, o fato de que as fontes de energia devem ser poupadas. Em energia nuclear, procura-se economizar o urânio usado como combustível. Deve-se também almejar, não só economizar o combustível, como também produzir energia a menores custos. Em reatores nucleares, entre outros parâmetros, procura-se minimizar a massa crítica, ou por exemplo, o envenenamento pelo xenônio através de uma programação do acionamento e controle do reator.

Esses problemas citados, são controlados usando-se teorias de otimização. Uma das teorias mais modernas é a Teoria de Controle Ótimo.

Para obtenção das equações dinâmicas de um reator, a teoria de difusão, a teoria de transporte, cinética de reatores, leis de queima do combustível e de produção de veneno são usadas. Essas equações controlam as variáveis de estado que descrevem o sistema em estudo.

Tem-se, também, as variáveis de controle, tais como enriquecimento do combustível, configuração do cerne, pressão do fluido refrigerante, temperatura, reatividade negativa ou positiva introduzida. Sobre essas variáveis, em geral, se exerce o controle do sistema.

Para uso da teoria de controle ótimo, tem-se que obter as equações dinâmicas que regem as variáveis de estado, as variáveis de controle, e definir o índice de performance que é a grandeza que se quer otimizar, isto é, maximizar ou minimizar. Deve-se também, definir as possíveis restrições que devem ser respeitadas por motivos físicos, tecnológicos, principalmente os de segurança.

Em teoria de controle ótimo, essas restrições são vínculos nas variáveis de controle e/ou vínculos nas variáveis de estado. Como vínculos na variável de estado pode-se citar a limitação do fluxo térmico, ou limitação na soma dos fluxos, e como vínculos na variável de controle, pode-se ter, entre outros, a limitação máxima ou mínima da concentração de combustível, limitação na densidade de potência, limitação na temperatura do canal de combustível, limitação na pressão do refrigerante, etc.

1-2. Revisão Bibliográfica

Uma vez verificada a importância da otimização em reatores nucleares, vários pesquisadores vem se preocupando com o problema.

Em 1956, Goertzel /8/ apresentou um trabalho sobre otimização nos projetos de reatores, visando o menor custo possível do ciclo de combustível, permitindo a máxima potência térmica. Trabalhos semelhantes foram publicados por Hofmann e Hurwitz Jr /13/, Devooght /6/, Shapiro /21/, Otsuka /16/ e Kochurov /14/.

Roberts e Smith Jr /19/, em 1965, otimizaram o desligamento de um reator, através de um fluxo programado, minimizando o tempo necessário de aplicação desse fluxo para evitar o problema da radioatividade induzida pelo xenônio após desligamento do reator. Visando ainda o controle dessa radioatividade, usando programação dinâmica e controle variacional, Stacey Jr /22/, /23/ publicou trabalhos em 1968 e 1969.

T.S. Zaritskaya e A.P. Rudik /25/, em 1967 publicaram um trabalho onde maximizaram a potência de um reator de geometria cilíndrica e refrigerado a gás. Usaram o modelo de um grupo de energia de neutrons e o controle na distribuição de combustível. A

presentaram soluções analíticas e resultados numéricos.

Soluções apenas teóricas para reatores tipo placa, com diferentes conjuntos de vínculos, tanto nas variáveis de controle, como nas variáveis de estado, foram apresentadas por R.A. Axford /1/.

Em 1970, P. Goldschmidt e J. Quenon /11/ apresentaram um estudo da minimização da massa crítica de um reator rápido, de potência dada e geometria plana. Utilizaram um grupo de energia de neutrons e controlaram a distribuição ótima de combustível com vínculos na densidade de potência e na concentração de combustível. Apresentaram soluções analíticas e resultados de aplicações numéricas.

Posteriormente, em 1972, P. Goldschmidt /9/ publicou um artigo onde determinou a massa crítica mínima de reatores intermediários em geometria plana e usando dois grupos de energia de neutrons. Vínculos na densidade de potência e no enriquecimento de combustível foram impostos. Em outra publicação de 1973 /10/, seu trabalho tratou de aplicações numéricas de minimização de custos do ciclo do combustível em reatores rápidos, usando geometria plana e um grupo de energia de neutrons. Controlou a distribuição do combustível impondo vínculos no enriquecimento, na potência e na densidade de potência.

Em 1974, em dois artigos /2/, /3/, V. Bartosek e Zalesky apresentaram soluções analíticas e resultados numéricos de um problema onde maximizaram a potência de um reator tipo placa, usando um grupo de energia de neutrons, com vínculos na densidade de potência e no nível do fluxo.

N. Tsouri e J. Rosemberg /24/, em 1975, com o uso da teoria de controle ótimo, minimizaram as oscilações do xenônio indesejáveis nas mudanças de nível de potência.

Utilizando a teoria de controle ótimo, em 1977, W.N. dos Santos /20/, para obtenção da potência máxima de um reator tipo placa, infinito, não refletido, otimizou a distribuição de combustível com vínculos na densidade de potência e na concentração de combustível. Usou a teoria de difusão e modelo de dois e quatro grupos de energia de neutrons. Apresentou soluções analíticas e numéricas.

Este trabalho está relacionado com o estudo feito por W.N. dos Santos. Foi também considerado um reator tipo placa, infinito, e obtida a distribuição ótima de combustível que maximiza a potência do reator, sujeito a vínculos na densidade de potência e na distribuição de combustível. A diferença entre os dois trabalhos está nos vínculos impostos na distribuição de combustível.

Essa diferença de vínculos na distribuição de combustível, faz com que o reator, no trabalho de W.N. dos Santos /20/, tenha duas zonas no cerne, com distribuição de combustível diferentes e não seja refletido, enquanto que o reator obtido neste trabalho tem duas zonas, porém uma é cerne e outra refletor. Além disso, através desse vínculo, usando a teoria de controle ótimo, o refletor é introduzido de uma maneira não convencional, como é feita através da teoria clássica de difusão.

1-3. Objetivos

Como objetivo geral, este trabalho pretende mostrar como é possível aplicar a Teoria de Controle Ótimo no campo da Engenharia Nuclear.

A utilização da Teoria de Controle Ótimo em Engenharia é razoavelmente recente e, muito mais recente ainda, é a sua utilização no campo da Engenharia Nuclear.

Como objetivos específicos pretende-se:

1) determinar a distribuição ótima de combustível num reator tipo placa, de meia-espessura a , que maximiza a potência de um reator sujeito aos vínculos:

a) a densidade de potência, $q(x)$, é menor ou igual ao seu limite máximo permissível, q_{\max} , isto é:

$$q(x) \leq q_{\max}$$

b) a concentração de combustível, $N(x)$, é maior ou igual a zero, ou seja:

$$N(x) \geq 0$$

Em controle ótimo, costuma-se usar a desigualdade na forma:

$$- N(x) \leq 0$$

2) mostrar que o vínculo imposto imediatamente acima, introduz um refletor no reator.

3) mostrar que um reator com os vínculos impostos nesse trabalho, pode ter dupla criticalidade, dependendo da posição da interface cerne-refletor. Entretanto, só uma das posições dessa interface maximiza a potência do reator.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS UTILIZADOS NESTE TRABALHO

Neste capítulo são expostos, numa forma sucinta, os fundamentos teóricos necessários para a compreensão do presente trabalho. Maiores detalhes poderão ser encontrados nas referências básicas /4/, /5/, /7/, /15/, /18/.

2-1. A Teoria de Difusão

A equação da continuidade que fornece a variação do número de neutrons monoenergéticos com o tempo em um elemento de volume dV arbitrário é:

$$\frac{\partial n}{\partial t}(\vec{r}, t) = S(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) - \text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (2-1.1)$$

onde

$n(\vec{r}, t)$ - densidade de neutrons no ponto \vec{r} e no tempo t , dada em neutrons por cm^3 .

$S(\vec{r}, t)$ - Termo da fonte que dá o número de neutrons emitidos por cm^3 , por segundo, no tempo t , por fontes localizadas no ponto \vec{r} .

$\Sigma_a(\vec{r})$ - secção de choque macroscópica de absorção de neutrons, dada em cm^{-1} . Representa a probabilidade de um neutron ser absorvido pelo meio, no ponto \vec{r} , por unidade de comprimento de deslocamento do neutron.

$\phi(\vec{r}, t)$ - fluxo de neutrons no ponto \vec{r} e no tempo t , dado em neutrons por cm^2 por segundo. É definido como o produto da velocidade escalar dos neutrons pela densidade de neutrons no ponto \vec{r} .

$\vec{J}(\vec{r}, t)$ - vetor densidade de corrente de neutrons, definido como:

$$\vec{J} = \int_{4\pi} n(\vec{r}, \vec{\omega}) \vec{v} d\Omega$$

onde $n(\vec{r}, \vec{\omega})$ é a densidade de neutrons, em \vec{r} , com velocidade \vec{v} , cuja direção se encontra dentro do ângulo sólido diferencial $d\Omega$, centrado na direção $\vec{\omega}$.

$\Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t)$ - termo de perda de neutrons por absorção no meio. Fornece o número de neutrons absorvidos por cm^3 e por segundo no elemento de volume dV em \vec{r} , e no tempo t .

$\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t)$ - termo de perda de neutron por fuga do sistema. É o número de neutrons que escapam do elemento de volume dV em \vec{r} , no tempo t , por segundo. A fuga é dada pela corrente líquida de neutrons que atravessa a área do elemento de volume. Se \vec{J} é o vetor densidade de corrente de neutrons e \vec{n} o vetor normal a um elemento de área dA , então a fuga é dada por:

$$F = \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dA \quad (2-1.2)$$

Aplicando o teorema do divergente visando obter o elemento de volume dV , comum a todos os elementos da equação (2-1.1) tem-se:

$$F = \text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) dV$$

Diz-se que o reator está em estado estacionário se o número de neutrons no elemento de volume dV é constante com o tempo. Sendo assim, o fluxo, as correntes e os termos de fontes são independentes do tempo e a equação (2-1.1) assume a forma:

$$\text{div } \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}) - S(\vec{r}) = 0 \quad (2-1.3)$$

que é conhecida como equação da continuidade de neutrons no estado estacionário. Em semelhança aos gases, foi introduzida a lei de

Fick para resolução dessa equação.

A lei de Fick relaciona o fluxo à corrente de neutrons, respeitando algumas condições /15/, /7/ através da fórmula:

$$\vec{J}(\vec{r}) = - D(\vec{r}) \text{ grad } \phi(\vec{r}) \quad (2-1.4)$$

onde:

$D(\vec{r})$ - é o coeficiente de difusão de neutrons, e representa a difusividade de neutrons no meio.

A equação (2-1.3) torna-se, então:

$$\text{div } D(\vec{r}) \text{ grad } \phi(\vec{r}) - \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0 \quad (2-1.5)$$

O coeficiente de difusão pode ser considerado, usualmente, como sendo somente o do moderador e tomado como constante em um meio em que o moderador é uniformemente distribuído. Pode-se então escrever:

$$D \nabla^2 \phi(\vec{r}) - \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0 \quad (2-1.6)$$

onde:

∇^2 - é um operador de segunda ordem e sua forma está associada à geometria do sistema.

Como os neutrons foram considerados monoenergéticos, e na realidade suas energias variam desde cerca de zero até dezenas de megaeletronvolts (MeV), os resultados que podem ser obtidos com a equação (2-1.6) são apenas estimativas do que ocorre no reator.

Entretanto, o espectro de neutrons pode ser dividido num número arbitrário de intervalos de energia, de amplitudes também arbitrárias. As constantes físicas para cada intervalo são tomadas como médias sobre o intervalo. Esse método é conhecido como método de multigrupo e, quanto maior o número de grupos, mais realísticos são os resultados obtidos.

O sistema de equações diferenciais que descreve o com-

portamento de neutrons num reator em estado estacionário, no modelo de multigrupo, é dado por:

$$D_g \nabla^2 \phi_g(\vec{r}) - \Sigma_{ag} \phi_g(\vec{r}) - \left[\sum_{h>g}^n \Sigma(g \rightarrow h) \right] \phi_g(\vec{r}) + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma(h \rightarrow g) \phi_h(\vec{r}) + \chi_g \sum_{h=1}^n \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h(\vec{r}) = 0 \quad (2-1.7)$$

onde:

$g = 1, 2, \dots, n$ e n é o número de grupos considerados. Quanto menor g mais energéticos são os neutrons do grupo.

D_g - coeficiente de difusão do grupo g

ϕ_g - fluxo de neutrons no grupo g

Σ_{ag} - secção de choque macroscópica de absorção no grupo g

$\Sigma(g \rightarrow h)$ - secção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g para o grupo h ($g < h \leq n$)

χ_g - fração do espectro de neutrons de fissão que nascem no grupo g

ν_h - número médio de neutrons emitidos por fissão ocorrida no grupo h

Σ_{fh} - secção de choque macroscópica de fissão no grupo h

ϕ_h - fluxo de neutrons no grupo h

$\Sigma(h \rightarrow g)$ - secção de choque macroscópica de espalhamento do grupo h para o grupo g ($1 \leq h \leq g$)

Os termos da equação acima são:

$D_g \nabla^2 \phi(\vec{r})$ - termo de perda de neutrons por fuga, no grupo g

$\Sigma_{ag} \phi_g(\vec{r})$ - termo de perda de neutrons por absorção, no grupo g

$\left[\sum_{h>g}^n \Sigma(g \rightarrow h) \right] \phi(\vec{r})$ - termo de perda de neutrons por transferência do grupo g para outros grupos de energias mais baixas

$\left[\sum_{h=1}^{g-1} \Sigma(h \rightarrow g) \right] \phi_h(\vec{r})$ - termo fonte. Neutrons de grupos de energias h mais altas, são transferidos para o grupo g

$\chi_g \sum_{h=1}^n \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h(\vec{r})$ - termo fonte. Neutrons que nascem no grupo g provenientes de fissões ocorridas em outros grupos de energia, bem como em g

A corrente líquida de neutrons é dada por:

$$\vec{J}_g(\vec{r}) = -D_g \text{grad } \phi_g(\vec{r}) \quad (2-1.8)$$

As condições de contorno apropriadas para a resolução deste problema, fornecidas pela física de reatores /7/ e /15/, são:

- Os fluxos devem se anular na fronteira extrapolada do reator.
- Quando o sistema é simétrico, as correntes são nulas no centro do reator.
- Os fluxos e as correntes devem ser contínuos nas interfaces que separam duas regiões adjacentes no reator.

Tem-se então, neste ítem, (2-1), os fundamentos básicos de física de reatores utilizados neste trabalho.

2-2. A Teoria de Controle Ótimo

A aplicação da teoria de controle ótimo a um problema, visa otimizar, isto é, maximizar ou minimizar a função índice de performance, IP, selecionada para o problema.

O índice de performance assume a seguinte forma:

$$IP = g + \int_{x_i}^{x_f} f_o dx \quad (2-2.1)$$

onde

$$g = g\left(x_i, Y_j(x_i) ; x_f, Y_j(x_f)\right) \quad j = 1, 2 \dots n \quad (2-2.2)$$

é uma função que descreve o sistema nos estados iniciais e finais.

As funções Y_j ($j = 1 \dots n$) são as n funções de variáveis de estado que descrevem o sistema.

$$f_o = f_o(y, u, x) \quad (2-2.3)$$

sendo:

y - a variável de estado

u - a variável de controle

x - a variável independente

Estas variáveis são, em geral, vetores de dimensões próprias ao sistema.

O problema tem sua solução sujeita aos seguintes vínculos:

- dinâmicos

$$\dot{Y}_i = f_i(y, u, x) \quad i = 1, 2, \dots n \quad (2-2.4)$$

- de contorno

$$\psi_j = \psi_j\left(x_i, Y(x_i), x_f, Y(x_f)\right) = 0 \quad j = 1, 2 \dots m \quad (2-2.5)$$

- de desigualdade na variável de controle

$$C_K(y, u, x) \leq 0 \quad K = 1, 2 \dots L \quad (2-2.6)$$

Em um problema com vínculos de desigualdade na variável de controle, pode-se definir a Hamiltoniana da seguinte forma:

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \sum_{K=1}^L u_K C_K \quad (2-2.7)$$

onde λ_i e u_K são os multiplicadores de Lagrange.

Os multiplicadores u_K devem ser tais que:

$$u_K \neq 0 \quad \text{se} \quad C_K = 0 \quad (2-2.8a)$$

$$u_K = 0 \quad \text{se} \quad C_K < 0 \quad (2-2.8b)$$

Sendo u^* o controle que maximiza o índice de performance, a condição de Weierstrass requer que:

$$H(x, y, u^*, \lambda) \geq H(x, y, u, \lambda) \quad (2-2.9)$$

De acordo com a Condição de Weierstrass, se o controle é ótimo, a Hamiltoniana em qualquer ponto do sistema é máxima. Portanto, o controle u deve ser determinado de modo a maximizar a Hamiltoniana em cada x durante o processo, de modo a se obter a maximização do IP.

Na solução de um problema de controle ótimo, aparecem as seguintes equações, provenientes do Princípio de Máximo de Pontryagin:

- n equações adjuntas

$$\dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (2-2.10)$$

- n equações dinâmicas

$$\dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \quad (2-2.11)$$

- equação de controle

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (2-2.12)$$

Introduzindo-se m multiplicadores constantes indeterminados, pode ser definida na teoria de controle, uma função G , da seguinte maneira:

$$G = g + \sum_{j=1}^m P_j \psi_j \quad (2-2.13)$$

A condição de transversalidade /4/, /5/ fornece as seguintes condições de contorno:

$$\left[H(x_i) + \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] dx_i = 0 \quad (2-2.14)$$

$$\left[H(x_f) - \frac{\partial G}{\partial x_f} \right] dx_f = 0 \quad (2-2.15)$$

$$\left[\lambda_j(x_i) - \frac{\partial G}{\partial Y_j(x_i)} \right] dY_j(x_i) = 0 \quad (2-2.16)$$

$$\left[\lambda_j(x_f) - \frac{\partial G}{\partial Y_j(x_f)} \right] dY_j(x_f) = 0 \quad (2-2.17)$$

A existência de vínculos de desigualdade na variável de controle (equação 2-2.6) criam fronteiras que devem ser respeitadas pelo controle.

O controle pode situar-se dentro ou sobre as diversas fronteiras criadas pelos vínculos. Nos pontos de entrada e saída das fronteiras, deve haver continuidade da Hamiltoniana e dos multiplicadores de Lagrange.

A Hamiltoniana pode ser uma função linear ou não linear do controle u . Sendo uma função não linear do controle, a equação (2-2.12) apresenta o controle explicitamente. Sendo assim, a condição de Legendre-Clebsch /18/ para que um arco seja ótimo, é verificada e a solução do problema é ótima. Se a Hamiltoniana é uma função linear em relação ao controle u , isto é, se puder ser colocada na forma:

$$H = \Phi u + \pi \quad (2-2.18)$$

onde

$$\Phi = \Phi(\lambda_j, Y_j, x) \quad (2-2.19)$$

$$e \quad \pi = \pi(\lambda_j, Y_j, x) \quad (2-2.20)$$

então, ao se aplicar a equação (2-2.12), obtem-se relações entre Y_i , λ_i e x sem que o controle u apareça explicitamente. Nesse caso, quando se relaciona as equações (2-2.18) e (2-2.9), nota-se que se $\Phi = 0$, u pode assumir qualquer valor possível. Surge, então, o que se chama de zona ou arco singular, onde o controle ótimo, se existir, pode ser determinado pela seguinte sequência de condições:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = \dots = \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0 \quad (2-2.21)$$

Utilizando-se as relações (2-2.10) e (2-2.11), o controle u pode surgir explicitamente.

Para que um arco singular seja ótimo, ele deve obedecer a condição de Legendre-Clebsch generalizada, mais conhecida como "Critério de Robbins" /18/:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{2k} \frac{\partial H}{\partial u} \right] \leq 0 \quad (2-2.22)$$

Sendo k o valor mínimo de m para o qual a condição (2-2.22) é verificada, diz-se que $2k$ é o grau de singularidade do arco.

Não existindo zona singular, o controle só pode estar sobre as fronteiras determinadas pelos vínculos.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

3-1. As Equações de Difusão

Neste trabalho, conforme já foi mencionado, pretende-se encontrar a distribuição ótima de combustível que maximiza a potência de um reator tipo placa infinita, de meia espessura a , sujeito aos vínculos:

- na densidade de potência,

$$q(x) \leq q_{\max}$$

- na distribuição de combustível

$$N(x) \geq 0$$

Aplicando a teoria de controle ótimo e usando a teoria de difusão, resolveu-se o problema em dois grupos de energia. Considerou-se o grupo de energia mais baixa como o grupo térmico.

Para a solução do problema foram feitas as seguintes simplificações físicas do sistema, as quais não afetam o problema, como será visto no Capítulo 5:

- os neutrons de fissão nascem dentro do grupo de energia mais alta. Assim,

$$\chi_1 = 1 \quad e \quad \chi_2 = 0 \quad (3-1.1)$$

- as fissões são produzidas somente por neutrons térmicos. Nesse caso,

$$\Sigma_{f1} = 0 \quad \Sigma_{f2} \neq 0$$

Foram representados

$$\Sigma_{f2} = \Sigma_f \quad e \quad \nu_2 = \nu \quad (3-1.2)$$

- só ocorre absorção de neutrons dentro do grupo térmico, ou seja,

$$\Sigma_{a1} = 0 \quad \Sigma_{a2} \neq 0$$

Representou-se

$$\Sigma_{a2} = \Sigma_a \quad (3-1.3)$$

- não há "upscattering", isto é, não há espalhamento de neutrons do grupo de energia mais baixa para o grupo de energia mais alta, portanto:

$$\Sigma_{R2} = 0 \quad (3-1.4)$$

- sendo desprezível a absorção em qualquer grupo que não seja o grupo térmico, a secção de choque de remoção do grupo g é dada por:

$$\Sigma_{Rg} = \sum_{h>g}^n \Sigma(g \rightarrow h) \quad (3-1.5)$$

- os coeficientes de difusão D_g podem ser considerados constantes.

- a matriz de espalhamento $\Sigma(g \rightarrow h)$ é independente da concentração variável de combustível.

Nessas condições, as equações de difusão, em dois grupos de energia de neutrons e geometria plana, são dadas por:

$$\frac{d}{dx} \left[D_1 \frac{d}{dx} \phi_1(x) \right] - \Sigma_{R,1} \phi_1(x) - \nu \Sigma_f \phi_2(x) = 0 \quad (3-1.6)$$

$$\frac{d}{dx} \left[D_2 \frac{d}{dx} \phi_2(x) \right] - \Sigma_a \phi_2(x) - \Sigma_{R,1} \phi_1(x) = 0 \quad (3-1.7)$$

Através da Lei de Fick /15/, as correntes de neutrons são dadas por:

$$J_1(x) = - D_1 \frac{d}{dx} \phi_1(x) \quad (3-1.8)$$

$$J_2(x) = - D_2 \frac{d}{dx} \phi_2(x) \quad (3-1.9)$$

A potência do reator, a qual é dada pela integral da densidade de potência, pode ser escrita como:

$$\text{Pot} = 2 \int_0^a q(x) dx \quad (3-1.10)$$

E sendo a densidade de potência $q(x)$ igual a
 $K \sigma_f N(x) \phi_T(x)$, onde ϕ_T é o fluxo térmico e K um fator que
 converte o número de fissões por cm^3 por segundo em Watts por
 cm^3 , considerando uma liberação de energia por fissão de 200 MeV,
 pode-se escrever:

$$\text{Pot} = 2 \int_0^a K \sigma_f N(x) \phi_T(x) dx \quad (3-1.11)$$

3-2. Elementos do Problema de Otimização

Para poder tratar as equações dinâmicas que são equações diferenciais de segunda ordem, pela teoria de controle ótimo, deve-se transformá-las em equações diferenciais de primeira ordem. Convencionou-se:

$$Y_j = \phi_g \quad \text{quando} \quad j = 2g - 1 \quad (g = 1, 2) \quad (3-2.1)$$

$$Y_j = J_g \quad \text{quando} \quad j = 2g \quad (g = 1, 2) \quad (3-2.2)$$

isto é, os Y_s de índice ímpar são os fluxos e os de índice par são as correntes.

Pode-se escrever as secções de choque macroscópicas de fissão e absorção, em função da distribuição de combustível, na forma:

$$\Sigma_f(x) = N(x) \sigma_f \quad (3-2.3)$$

$$\Sigma_a(x) = \Sigma_a^M + \Sigma_a^F = \Sigma_a^M + N(x) \sigma_a^F \quad (3-2.4)$$

onde

- σ_f é a secção de choque microscópica de fissão, dada em cm^2
- Σ_a^M é a secção de choque macroscópica de absorção do moderador,

dada em cm^{-1}

- σ_a^F é a secção de choque microscópica de absorção do combustível, dada em cm^2

- $N(x)$ é a concentração de combustível, dada em átomos de material físsil por cm^3

Combinando as equações (3-1.6) e (3-1.7) com as equações (3-1.8) e (3-1.9) obtém-se:

$$\dot{Y}_1 = - \frac{1}{D_1} Y_2(x) \quad (3-2.5)$$

$$\dot{Y}_2 = v \sigma_f N(x) Y_3(x) - \Sigma_{R,1} Y_1(x) \quad (3-2.6)$$

$$\dot{Y}_3 = - \frac{1}{D_2} Y_4(x) \quad (3-2.7)$$

$$\dot{Y}_4 = \Sigma_{R,1} Y_1(x) - \left| \Sigma_a - N(x) \sigma_a^F \right| Y_3(x) \quad (3-2.8)$$

Como condições de contorno tem-se:

- os fluxos são nulos na fronteira do reator, isto é:

$$Y_1(a) = Y_3(a) = 0 \quad (3-2.9)$$

- as correntes são nulas no centro do reator devido a simetria do sistema:

$$Y_2(0) = Y_4(0) = 0 \quad (3-2.10)$$

Os dois vínculos impostos na variável de controle, para a otimização do sistema são:

- a densidade de potência, $q(x)$, não deve exceder a um valor limite, q_{\max} , isto é:

$$C_1 = q(x) \leq q_{\max} \quad (3-2.11)$$

- a concentração de combustível $N(x)$ é maior ou igual a zero, ou seja:

$$C_2 = -N(x) \leq 0 \quad (3-2.12)$$

Esse último vínculo permite a introdução de um refletor através de uma maneira diferente da tradicional da teoria de difusão.

Da condição:

$$q(x) \leq q_{\max}$$

explicita-se $N(x)$ como:

$$q(x) = K \sigma_f N(x) Y_3(x) \leq q_{\max} \quad (3-2.13)$$

Então,

$$N(x) \leq \frac{q_{\max}}{K \sigma_f Y_3(x)} \quad (3-2.14)$$

Deseja-se maximizar a potência:

$$P = 2 \int_0^a K \sigma_f N(x) Y_3(x) dx \quad (3-2.15)$$

e o índice de performance fica:

$$IP = \int_0^a K \sigma_f N(x) Y_3(x) dx \quad (3-2.16)$$

Com todos esses elementos, pode-se agora escrever a Hamiltoniana em teoria de 2 grupos de neutrons, a partir da definição dada na secção 2-2, como:

$$H = K \sigma_f N(x) Y_3(x) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i(x) \frac{d}{dx} Y_i(x) + u_1(x) C_1 \left[Y_3(x), N(x) \right] + u_2(x) C_2 \left[N(x) \right] \quad (3-2.17)$$

Os valores dos vínculos multiplicadores, são tais que:

$$u_1 = 0 \quad \text{se} \quad C_1 \neq 0$$

$$u_1 \neq 0 \quad \text{se} \quad C_1 = 0$$

$$u_2 = 0 \quad \text{se} \quad C_2 \neq 0$$

$$u_2 \neq 0 \quad \text{se} \quad C_2 = 0$$

Assim o reator é dividido em duas zonas, em uma das quais $C_1 = 0$ e na outra $C_2 = 0$. Há portanto, duas possibilidades de sequência dessas duas zonas, definidas por:

$$C_1 = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq \alpha_1$$

$$C_2 = 0 \quad \text{para} \quad \alpha_1 \leq x \leq a$$

ou

$$C_2 = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq \alpha_1$$

$$C_1 = 0 \quad \text{para} \quad \alpha_1 \leq x \leq a$$

A segunda sequência deve ser descartada, pois a equação $C_1 = 0$ requereria uma variável de controle $N(x)$ ilimitada $[N(x) \rightarrow \infty]$ na fronteira do reator, o que desrespeita um dos vínculos impostos. Assim, a primeira sequência define as zonas.

Então, o reator consiste de uma zona com densidade de potência constante, o cerne, seguida de uma zona onde a distribuição de combustível é nula, o refletor.

O caso da não existência de uma zona singular, ou seja, $C_1 < 0$ e $C_2 < 0$, ficou provada usando-se o critério de Robbins /18/, conforme foi mostrado no Apêndice.

Pode-se, agora, escrever a Hamiltoniana para cada zona do reator:

$$\text{- para } 0 \leq x \leq \alpha_1$$

$$C_1 = 0$$

ou seja,

$$K \sigma_f N(x) Y_{3c}(x) - q_{\max} = 0 \quad (3-2.18)$$

tem-se que:

$$N(x) = \frac{q_{\max}}{K \sigma_f Y_3(x)} \quad (3-2.19)$$

E pela condição (2-2.8)

$$u_1 \neq 0$$

portanto

$$H_C = K \sigma_f N(x) Y_3(x) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \dot{Y}_i(x) + u_1(x) \left[K \sigma_f N(x) Y_3(x) - q_{\max} \right] \quad (3-2.20)$$

Usando a equação de controle, ou seja

$$\frac{\partial H}{\partial N} = 0$$

determinou-se u_1 por:

$$u_1 = \frac{\sigma_a^F}{K \sigma_f} \lambda_4(x) - \frac{v}{K} \lambda_2(x) - 1 \quad (3-2.21)$$

- para $\alpha_1 \leq x \leq a$

$$C_2 = 0 \quad (3-2.22)$$

ou seja

$$- N(x) = 0 \quad (3-2.23)$$

E nesse caso,

$$u_2 \neq 0$$

Portanto

$$H_E = K \sigma_f N(x) Y_3(x) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \dot{Y}_i(x) + u_2(x) \left[N(x) \right] \quad (3-2.24)$$

Da mesma maneira, usando-se a equação de controle

$$\frac{\partial H}{\partial N} = 0$$

determinou-se u_2 por:

$$u_2(x) = Y_3(x) \left[-\sigma_a^F \lambda_4(x) + v \sigma_f \lambda_2(x) + K \sigma_f \right] \quad (3-2.25)$$

As equações de estado podem agora ser escritas para ca

da zona do reator, uma vez que se tem a distribuição de combustível para cada zona

- para $0 \leq x \leq \alpha_1$

$$\dot{Y}_{1C}(x) = - \frac{1}{D_1} Y_{2C}(x) \quad (3-2.26)$$

$$\dot{Y}_{2C}(x) = \frac{v}{K} q_{\max} - \Sigma_{R,1} Y_{1C}(x) \quad (3-2.27)$$

$$\dot{Y}_{3C}(x) = - \frac{1}{D_2} Y_{4C}(x) \quad (3-2.28)$$

$$\dot{Y}_{4C}(x) = \Sigma_{R,1} Y_{1C}(x) - \Sigma_a^M Y_{3C}(x) - q_{\max} \frac{\sigma_a^F}{K \sigma_f} \quad (3-2.29)$$

- para $\alpha_1 \leq x \leq a$

$$\dot{Y}_{1E}(x) = - \frac{1}{D_1} Y_{2E}(x) \quad (3-2.30)$$

$$\dot{Y}_{2E}(x) = - \Sigma_{R,1} Y_{1E}(x) \quad (3-2.31)$$

$$\dot{Y}_{3E}(x) = - \frac{1}{D_2} Y_{4E}(x) \quad (3-2.32)$$

$$\dot{Y}_{4E}(x) = \Sigma_{R,1} Y_{2E}(x) - \Sigma_a^R Y_{3E}(x) \quad (3-2.33)$$

Os subscritos C e E indicam as regiões central (o cerne), e externa (o refletor), respectivamente.

Além das condições de contorno já dadas, tem-se que os fluxos e correntes devem ser contínuos através da interface que se para as duas regiões, isto é,

$$Y_{1C}(\alpha_1) = Y_{1E}(\alpha_1) \quad i = 1, 2 \dots$$

Tem-se, portanto, dois sistemas de 4 equações cada, oito condições de contorno e uma interface α_1 desconhecida. Necessita-se então, mais uma condição, a qual é dada pela condição de

criticalidade do reator a ser apresentada na secção 3-5.

Além dessas condições, devido à presença do refletor, o que causa uma inflexão na curva do fluxo térmico, foi necessário se fazer uma normalização do problema, como pode ser visto no item seguinte, para simplificação das equações.

3-3. Normalização do Problema

As equações de difusão são homogêneas matematicamente. A criticalidade do reator, em princípio, não depende da densidade de potência utilizada nos cálculos, pois o que limita a densidade de potência são razões tecnológicas, principalmente as de segurança.

Nesse trabalho, a limitação é imposta através do vínculo C_1 , dado pela equação (3-2.12) e pode-se fazer a seguinte normalização:

$$N_C(x) \phi_{TN}(x) = 1 \quad \text{na região central} \quad (3-3.1)$$

sendo ϕ_{TN} o fluxo térmico normalizado.

Na região externa, conforme já demonstrado na secção 3-2, tem-se o vínculo C_2 , isto é, $N_E(x) = 0$.

Assim, as equações de estado em função da normalização tornam-se:

$$\text{para } 0 \leq x \leq \alpha_1$$

$$\dot{Y}_{1C}(x) = -\frac{1}{D_1} Y_{2C}(x) \quad (3-3.2)$$

$$\dot{Y}_{2C}(x) = \nu \sigma_f - \Sigma_{R,1} Y_{1C}(x) \quad (3-3.3)$$

$$\dot{Y}_{3C}(x) = -\frac{1}{D_2} Y_{4C}(x) \quad (3-3.4)$$

$$\dot{Y}_{4C}(x) = \Sigma_{R,1} Y_{1C}(x) - \Sigma_a^M Y_{3C}(x) + \sigma_a^F \quad (3-3.5)$$

e para $\alpha_1 \leq x \leq a$

$$\dot{Y}_{1E}(x) = -\frac{1}{D_1} Y_{2E}(x) \quad (3-3.6)$$

$$\dot{Y}_{2E}(x) = -\Sigma_{R,1} Y_{1E}(x) \quad (3-3.7)$$

$$\dot{Y}_{3E}(x) = -\frac{1}{D_2} Y_{4E}(x) \quad (3-3.8)$$

$$\dot{Y}_{4E}(x) = \Sigma_{R,1} Y_{1E}(x) - \Sigma_a^R Y_{3E}(x) \quad (3-3.9)$$

Com a normalização, a densidade de potência normalizada é dada por:

$$q_N = K \sigma_f \quad (3-3.10)$$

Sendo a densidade de potência $q = q_O$ dada sabendo-se que:

$$q_O = K \sigma_f N_O \phi_T \quad (3-3.11)$$

pode-se calcular o fluxo térmico através da seguinte relação:

$$\frac{q_O}{q_N} = \frac{\phi_T}{\phi_{TN}} \quad (3-3.12)$$

ou

$$\phi_T = \phi_{TN} \frac{q_O}{K \sigma_f} \quad (3-3.13)$$

3-4. Resolução do Sistema de Equações Obtido

Reagrupando-se as equações de estado, tem-se as equações para a região interna e externa do reator:

- para a região interna

$$D_1 \nabla^2 \phi_{1C}(x) - \Sigma_{R,1} \phi_{1C}(x) + \nu \sigma_f = 0 \quad (3-4.1)$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_{2C}(x) - \Sigma_a \phi_{2C}(x) + \Sigma_1 \phi_{1C}(x) - \sigma_a^F = 0 \quad (3-4.2)$$

- para a região externa

$$D_1 \nabla^2 \phi_{1E}(x) - \Sigma_{R,1} \phi_{1E}(x) = 0 \quad (3-4.3)$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_{2E}(x) - \Sigma_a^M \phi_{2E}(x) + \Sigma_{R,1} \phi_{1E}(x) = 0 \quad (3-4.4)$$

O sistema acima pode ser escrito na forma matricial como:

$$\underline{\underline{D}} \nabla^2 \underline{\underline{\phi}} - \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{\phi}} + \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{0}} \quad (3-4.5)$$

onde:

- $\underline{\underline{\phi}}$ é o vetor dos fluxos, isto é,

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

- $\underline{\underline{D}}$ é a matriz coeficiente de difusão

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

- $\underline{\underline{\Sigma}}$ é a matriz secção de choque

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{R,1} & 0 \\ -\Sigma_{R,1} & \Sigma_a^M \end{bmatrix}$$

- $\underline{\underline{Q}}$ é o vetor constante

$$\underline{\underline{Q}}_C = \begin{bmatrix} \nu \sigma_f \\ -\sigma_a^F \end{bmatrix} \quad \text{para a região interna}$$

$$\underline{z}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{para a região externa}$$

Foram tentadas soluções da forma:

$$\phi(x) = \underline{G}(\omega) e^{-\omega x} \quad (3-4.6)$$

onde determinou-se $G(\omega)$ e ω .

Substituindo na equação (3-4.5) obteve-se:

$$-K^2 \underline{D} \underline{G}(\omega) + \underline{\Sigma} \underline{G}(\omega) = 0$$

ou

$$\left[K^2 \underline{D} - \underline{\Sigma} \right] \underline{G}(\omega) = 0 \quad (3-4.7)$$

Para esta equação o vetor $G(\omega)$ tem soluções diferentes de zero; então:

$$\det \left[K^2 \underline{D} - \underline{\Sigma} \right] = 0$$

Portanto:

$$\omega_i^2 = \frac{\Sigma_i}{D_i} \quad i = 1, 2 \quad (3-4.8)$$

que é o auto valor característico da equação.

Para o vetor $\underline{G}(\omega)$ obteve-se:

$$\underline{G}(\omega_1) = \begin{bmatrix} g_1(\omega_1) \\ g_2(\omega_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\Sigma_{R,1}/D_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{bmatrix}$$

onde $g_2(\omega_1)$ é equivalente ao coeficiente de acoplamento obtido na referência /15/ e

$$\underline{G}(\omega_2) = \begin{bmatrix} g_1(\omega_2) \\ g_2(\omega_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As soluções obtidas para os fluxos e correntes, com auxílio das condições de contorno dadas na secção 2-1, são:

$$\phi_C = \sum_{i=1}^2 A_i \cos h(\omega_i x) \underline{G}(\omega_i) + \phi_p \quad (3-4.9)$$

$$\underline{J}_C = - \sum_{i=1}^2 D_i \omega_i A_i \operatorname{sen} h(\omega_i x) \underline{G}(\omega_i) \quad (3-4.10)$$

$$\phi_E = \sum_{i=1}^2 C_i \operatorname{sen} h(\omega_i (a-x)) \underline{G}(\omega_i) \quad (3-4.11)$$

$$\underline{J}_E = \sum_{i=1}^2 D_i \omega_i A_i \cos h(\omega_i (a-x)) \underline{G}(\omega_i) \quad (3-4.12)$$

As constantes A_i e C_i são dadas respectivamente por:

$$A_i = -F_i M_i(\alpha_1) \frac{e^{-\omega_i \alpha_1}}{1 + e^{-2\omega_i \alpha_1}} \quad (3-4.13)$$

$$C_i = F_i M_i(\alpha_1) \frac{2 e^{-\omega_i (a-\alpha_1)}}{\left[1 + e^{-2\omega_i \alpha_1}\right] \left[1 + e^{-2\omega_i (a-\alpha_1)}\right]} \quad (3-4.14)$$

onde:

$$F_1 = \phi_{p1} \quad (3-4.15)$$

$$F_2 = +g_2(\omega_1) \phi_{p1} - \phi_{p2} \quad (3-4.16)$$

sendo ϕ_p as soluções particulares que são dadas por:

$$\phi_{p1} = \frac{\nu \sigma_f}{\Sigma_{R,1}} \quad (3-4.17)$$

$$\phi_{p2} = \frac{\nu \sigma_f - \sigma_a^F}{\Sigma_a^M} \quad (3-4.18)$$

e

$$M_i(\alpha_1) = \frac{1}{2} \frac{\left[1 + e^{-2\omega_i (a-\alpha_1)}\right] \left[1 + e^{-2\omega_i \alpha_1}\right]}{\left[1 + e^{-2\omega_i a}\right]} \quad i = 1, 2$$

Nota-se que para resolver as equações obtidas necessita-se do valor da interface α_1 , o qual é determinado usando-se a

equação de criticalidade, que será demonstrada no ítem seguinte.

As outras condições são dadas por:

$$- \phi_1(a) = \phi_2(a) = 0$$

$$- J_1(0) = J_2(0) = 0$$

- continuidade dos fluxos e correntes na interface.

3-5. Condição de Criticalidade e Continuidade da Hamiltoniana

A Hamiltoniana e as equações adjuntas devem ser contínuas na interface, isto é, em $x = \alpha_1$, devido à condição já estabelecida de que a Hamiltoniana deve ser contínua ao longo da trajetória ótima. Impõe-se a continuidade aos multiplicadores λ_i e, como as variáveis de estado são contínuas na interface, a Hamiltoniana só será contínua se a distribuição de combustível também for contínua na interface α_1 .

Entretanto, sabe-se que, devido à presença do refletor, introduzido pelo vínculo $C_2 = 0$, ou seja, $N(x) = 0$ na segunda região, a distribuição de combustível apresenta uma descontinuidade na interface entre o caroço e o refletor.

Portanto, tem-se que admitir a possibilidade de descontinuidade da Hamiltoniana em $x = \alpha_1$.

Nesse caso, deve-se recorrer às exceções previstas na teoria de controle ótimo /5/, da seguinte maneira: na interface, α_1 , de acordo com o vínculo C_1 , deve-se ter

$$R(Y_{3C}) = Y_{3C}(\alpha_1) - \frac{Q_{\max}}{K \sigma_f N(\alpha_1)} = 0 \quad (3-5.1)$$

ou com a normalização:

$$R(Y_{3C}) = Y_{3C}(\alpha_1) - \frac{1}{N(\alpha_1)} = 0 \quad (3-5.2)$$

Admite-se que a Hamiltoniana e as equações adjuntas são descontínuas na interface α_1 , de acordo com a relação:

$$\lambda_j(\alpha_1 - \Delta) = \lambda_j(\alpha_1 + \Delta) + \Pi \frac{\partial R}{\partial Y_j} \Big|_{x=\alpha_1} \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (3-5.3)$$

e

$$H(\alpha_1 - \Delta) = H(\alpha_1 + \Delta) - \Pi \frac{\partial R}{\partial Y_j} \Big|_{x=\alpha_1} \quad (3-5.4)$$

sendo Π um vetor escalar a ser determinado e Δ tendendo a zero.

Uma vez que $R(Y_{3C})$ não depende explicitamente da variável x , pode-se concluir que a Hamiltoniana é contínua na interface; e como $R(Y_{3C})$ depende explicitamente da 3a. variável de estado, isto é, do fluxo térmico, nota-se da equação (3-5.3) que somente a terceira equação adjunta é descontínua na interface, isto é:

$$\lambda_1(\alpha_1 - \Delta) = \lambda_1(\alpha_1 + \Delta) \quad (3-5.5)$$

$$\lambda_2(\alpha_1 - \Delta) = \lambda_2(\alpha_1 + \Delta) \quad (3-5.6)$$

$$\lambda_3(\alpha_1 - \Delta) = \lambda_3(\alpha_1 + \Delta) + \Pi \quad (3-5.7)$$

$$\lambda_4(\alpha_1 - \Delta) = \lambda_4(\alpha_1 + \Delta) \quad (3-5.8)$$

Com as equações obtidas para a Hamiltoniana na região central e externa, isto é, H_C e H_E , determina-se o valor da descontinuidade Π .

Para se determinar o valor da interface α_1 , usa-se a relação:

$$N_O \phi_{TN}(\alpha_1) = 1 \quad (3-5.9)$$

sendo N_O o valor da concentração de combustível na interface.

Deve-se ter em mente, que em problemas de reatores refletidos nem sempre N_O é o valor máximo da concentração de com-

bustível no reator.

Substituindo-se o valor do fluxo térmico pela equação (3-4.9) e o valor da constante A_i , tem-se:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{F_i}{\phi_{p2}} g_2(\omega_i) M_i(\alpha_i) = 1 - \frac{1}{N_o \phi_{p2}} \quad (3-5.10)$$

Esta é a equação de criticalidade do reator.

3-6. Sistema Adjunto para 2 Grupos de Energia

O sistema adjunto, usando-se o Princípio de Máximo de Pontryagin /17/, é dado por:

$$\dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial Y_i} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Para a região central, isto é, $0 \leq x \leq \alpha_1$, tem-se

$$\dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H_C}{\partial Y_i}$$

portanto

$$\dot{\lambda}_{1C}(x) = \Sigma_{R,1} \left[\lambda_{2C}(x) - \lambda_{4C}(x) \right] \quad (3-6.1)$$

$$\dot{\lambda}_{2C}(x) = - \frac{1}{D_1} \lambda_{1C}(x) \quad (3-6.2)$$

$$\dot{\lambda}_{3C}(x) = \lambda_{4C}(x) \Sigma_a^M \quad (3-6.3)$$

$$\dot{\lambda}_{4C}(x) = \frac{1}{D_1} \lambda_{3C} \quad (3-6.4)$$

e para a região externa, isto é, $\alpha_1 \leq x \leq a$, tem-se:

$$\dot{\lambda}_{1E}(x) = \Sigma_{R,1} \left[\lambda_{2E}(x) - \lambda_{4E}(x) \right] \quad (3-6.5)$$

$$\dot{\lambda}_{2E}(x) = - \frac{1}{D_1} \lambda_{1E}(x) \quad (3-6.6)$$

$$\dot{\lambda}_{3E}(x) = \lambda_{4E}(x) \Sigma_a^M \quad (3-6.7)$$

$$\dot{\lambda}_{4E}(x) = \frac{1}{D_2} \lambda_{3E}(x) \quad (3-6.8)$$

As condições de contorno para o sistema adjunto são fornecidas pela condição de transversalidade representada pelas equações (2-2.17) e (2-2.18):

$$\left[\lambda_j(0) - \frac{\partial G}{\partial \lambda_j(0)} \right] dY_j(0) = 0 \quad (3-6.9)$$

$$\left[\lambda_j(a) - \frac{\partial G}{\partial \lambda_j(a)} \right] dY_j(a) = 0 \quad (3-6.10)$$

Na equação (2-2.14) G é da forma:

$$G = P_1 Y_1(a) + P_2 Y_2(0) + P_3 Y_3(a) + P_4 Y_4(0)$$

Aplicando as condições de contorno para os fluxos e para as correntes, tem-se:

a) para os fluxos

$$\left[\lambda_j(0) - 0 \right] dY(0) = 0 \quad j = 1, 3$$

mas os fluxos em $x = 0$ não tem valor especificado, $dY(0) \neq 0$, então:

$$\lambda_j(0) = 0$$

b) para as correntes

$$\left[\lambda_j(0) - P_j \right] dY(0) = 0 \quad j = 2, 4$$

as correntes tem valor especificado em $x = 0$, $dY(0) = 0$ e nada se pode concluir sobre $\lambda_j(0)$ quando $j = 2, 4$.

Repetindo-se o procedimento para $x = a$:

a) para os fluxos

$$\left[\lambda_j(a) - P_j \right] dY_j(a) = 0, \quad j = 1, 3$$

em $x = a$ os fluxos tem valor fixo, portanto $dY_j(a) = 0$ e nada se pode concluir sobre $Y_j(a)$ quando $j = 1, 3$.

b) para as correntes

$$\left[\lambda_j(a) - 0 \right] dY_j(a) = 0 \quad j = 2, 4$$

as correntes não tem valor fixo em $x = a$ e portanto $dY_j(a) \neq 0$, então

$$\lambda_j(a) = 0$$

Como condições de contorno para as equações adjuntas,

tem-se:

- $\lambda_j(0) = 0 \quad j = 1, 3$
- $\lambda_j(a) = 0 \quad j = 2, 4$
- continuidade das equações adjuntas na interface, com o valor da descontinuidade Π determinado.

Tem-se, então, um sistema adjunto composto de 8 equações diferenciais, 4 para cada zona, 8 condições de contorno e a fronteira α_1 determinada pela equação de criticalidade.

Não foram obtidas soluções analíticas das equações adjuntas pois a solução do problema é independente desse resultado. Entretanto, foi provado serem elas contínuas na interface, a menos de um valor Π , já determinado.

3-7. Cálculo da Potência

Como já foi mostrado pela equação (3-1.10), a potência do reator tipo placa infinita, em unidades de área, é dada por:

$$\text{Pot} = 2 \int_0^a K \sigma_f N(x) \phi_T(x) dx \quad (3-7.1)$$

Tendo o reator duas zonas distintas, a equação toma a forma:

$$\text{Pot} = 2 \left\{ \int_0^{\alpha_1} K \sigma_f N_C(x) \phi_{CT}(x) dx + \int_{\alpha_1}^a K \sigma_f N_E(x) \phi_{ET}(x) dx \right\} \quad (3-7.2)$$

Combinando com as equações (3-2.19) e (3-2.23) tem-se:

$$\text{Pot} = 2 Q_{\max} \int_0^{\alpha_1} dx \quad (3-7.3)$$

e finalmente:

$$\text{Pot} = 2 Q_{\max} \alpha_1 \quad (3-7.4)$$

em unidades Watts/cm².

3-8. Cálculo da Massa Crítica

Obtem-se a massa crítica fazendo-se a integral por unidade de área da concentração de combustível.

Como a região físsil do reator é a região central, e no refletor não existe combustível, pode-se escrever:

$$M = 2 \int_0^{\alpha_1} N_C(x) dx \quad (3-8.1)$$

Nessa equação M é a massa crítica em átomos de U₂₃₅ por cm².

Substituindo a equação (3-2.19) na equação acima, tem-

-se:

$$M = 2 \int_0^{\alpha_1} \frac{Q_{\max}}{K \sigma_f \phi_T(x)} dx \quad (3-8.2)$$

Integrando:

$$M = 2 \frac{Q_{\max}}{K \sigma_f} I_{mc} \quad (3-8.3)$$

onde

$$I_{mc} = \int_0^{\alpha_1} \frac{dx}{\phi_T(x)} \quad (3-8.4)$$

Sendo: A - massa atômica do U_{235}

N_0 - número de Avogadro

a massa crítica em gramas é obtida através da seguinte relação:

$$M_g = \frac{AM}{N_0} \quad (3-8.5)$$



4. APLICAÇÃO NUMÉRICA EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

Considerou-se um reator tipo placa, infinito, no qual foi introduzido um refletor através de um vínculo de desigualdade dado pela Teoria de Controle Ótimo. O moderador e o refletor são de água leve e o material físsil é o U_{235} . Calculou-se a distribuição ótima de combustível para várias espessuras do reator e várias concentrações.

Para obtenção dos resultados numéricos, as constantes de grupo e as secções de choque foram obtidas do código XSDRN /12/. Os valores das constantes foram obtidos considerando-se uma concentração de combustível igual a $0.66728 \cdot 10^{-20}$ átomos/cm³. Os intervalos de energia de neutrons considerados são:

grupo	1	2
intervalo	15 MeV - 1 eV	1 eV - 0

Usou-se as constantes obtidas com a concentração acima para todos os valores de N na interface, usados para os cálculos, pois as constantes não variam significativamente.

O meio foi considerado infinito e tomado à temperatura ambiente de $294,6$ °K. Para o cálculo do coeficiente de difusão usou-se a expressão que leva em conta o espalhamento anisotrópico:

$$D = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}}$$

sendo Σ_{tr} a secção de choque macroscópica de transporte.

Os cálculos foram feitos no computador IBM/370, modelo 155, do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, S.P, e o programa foi escrito em Linguagem Fortran IV-G, em dupla precisão. As soluções numéricas das variáveis de estado foram obtidas em in-

tervalos de 0.5 cm. A densidade de potência máxima foi considerada ser de 60 Watts/cm³.

Na tabela 4-1 são apresentados os valores usados para secções de choque e constantes de grupo.

Obteve-se valores para correntes, fluxos, posições da interface, potência, massa crítica, concentração de combustível e ponto de máxima concentração de combustível em reatores com as seguintes espessuras: 30 cm, 40 cm, 60 cm e 99 cm e com as seguintes concentrações nas interfaces: 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9, 0.95, 1 e 1.2 átomos/cm³.

As posições das interfaces, as potências e massas críticas estão listadas nas tabelas 4-2 e 4-3, para as diversas espessuras e concentrações. Para os mesmos casos, nas tabelas 4-6 e 4-7 estão apresentadas a concentração máxima de combustível e onde ela ocorre, e também a variação da espessura do refletor com a concentração na interface.

Para a concentração 0.65 átomos/cm³ e espessura 40 cm, os fluxos, as correntes e a distribuição de combustível, estão apresentados nas tabelas 4-8 e 4-9. As respectivas potências, massas críticas e potências por unidade de massa crítica estão apresentadas na tabela 4-10.

São também apresentadas as curvas de variação da espessura do refletor com a concentração na interface (Figura 4-1), a curva dos fluxos (Figura 4-2) e a curva de variação da concentração de combustível (Figura 4-3).

TABELA 4-1 Secções de choque e constantes de grupo

Grupo	1	2
Σ_R cm ⁻¹	0.0485	0
Σ_a^M cm ⁻¹	0	0.01728
σ_f cm ⁻² × 10 ⁻²⁰	0	0.0435
σ_a^F 10 ⁻² cm ⁻²	0	0.0511
ν n/fissão	0	2.442
D cm	0.889	0.115

TABELA 4-2 2 GRUPOS - interfaces, potências e massas críticas
ESPESSURA 30 cm

concent. interface 10^{20} atm/cm ³	interface 1 cm	potência 1 KWatts/cm ²	massa 1 g	interface 2 cm	potência 2 KWatts/cm ²	massa 2 g
0.6						
0.65	9.522	1.1426	0.3972	20.477	2.4573	0.6587
0.7	7.0624	0.8474	0.3597	22.937	2.7525	0.7289
0.75	6.0163	0.722	0.3533	23.983	2.8780	0.7660
0.8	5.3640	0.6437	0.3550	24.635	2.956	0.7931
0.85	4.8992	0.587	0.3603	25.100	3.0120	0.8151
0.9	4.5438	0.5452	0.367	25.456	3.0547	0.8341
0.95	4.2595	0.5111	0.3763	25.740	3.0888	0.8511
1.0	4.0251	0.483	0.3858	25.974	3.1169	0.8665
1.2	3.37841	0.4054	0.4297	26.62	3.1945	0.9186

TABELA 4-3 2 GRUPOS - interfaces, potências e massas críticas
ESPESSURA 40 cm

concent. interface 10^{20} atm/cm ³	interface 1 cm	potência 1 KWatts/cm ²	massa 1 g	interface 2 cm	potência 2 KWatts/cm ²	massa 2 g
0.6						
0.65	9.50	1.1410	0.3969	30.491	3.6589	0.901
0.7	7.06	0.8473	0.3596	32.939	3.9522	0.973
0.75	6.01	0.72189	0.3533	33.98	4.078	1.01
0.8	5.36	0.6436	0.3550	34.93	4.156	1.037
0.85	4.89	0.5878	0.3603	35.10	4.212	1.059
0.9	4.54	0.5452	0.3676	35.45	4.2547	1.079
0.95	4.25	0.5111	0.3763	35.74	4.2888	1.09
1.0	4.02	0.4829	0.3858	35.97	4.317	1.111
1.2	3.37	0.405	0.4297	36.62	4.394	1.163

TABELA 4-4 2 GRUPOS - interfaces, potências e massas críticas
ESPESSURA 60 cm

concent. interface 10^{20} atm/cm ³	interface 1 cm	potência 1 KWatts/cm ²	massa 1 g	interface 2 cm	potência 2 KWatts/cm ²	massa 2 g
0.6						
0.67	8.16	0.9796	0.3737	51.83	6.220	1.42
0.7	7.06	0.8473	0.3597	52.93	6.352	1.46
0.75	6.01	0.7218	0.3533	53.98	6.478	1.5
0.8	5.36	0.6436	0.3550	54.63	6.556	1.527
0.85	4.89	0.5878	0.3603	55.10	6.612	1.549
0.9	4.54	0.5424	0.3676	55.45	6.654	1.568
0.95	4.25	0.511	0.3763	55.74	6.688	1.585
1.	4.02	0.4829	0.3858	55.97	6.717	1.60
1.2	3.37	0.4005	0.4297	56.62	6.794	1.65

TABELA 4-5 2 GRUPOS - interfaces, potências e massas críticas
ESPESSURA 99 cm

concent. interface 10^{20} atm/cm ³	interface 1 cm	potência 1 KWatts/cm ²	massa 1 g	interface 2 cm	potência 2 KWatts/cm ²	massa 2 g
0.6						
0.67	8.16	0.9796	0.3737	90.83	10.906	2.384
0.7	7.06	0.8473	0.3597	91.93	11.032	2.418
0.75	6.01	0.7218	0.3535	92.98	11.158	2.455
0.8	5.36	0.6436	0.3550	93.63	11.236	2.482
0.85	4.89	0.5878	0.3603	94.10	11.292	2.504
0.9	4.54	0.5424	0.3676	94.45	11.334	2.523
0.95	4.25	0.511	0.3763	94.74	11.368	2.54
1.	4.02	0.4829	0.3858	94.97	11.397	2.55
1.2	3.37	0.4005	0.4297	95.62	11.474	2.608

TABELA 4-6 Concentração máxima de combustível e onde ocorre

espessura reator cm	30		40		concentração interface $\cdot 10^{20}$ atom/cm	60		99	
	x_{\max} cm	N_{\max} $\cdot 10^{20}$ atom/cm	x_{\max} cm	N_{\max} $\cdot 10^{20}$ atom/cm		x_{\max} cm	N_{\max} $\cdot 10^{20}$ atom/cm	x_{\max} cm	N_{\max} $\cdot 10^{20}$ atom/cm
0.65	19.0	0.689	29	0.689	0.67	0.707	50.50	89.5	0.707
0.7	21.5	0.734	31.5	0.734	0.7	0.734	51.5	91.0	0.734
0.75	22.5	0.777	32.5	0.777	0.75	0.777	52.5	91.5	0.777
0.8	23.5	0.826	33.5	0.866	0.8	0.826	53.5	92.5	0.826
0.85	24.0	0.873	34	0.873	0.85	0.873	54.0	93	0.873
0.9	24.5	0.920	34.5	0.920	0.9	0.920	54.5	93.5	0.920
0.95	25	0.9651	35	0.965	0.95	0.965	55	94	0.965
1.	25	1.016	35	1.016	1.00	1.016	55	94	1.016
1.2	26	1.208	36	1.208	1.2	1.208	56	95	1.208

TABELA 4-7 Espessura do refletor × concentração

concentração interface $\cdot 10^{20}$ atom/cm ³	espessura refletor cm
0.65	9.8
0.67	8.6
0.7	7.5
0.75	6.5
0.8	5.8
0.85	5.4
0.9	5.0
0.95	4.8
1	4.5
1.2	3.9

TABELA 4-8 FLUXOS E CORRENTES NORMALIZADAS

$$E = 40 \text{ cm} \quad N = 0.65 \text{ atom/cm}^3$$

x cm	Grupo 1		Grupo 2	
	Y ₁ n/cm ² .seg	Y ₂ n/cm ² .seg	Y ₃ n/cm ² .seg	Y ₄ n/cm ² .seg
0.0	2.1884	0.	3.1786	0.
2.0	2.1882	0.18062.10 ⁻³	3.1778	0.1007.10 ⁻³
4.0	2.1876	0.4013 .10 ⁻³	3.1705	0.2232.10 ⁻³
6.0	2.1863	0.7111 .10 ⁻³	3.1797	0.3932.10 ⁻³
8.0	2.1843	0.1178 .10 ⁻³	3.1609	0.6461.10 ⁻³
10.0	2.1808	0.1908 .10 ⁻²	3.1465	0.1032.10 ⁻²
12.0	2.1754	0.3060 .10 ⁻²	3.1237	0.1628.10 ⁻²
14.0	2.1666	0.4893 .10 ⁻²	3.0880	0.2539.10 ⁻²
16.0	2.1526	0.7811 .10 ⁻²	3.0327	0.3916.10 ⁻²
18.0	2.1302	0.1246 .10 ⁻²	2.9480	0.5948.10 ⁻²
20.0	2.0945	0.1988 .10 ⁻¹	2.8208	0.8836.10 ⁻²
22.0	2.0375	0.3171 .10 ⁻¹	2.6351	0.1267.10 ⁻¹
24.0	1.9467	0.5058 .10 ⁻¹	2.3761	0.1714.10 ⁻¹
26.0	1.8018	0.8068 .10 ⁻¹	2.0439	0.2064.10 ⁻¹
28.0	1.5708	0.1286	1.6898	0.1840.10 ⁻¹
30.0	1.2022	0.2052	1.5071	-0.2215.10 ⁻²
30.49	1.0822	0.2302	1.5384	-0.1298.10 ⁻¹
32	0.7516	0.1638	1.5137	0.1285.10 ⁻¹
34	0.4534	0.1063	1.1752	0.2324.10 ⁻¹
36	0.2559	0.7260 .10 ⁻¹	0.7618	0.2351.10 ⁻¹
38	0.1151	0.5492 .10 ⁻¹	0.3683	0.2173.10 ⁻¹
40	0.0	0.4943 .10 ⁻¹	0.0	0.2112.10 ⁻¹

TABELA 4-9 Distribuição de Combustível
- 2 GRUPOS

$$E = 40 \text{ cm} \quad N = 0.65 \text{ at/cm}^3$$

x cm	N(x) .10 ²⁰ átomos/cm ³
0	0.3146
2	0.3147
4	0.3149
6	0.3154
8	0.3163
10	0.3178
12	0.3209
14	0.3238
16	0.3297
18	0.3392
20	0.3545
22	0.3794
24	0.4208
26	0.4892
28	0.5917
30	0.6635
30.49	0.65
32	0
34	0
36	0
38	0
40	0

TABELA 4-10 Resultados principais para reator com 40 cm de espessura e concentração $0.65 \cdot 10^{20}$ atom/cm³ - 2 grupos de energia

	1a. resposta	2a. resposta
Potência (KW/cm ²)	1.14	3.66
Massa crítica (g/cm ²)	0.359	0.901
Potência/massa crítica KW/g	3.17	4.03
Interface cm	9.5	30.5
Espessura do refletor cm	30.5	9.5

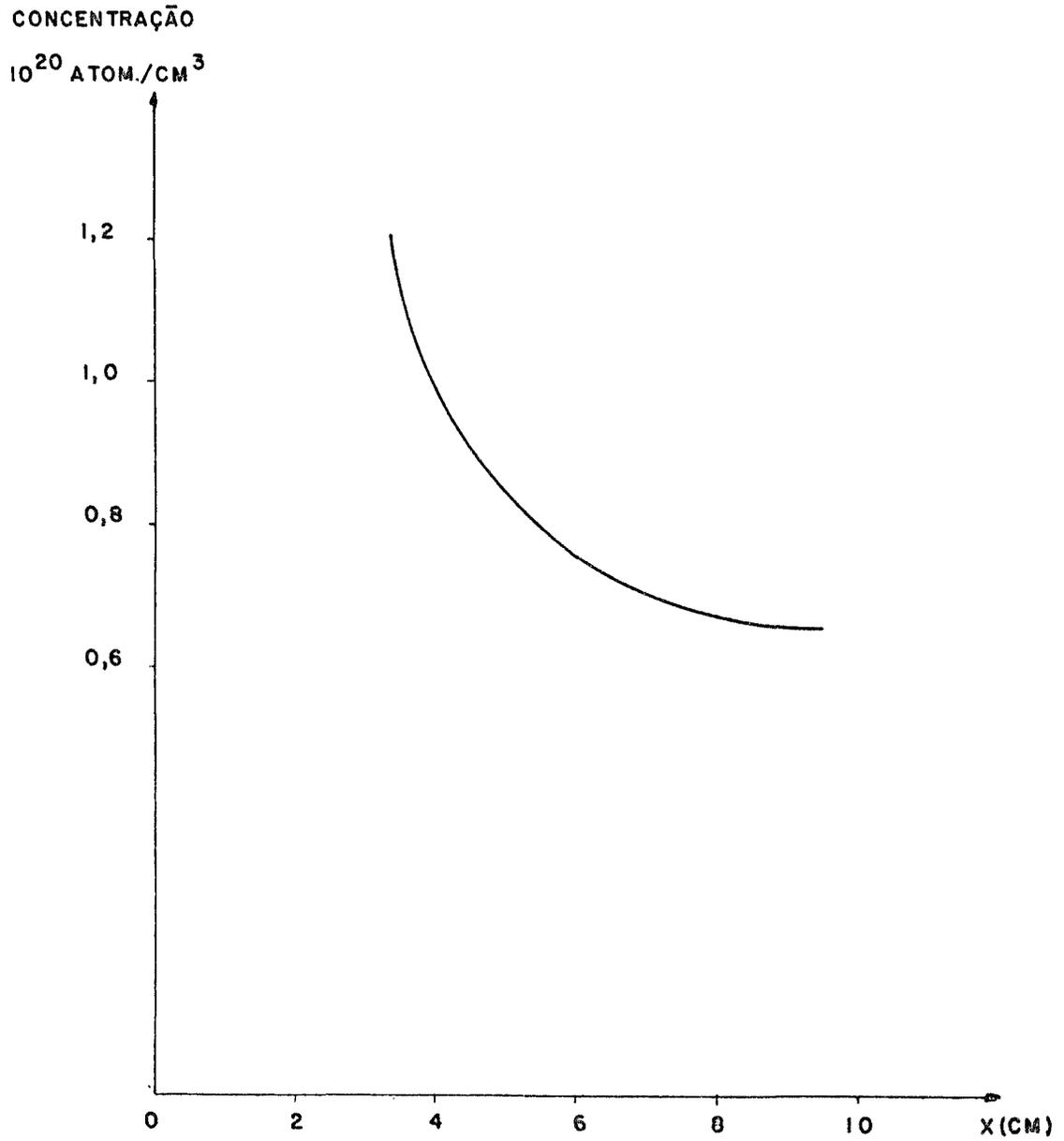


FIGURA 4-1 - CONCENTRAÇÃO NA INTERFACE X - ESPESSURA DO REFLETOR - DOIS GRUPOS

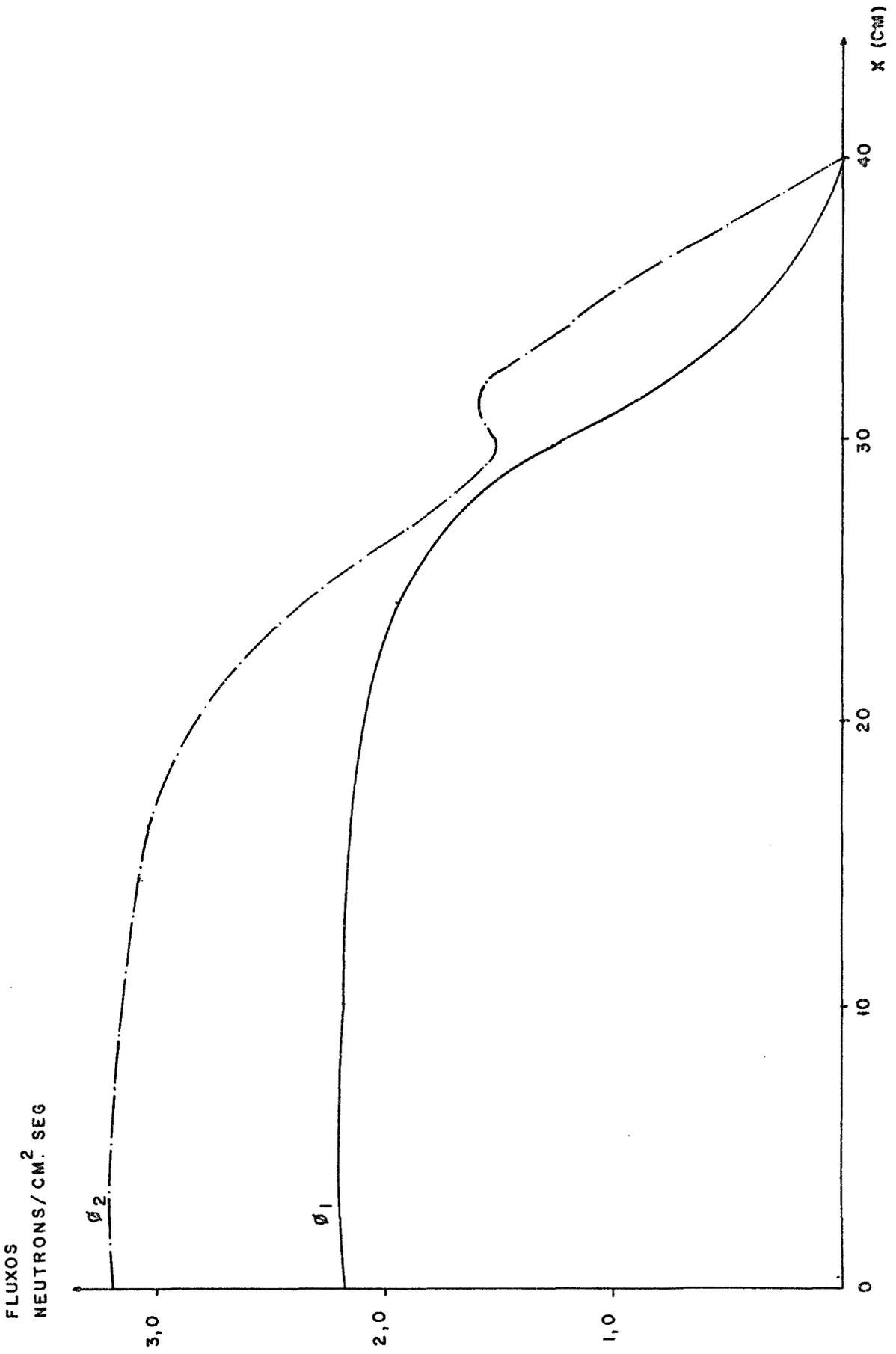


FIGURA 4 - 2 FLUXOS NORMALIZADOS - DOIS GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

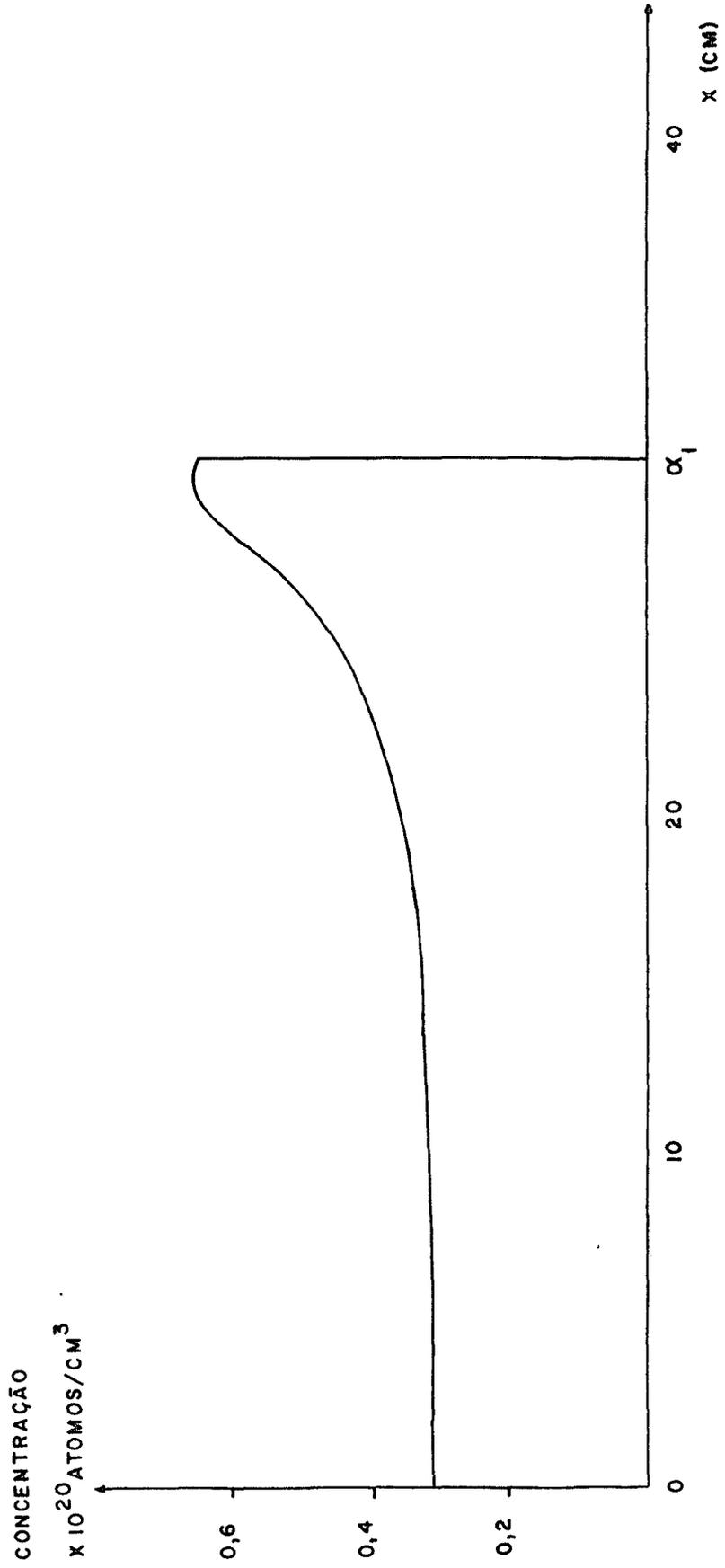


FIGURA 4-3 DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTIVEL - DOIS GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

5. COMENTÁRIOS EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

Ao analisar-se os resultados obtidos pelo código XSRDN, os quais são apresentados nas tabelas 5-1 e 5-2, observou-se que as simplificações feitas na formulação do problema (Cap.3) são justificadas.

Considerou-se que as fissões ocorrem apenas no grupo térmico, isto é, considerou-se apenas a secção de choque microscópica de fissão do grupo térmico. Observando-se os valores gerados pelo Código XSDRN vê-se que apenas a secção de choque microscópica de fissão do grupo térmico é significativa.

Considerou-se, também, que todos os neutrons nascem dentro do grupo térmico e analisando-se os valores das frações do espectro de neutrons de fissão (χ_i), pode-se concluir que a hipótese feita é bastante razoável.

Quanto à secção de choque microscópica de absorção considerou-se somente a absorção no grupo térmico e analisando-se os valores das secções de choque microscópica de absorção de todos os elementos encontrados no reator, conclui-se que essa hipótese é válida.

Também pode-se considerar válida a hipótese de que os neutrons não são transferidos de um grupo de mais baixa energia para outro de mais alta energia, pois as secções de choque de transferência de um grupo para outro de maior energia são muito pequenas ou nulas.

Com a finalidade de se comparar resultados com os de outro trabalho, são apresentados na tabela 5-3 os resultados obtidos por W.N. dos Santos /20/ para um reator tipo placa infinita, não refletido, otimizado, com vínculos na densidade de potência e na concentração de combustível. Notar que o vínculo na concentra-

ção de combustível, é diferente daquele considerado por W.N. dos Santos /20/.

Dos resultados apresentados no Capítulo 4, observa-se o seguinte:

- para uma mesma concentração de combustível na interface cerne-refletor, a espessura do refletor é a mesma, independente do tamanho do reator.
- quanto maior a concentração de combustível na interface, menor o refletor.
- para uma mesma concentração de combustível na interface e espessura total do reator diferente, a concentração máxima de combustível é a mesma.
- a variação entre a concentração máxima e a concentração na interface, isto é, o efeito do refletor na moderação, diminui conforme aumenta a concentração de combustível na interface.
- duas respostas corretas de posição da interface tornam o mesmo reator crítico.

Esta última conclusão foi de extrema importância, uma vez que, de acordo com a bibliografia disponível, tal fato parece nunca ter sido constatado. Entretanto, para o problema de otimização considerado, somente a segunda resposta é válida, pois apenas esta maximiza a potência do reator, como pode ser visto nas tabelas 4-2 a 4-5 e 4-10.

Para confirmar a existência de dupla criticalidade, através de resultados mais realísticos, decidiu-se resolver o problema em 4 grupos de energia de neutrons, o que é feito a seguir.

TABELA 5-1 Constantes geradas pelo código
XSDRN
2 grupos de energia

Grupos	1	2
χ_i	0.9896	0
σ_{fi}	8.9761	$4.3475 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_a U_{235}$ barn	1.4018	$5.1114 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_a H$ barn	$3.7304 \cdot 10^{-3}$	$2.5891 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_a O$ barn	$5.3389 \cdot 10^{-3}$	$1.3881 \cdot 10^{-4}$

TABELA 5-2 Matriz de espalhamento gerada pe
lo código XSDRN
2 grupos de energia

grupo g	$\Sigma(g \rightarrow 1)$ cm^{-1}	$\Sigma(g \rightarrow 2)$ cm^{-2}
1	0.79997	0.0485
2	0.00001	0.8528

TABELA 5-3 Resultados principais obtidos por W.N. Santos
2 grupos de energia

Potência KW/cm ²	2.947
Massa crítica g/cm ²	0.90
Potência/massa crítica KW/g	3.27

6. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM 4 GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

6-1. As Equações de Difusão

Conforme as considerações feitas no ítem 3-1 para dois grupos de energia, pode-se, de maneira análoga, escrever para 4 grupos de energia que:

$$- \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 1 \quad \chi_4 = 0 \quad (6-1.1)$$

$$- \Sigma_{f1} = \Sigma_{f2} = \Sigma_{f3} = 0 \quad \Sigma_{f4} \neq 0 \quad (6-1.2)$$

$$- \Sigma_{a1} = \Sigma_{a2} = \Sigma_{a3} = 0 \quad \Sigma_{a4} \neq 0 \quad (6-1.3)$$

$$\Sigma_{a4} = \Sigma_a$$

$$- \Sigma_{R4} = 0 \quad (6-1.4)$$

$$- \Sigma_{Rg} = \sum_{h>g}^n \Sigma(g \rightarrow h) \quad (6-1.5)$$

$$- D_g \text{ aproximadamente constantes} \quad (6-1.6)$$

$$- \Sigma(g \rightarrow h) \text{ independente da concentração variável de combustível} \quad (6-1.7).$$

Dessa maneira, baseando-se no que foi exposto no ítem 2-1 e nas referências /7/, /15/, pode-se escrever as equações de difusão para 4 grupos de energia de neutrons, como:

$$\frac{d}{dx} \left[D_1 \frac{d}{dx} \phi_1(x) \right] - \Sigma_{R,1} \phi_1(x) + \nu \Sigma_f \phi_4(x) = 0 \quad (6-1.8)$$

$$\frac{d}{dx} \left[D_2 \frac{d}{dx} \phi_2(x) \right] - \Sigma_{R,2} \phi_2(x) + \Sigma(1 \rightarrow 2) \phi_1(x) = 0 \quad (6-1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[D_3 \frac{d}{dx} \phi_3(x) \right] - \Sigma_{R,3} \phi_3(x) + \Sigma(1 \rightarrow 3) \phi_1(x) - \\ - \Sigma(2 \rightarrow 3) \phi_2(x) = 0 \end{aligned} \quad (6-1.10)$$

$$\frac{d}{dx} \left[D_4 \frac{d}{dx} \phi_4(x) \right] - \Sigma_a \phi_4(x) + \Sigma(1 \rightarrow 4) \phi_1(x) + \\ + \Sigma(2 \rightarrow 4) \phi_2(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) \phi_3(x) = 0 \quad (6-1.11)$$

Para as correntes tem-se

$$J_1(x) = - D_1 \frac{d}{dx} \phi_1(x) \quad (6-1.12)$$

$$J_2(x) = - D_2 \frac{d}{dx} \phi_2(x) \quad (6-1.13)$$

$$J_3(x) = - D_3 \frac{d}{dx} \phi_3(x) \quad (6-1.14)$$

$$J_4(x) = - D_4 \frac{d}{dx} \phi_4(x) \quad (6-1.15)$$

Como a potência é uma função do fluxo térmico, a equação (3-1.12) pode ser usada para qualquer número de grupos:

$$\text{Pot} = 2 \int_0^a K \sigma_f N(x) \phi_T(x) dx \quad (6-1.16)$$

6-2. Elementos do Problema de Otimização

Tem-se agora 8 equações de estado

$$\dot{Y}_1(x) = - \frac{1}{D_1} Y_2(x) \quad (6-2.1)$$

$$\dot{Y}_2(x) = - \Sigma_{R,1} Y_1(x) + v \sigma_f N(x) Y_7(x) \quad (6-2.2)$$

$$\dot{Y}_3(x) = - \frac{1}{D_2} Y_4(x) \quad (6-2.3)$$

$$\dot{Y}_4(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) Y_1(x) - \Sigma_{R,2} Y_3(x) \quad (6-2.4)$$

$$\dot{Y}_5(x) = - \frac{1}{D_3} Y_6(x) \quad (6-2.5)$$

$$\dot{Y}_6(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) Y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) Y_3(x) - \Sigma_{R,3} Y_5(x) \quad (6-2.6)$$

$$\dot{Y}_7(x) = - \frac{1}{D_4} Y_8(x) \quad (6-2.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_8(x) &= \Sigma(1 \rightarrow 4) Y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) Y_3(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) Y_5(x) - \\ &- \left[\Sigma_a^M + N(x) \sigma_a^F \right] Y_7(x) \end{aligned} \quad (6-2.8)$$

Para as condições de contorno também tem-se as mesmas condições usadas para 2 grupos de energia, isto é:

- os fluxos são nulos na fronteira do reator

$$Y_1(a) = Y_3(a) = Y_5(a) = Y_7(a) = 0 \quad (6-2.9)$$

- as correntes são nulas no centro do reator, em decorrência da simetria do sistema:

$$Y_2(0) = Y_4(0) = Y_6(0) = Y_7(0) \quad (6-2.10)$$

Tratando-se do mesmo problema, tem-se os mesmos vínculos na variável de controle para otimização do sistema, isto é:

- a densidade de potência não deve exceder a um valor limite:

$$C_1 = q(x) \leq q_{\max} \quad (6-2.11)$$

- a concentração de combustível não deve exceder a um valor limite e é zero no refletor:

$$C_2 = -N(x) \leq 0 \quad (6-2.12)$$

É conveniente insistir na introdução de um refletor, não pela maneira tradicional da teoria de difusão, mas sim pela teoria de controle ótimo, através de um vínculo de desigualdade na distribuição de combustível dado pela equação (6-2.12).

Determinando $N(x)$ da condição $q(x) \leq q_{\max}$, tem-se:

$$q(x) = K \sigma_f N(x) Y_7(x) \leq q_{\max} \quad (6-2.13)$$

$$N(x) \leq \frac{q_{\max}}{K \sigma_f Y_7(x)} \quad (6-2.14)$$

Sendo a potência a grandeza que se quer otimizar, nosso índice de performance é dado por:

$$IP = \int_0^a K \sigma_f N(x) Y_7(x) dx \quad (6-2.15)$$

Tem-se agora todos os elementos para, a partir da definição da Hamiltoniana dada na secção 2-2, escrevê-la para 4 grupos de energia de neutrons:

$$\begin{aligned} H = & K \sigma_f N(x) Y_7(x) - \frac{1}{D_1} \lambda_1(x) Y_2(x) + \lambda_2(x) \left[v \sigma_f N(x) Y_7(x) \right. \\ & - \left. \Sigma_{R,1} Y_1(x) \right] - \frac{1}{D_2} \lambda_3(x) Y_4(x) + \lambda_4(x) \left[\Sigma(1 \rightarrow 2) Y_1(x) - \right. \\ & \left. \Sigma_{R,2} Y_3(x) - \frac{1}{D_3} \lambda_5(x) \right] - \frac{1}{D_4} \lambda_7(x) + \lambda_8(x) \left\{ \right. \\ & \left. \Sigma(1 \rightarrow 4) Y_1(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) Y_3(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) Y_5(x) - \right. \\ & \left. \left[\Sigma_a^M + N(x) \Sigma_a^F \right] Y_7(x) \right\} + u_1(x) \left[K \sigma_f N(x) Y_7(x) - \right. \\ & \left. Q_{\max} \right] + u_2(x) \left[N(x) - N_{\max} \right] \quad (6-2.16) \end{aligned}$$

A análise das combinações dos multiplicadores de Lagrange e dos vínculos de desigualdade na variável de controle é análoga a feita no item 3-2. E, de acordo com a conclusão já obtida sobre a sequência de zonas, pode-se escrever, em 4 grupos de energia de neutrons, a Hamiltoniana para cada região:

- para $0 \leq x \leq \alpha_1$

$$C_1 = 0 \quad K \sigma_f N(x) Y_{7C}(x) - q_{\max} = 0$$

$$N(x) = \frac{q_{\max}}{K \sigma_f Y_3(x)}$$

$$u_1 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
H_C = & K \sigma_f N(x) Y_{7C}(x) - \frac{1}{D_1} \lambda_1(x) Y_{2C}(x) + \lambda_2(x) \left[v \sigma_f N(x) Y_{7C}(x) \right. \\
& \left. - \Sigma_{R,1} Y_{1C}(x) \right] - \frac{1}{D_2} \lambda_3(x) Y_{4C}(x) \left[\Sigma(1 \rightarrow 2) Y_{1C}(x) - \Sigma_{R,2} Y_{3C}(x) \right] - \\
& - \frac{1}{D_3} \lambda_5(x) Y_{6C}(x) + \lambda_6(x) \left[\Sigma(1 \rightarrow 3) Y_{1C}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) Y_{3C}(x) - \right. \\
& \left. - \Sigma_{R,3} Y_{5C}(x) \right] - \frac{1}{D_4} \lambda_7(x) Y_{8C}(x) + \lambda_8(x) \left\{ \Sigma(1 \rightarrow 4) Y_{1C}(x) + \right. \\
& \left. \Sigma(2 \rightarrow 4) Y_{3C}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) Y_{5C}(x) - \left[\Sigma_a^M + N(x) \sigma_a^F \right] Y_{7C}(x) \right\} \\
& + u_1(x) \left[K \sigma_f N(x) Y_{7C}(x) - Q_{\max} \right] \tag{6-2.17}
\end{aligned}$$

$$- \text{para } \alpha_1 \leq x \leq a$$

$$C_2 = 0$$

$$- N(x) = 0$$

$$u_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
H_E = & K \sigma_f N(x) Y_7(x) - \frac{1}{D_1} \lambda_1(x) Y_{2E}(x) + \lambda_2(x) \left[v \sigma_f N(x) Y_{7E}(x) \right. \\
& \left. - \Sigma_{R,1} Y_{1E}(x) \right] - \frac{1}{D_2} \lambda_3(x) Y_{4E}(x) + \lambda_4(x) \left[\Sigma(1 \rightarrow 2) Y_{1E}(x) \right. \\
& \left. - \Sigma_{R,2} Y_{3E}(x) \right] - \frac{1}{D_3} \lambda_5(x) Y_{6E}(x) + \lambda_6(x) \left[\Sigma(1 \rightarrow 3) Y_{1E}(x) + \right. \\
& \left. \Sigma(2 \rightarrow 3) Y_{3E}(x) - \Sigma_{R,3} Y_{5E}(x) \right] - \frac{1}{D_4} \lambda_7(x) Y_{8E}(x) + \lambda_8(x) \left\{ \right. \\
& \left. \Sigma(1 \rightarrow 4) Y_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) Y_{3E}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) Y_{5E}(x) - \right. \\
& \left. \left[\Sigma_a^M + N(x) \sigma_a^F \right] Y_{7E}(x) \right\} + u_2 \left[- N(x) \right] \tag{6-2.18}
\end{aligned}$$

Os subscritos C e E indicam zona central e externa, respectivamente.

Para obtenção de u_1 e u_2 introduz-se a equação de controle:

$$\frac{\partial H}{\partial N} = 0$$

Portanto, tem-se:

$$u_1 = \frac{\sigma_a^F}{K \sigma_f} \lambda_8(x) - \frac{v}{K} \lambda_2(x) - 1 \quad (6-2.19)$$

$$e \quad u_2 = Y_7 \left[K \sigma_f + v \sigma_f \lambda_2 - \sigma_a^F \lambda_8 \right] \quad (6-2.20)$$

Tendo a distribuição de combustível para cada zona do reator, pode-se escrever as equações de estado para cada zona:

- para $0 \leq x \leq \alpha_1$

$$\dot{Y}_{1C}(x) = - \frac{1}{D_1} Y_{2C}(x) \quad (6-2.21)$$

$$\dot{Y}_{2C}(x) = - \Sigma_{R,1} Y_{1C}(x) + \frac{v}{K} Q_{\max} \quad (6-2.22)$$

$$\dot{Y}_{3C}(x) = - \frac{1}{D_2} Y_{4C}(x) \quad (6-2.23)$$

$$\dot{Y}_{4C}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) Y_{1C}(x) - \Sigma_{R,2} Y_{3C}(x) \quad (6-2.24)$$

$$\dot{Y}_{5C}(x) = - \frac{1}{D_3} Y_{6C}(x) \quad (6-2.25)$$

$$\dot{Y}_{6C}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) Y_{1C}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) Y_{3C}(x) - \Sigma_{R,3} Y_{5C}(x) \quad (6-2.26)$$

$$\dot{Y}_{7C}(x) = - \frac{1}{D_4} Y_{8C}(x) \quad (6-2.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{8C}(x) &= \Sigma(1 \rightarrow 4) Y_{1C}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) Y_{3C}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) Y_{5C}(x) \\ &- \Sigma_a^M Y_{7C}(x) - \frac{Q_{\max} \sigma_a^F}{K \sigma_f} \end{aligned} \quad (6-2.28)$$

- para $\alpha_1 \leq x \leq a$

$$\dot{Y}_{1E}(x) = - \frac{1}{D_1} Y_{2E}(x) \quad (6-2.29)$$

$$\dot{Y}_{2E}(x) = - \Sigma_{R,1} Y_{1E}(x) \quad (6-2.30)$$

$$\dot{Y}_{3E}(x) = - \frac{1}{D_2} Y_{4E}(x) \quad (6-2.31)$$

$$\dot{Y}_{4E}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) Y_{1E}(x) - \Sigma_{R,2} Y_{3E}(x) \quad (6-2.32)$$

$$\dot{Y}_{5E}(x) = - \frac{1}{D_3} Y_{6E}(x) \quad (6-2.33)$$

$$\dot{Y}_{6E}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) Y_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) Y_{3E}(x) - \Sigma_{R,3} Y_{5E}(x) \quad (6-2.34)$$

$$\dot{Y}_{7E}(x) = - \frac{1}{D_4} Y_{8E}(x) \quad (6-2.35)$$

$$\dot{Y}_{8E}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 4) Y_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) Y_{3E}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) Y_{5E}(x) - \Sigma_a^M Y_{7E}(x) \quad (6-2.36)$$

Tem-se agora, em 4 grupos de energia de neutrons, dois sistemas com 8 equações cada, 16 condições de contorno e a interface α_1 desconhecida. A outra condição é dada pela condição de criticalidade, descrita no ítem 3-5.

Fazendo-se a normalização, conforme ítem 3-3, tem-se:

- para $0 \leq x \leq \alpha_1$

$$\dot{Y}_{1C}(x) = - \frac{1}{D_1} Y_{2C}(x) \quad (6-2.37)$$

$$\dot{Y}_{2C}(x) = - \Sigma_{R,1} Y_{1C}(x) - \nu \sigma_f \quad (6-2.38)$$

$$\dot{Y}_{3C}(x) = - \frac{1}{D_2} Y_{4C}(x) \quad (6-2.39)$$

$$\dot{Y}_{4C}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) Y_{1C}(x) - \Sigma_{R,2} Y_{3C}(x) \quad (6-2.40)$$

$$\dot{Y}_{5C}(x) = -\frac{1}{D_3} Y_{6C}(x) \quad (6-2.41)$$

$$\dot{Y}_{6C}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) Y_{1C}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) Y_{3C}(x) - \Sigma_{R,3} Y_{5C}(x) \quad (6-2.42)$$

$$\dot{Y}_{7C}(x) = -\frac{1}{D_4} Y_{8C}(x) \quad (6-2.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{8C}(x) &= \Sigma(1 \rightarrow 4) Y_{1C}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) Y_{3C}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) Y_{5C}(x) \\ &\quad - \Sigma_a^M Y_{7C}(x) - \sigma_a^F \end{aligned} \quad (6-2.44)$$

- para $\alpha_1 \leq x \leq a$

$$\dot{Y}_{1E}(x) = -\frac{1}{D_1} Y_{2E}(x) \quad (6-2.45)$$

$$\dot{Y}_{2E}(x) = -\Sigma_{R,1} Y_{1E}(x) \quad (6-2.46)$$

$$\dot{Y}_{3E}(x) = -\frac{1}{D_2} Y_{4E}(x) \quad (6-2.47)$$

$$\dot{Y}_{4E}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 2) Y_{1E}(x) - \Sigma_{R,2} Y_{3E}(x) \quad (6-2.48)$$

$$\dot{Y}_{5E}(x) = -\frac{1}{D_3} Y_{6E}(x) \quad (6-2.49)$$

$$\dot{Y}_{6E}(x) = \Sigma(1 \rightarrow 3) Y_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) Y_{3E}(x) - \Sigma_{R,3} Y_{5E}(x) \quad (6-2.50)$$

$$\dot{Y}_{7E}(x) = -\frac{1}{D_4} Y_{8E}(x) \quad (6-2.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{8E}(x) &= \Sigma(1 \rightarrow 4) Y_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) Y_{3E}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) Y_{5E}(x) - \\ &\quad - \Sigma_a^M Y_{7E}(x) \end{aligned} \quad (6-2.52)$$

6-3. Resolução do Sistema de Equações Obtido para 4 Grupos de Energia

Reagrupando-se as equações de estado sujeitas à normalização (equações 6-2.37 a 6-2.52), tem-se as equações para a região central e externa do reator:

- para a região interna

$$D_1 \nabla^2 \phi_{1C}(x) - \Sigma_{R,1} \phi_{1C}(x) + \nu \sigma_f = 0 \quad (6-3.1)$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_{2C}(x) - \Sigma_{R,2} \phi_{2C}(x) + \Sigma(1 \rightarrow 2) \phi_{1C}(x) = 0 \quad (6-3.2)$$

$$D_3 \nabla^2 \phi_{3C}(x) - \Sigma_{R,3} \phi_{3C}(x) + \Sigma(1 \rightarrow 3) \phi_{1C}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) \phi_{2C}(x) = 0 \quad (6-3.3)$$

$$D_4 \nabla^2 \phi_{4C}(x) - \Sigma_a^M \phi_{4C}(x) + \Sigma(1 \rightarrow 4) \phi_{1C}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) \phi_{2C}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) \phi_{3C}(x) - \sigma_a^F = 0 \quad (6-3.4)$$

- para a região externa

$$D_1 \nabla^2 \phi_{1E}(x) - \Sigma_{R,1} \phi_{1E}(x) = 0 \quad (6-3.5)$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_{2E}(x) - \Sigma_{R,2} \phi_{2E}(x) + \Sigma(1 \rightarrow 2) \phi_{1E}(x) = 0 \quad (6-3.6)$$

$$D_3 \nabla^2 \phi_{3E}(x) - \Sigma_{R,3} \phi_{3E}(x) + \Sigma(1 \rightarrow 3) \phi_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 3) \phi_{2E}(x) = 0 \quad (6-3.7)$$

$$D_4 \nabla^2 \phi_{4E}(x) - \Sigma_a^M \phi_{4E}(x) + \Sigma(1 \rightarrow 4) \phi_{1E}(x) + \Sigma(2 \rightarrow 4) \phi_{2E}(x) + \Sigma(3 \rightarrow 4) \phi_{3E}(x) = 0 \quad (6-3.8)$$

Da mesma maneira como foi feito para 2 grupos, pode-se escrever o sistema acima na forma matricial:

$$\underline{D} \nabla^2 \underline{\phi} - \underline{\Sigma} \underline{\phi} + \underline{Q} = \underline{0} \quad (6-3.9)$$

onde:

- $\underline{\phi}$ é o vetor dos fluxos, isto é,

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ Y_5 \\ Y_7 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (6-3.10)$$

- \underline{D} é a matriz coeficiente de difusão:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix} \quad (6-3.11)$$

- $\underline{\Sigma}$ é a matriz secção de choque

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{R,1} & 0 & 0 & 0 \\ -\Sigma(1 \rightarrow 2) & \Sigma_{R,2} & 0 & 0 \\ -\Sigma(1 \rightarrow 3) & -\Sigma(2 \rightarrow 3) & \Sigma_{R,3} & 0 \\ -\Sigma(1 \rightarrow 4) & -\Sigma(2 \rightarrow 4) & -\Sigma(3 \rightarrow 4) & \Sigma_a^M \end{bmatrix} \quad (6-3.12)$$

- \underline{Q} é o vetor constante

$$\underline{Q}_C = \begin{bmatrix} v \sigma_f \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_a F \end{bmatrix} \quad \text{para o cerne} \quad (6-3.13)$$

$$\underline{Q}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{para o refletor} \quad (6-3.14)$$

Foram tentadas soluções da forma:

$$\underline{\phi}(x) = \underline{G}(\omega) e^{-\omega x} \quad (6-3.15)$$

e da mesma maneira como em 2 grupos, determinou-se ω e $G(\omega)$:

$$\omega_i^2 = \frac{\Sigma_i}{D_i} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6-3.16)$$

$$\underline{G}(\omega_i) = \begin{bmatrix} g_1(\omega_i) \\ g_2(\omega_i) \\ g_3(\omega_i) \\ g_4(\omega_i) \end{bmatrix} \quad (6-3.17)$$

As soluções obtidas para os fluxos e correntes, com auxílio das condições de contorno dadas no ítem 2-1, são:

$$\phi_C = \sum_{i=1}^4 A_i \cosh(\omega_i x) \underline{G}(\omega_i) + \phi_p \quad (6-3.18)$$

$$\underline{J}_C = - \sum_{i=1}^4 D_i \omega_i A_i \sinh(\omega_i x) \underline{G}(\omega_i) \quad (6-3.19)$$

$$\phi_E = \sum_{i=1}^4 C_i \sinh[\omega_i(a-x)] \underline{G}(\omega_i) \quad (6-3.20)$$

$$\underline{J}_E = \sum_{i=1}^4 D_i \omega_i A_i \cosh[\omega_i(a-x)] \underline{G}(\omega_i) \quad (6-3.21)$$

As constantes A_i e C_i são dadas, respectivamente, por:

$$A_i = -F_i M_i(\alpha_1) 2 \cdot \frac{e^{-\omega_i \alpha_1}}{1 + 2e^{-2\omega_i \alpha_1}} \quad (6-3.22)$$

$$C_i = F_i M_i(\alpha_1) 2 \cdot \frac{e^{-\omega_i(a-\alpha_1)}}{\left(1 + e^{-2\omega_i \alpha_1}\right) \left(1 + e^{-2\omega_i(a-\alpha_1)}\right)} \quad (6-3.23)$$

onde:

$$\vec{\phi}_p = \begin{bmatrix} \frac{v \sigma_f}{\Sigma_{R,1}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{v \sigma_f - \sigma_a}{\Sigma_a^M} \end{bmatrix} \quad (6-3.24)$$

$$F_1 = -\phi_{p1} \quad (6-3.25)$$

$$F_2 = g_2(\omega_1) F_1 - \phi_{p2} \quad (6-3.26)$$

$$F_3 = +g_3(\omega_1) F_1 + g_3(\omega_2) F_2 - \phi_{p3} \quad (6-3.27)$$

$$F_4 = g_4(\omega_1) F_1 + g_4(\omega_2) F_2 + g_4(\omega_3) F_3 - \phi_{p4} \quad (6-3.28)$$

e

$$M_i(\alpha_1) = \frac{1}{2} \frac{\left(1 + e^{-2\omega_i(a - \alpha_1)}\right) \left(1 + e^{-2\omega_i \alpha_1}\right)}{\left(1 + e^{-2\omega_i a}\right)} \quad (6-3.29)$$

Da mesma maneira que em 2 grupos, necessita-se saber a posição da interface α_1 , que é determinada através da condição de criticalidade já demonstrada.

As outras condições são dadas por:

$$-\phi_1(a) = \phi_2(a) = \phi_3(a) = \phi_4(a) = 0 \quad (6-3.30)$$

$$-J_1(0) = J_2(0) = J_3(0) = J_4(0) = 0 \quad (6-3.31)$$

- continuidade dos fluxos e correntes na interface.

6-4. Sistema Adjunto para 4 Grupos de Energia

Como já foi visto anteriormente, o sistema adjunto é dado por:

$$\dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial Y_i} , \text{ nesse caso } i = 1, \dots, 8 \quad (6-4.1)$$

Para a região central tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{1C}(x) = & \Sigma_{R,1} \lambda_{2C}(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_{4C}(x) - \\ & \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_{6C}(x) - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_{8C}(x) \end{aligned} \quad (6-4.2)$$

$$\dot{\lambda}_{2C}(x) = \frac{1}{D_1} \lambda_{1C}(x) \quad (6-4.3)$$

$$\dot{\lambda}_{3C}(x) = \Sigma_{R,2} \lambda_{4C}(x) - \Sigma(2 \rightarrow 3) \lambda_{6C}(x) - \Sigma(2 \rightarrow 4) \lambda_{8C}(x) \quad (6-4.4)$$

$$\dot{\lambda}_{4C}(x) = \frac{1}{D_2} \lambda_{3C}(x) \quad (6-4.5)$$

$$\dot{\lambda}_{5C}(x) = \Sigma_{R,3} \lambda_{6C}(x) - \Sigma(3 \rightarrow 4) \lambda_{8C}(x) \quad (6-4.6)$$

$$\dot{\lambda}_{6C}(x) = \frac{1}{D_3} \lambda_{5C}(x) \quad (6-4.7)$$

$$\dot{\lambda}_{7C}(x) = \Sigma_a^M \lambda_{8C}(x) \quad (6-4.8)$$

$$\dot{\lambda}_{8C}(x) = \frac{1}{D_4} \lambda_{7C}(x) \quad (6-4.9)$$

Para a região externa

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{1E}(x) = & \Sigma_{R,1} \lambda_{2E}(x) - \Sigma(1 \rightarrow 2) \lambda_{4E}(x) - \Sigma(1 \rightarrow 3) \lambda_{6E}(x) - \\ & - \Sigma(1 \rightarrow 4) \lambda_{8E}(x) \end{aligned} \quad (6-4.10)$$

$$\dot{\lambda}_{2E}(x) = \frac{1}{D_1} \lambda_{1E}(x) \quad (6-4.11)$$

$$\dot{\lambda}_{3E}(x) = \Sigma_{R,2} \lambda_{4E}(x) - \Sigma(2 \rightarrow 3) \lambda_{6E}(x) - \Sigma(2 \rightarrow 4) \lambda_{8E}(x) \quad (6-4.12)$$

$$\dot{\lambda}_{4E}(x) = \frac{1}{D_2} \lambda_{3E}(x) \quad (6-4.13)$$

$$\dot{\lambda}_{5E}(x) = \Sigma_{R,3} \lambda_{6E}(x) - \Sigma(3 \rightarrow 4) \lambda_{8E}(x) \quad (6-4.14)$$

$$\dot{\lambda}_{6E}(x) = \frac{1}{D_3} \lambda_{5E}(x) \quad (6-4.15)$$

$$\dot{\lambda}_{7E}(x) = \Sigma_a^M \lambda_{8E}(x) \quad (6-4.16)$$

$$\dot{\lambda}_{8E}(x) = \frac{1}{D_4} \lambda_{7E}(x) \quad (6-4.17)$$

As condições de contorno são obtidas da mesma maneira que para 2 grupos. Nesse caso:

$$- \lambda_j(0) = 0 \quad \text{para } j = 1, 3, 5, 7 \quad (6-4.18)$$

$$- \lambda_j(a) = 0 \quad \text{para } j = 2, 4, 6, 8 \quad (6-4.19)$$

Tem-se portanto um sistema adjunto composto de 16 equações diferenciais, 8 para cada zona, 16 condições de contorno e a interface α_1 determinada pela equação da criticalidade.

7. RESULTADOS NUMÉRICOS EM 4 GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

Analogamente a dois grupos de energia de neutrons, as constantes de grupo e as secções de choque foram obtidas para 4 grupos de energia de neutrons.

Os intervalos de energia considerados são:

Grupo	1	2	3	4
Intervalo	15 MeV - 87 KeV	87 KeV - 7 KeV	7 KeV - 1 eV	1 eV - 0 eV

Os valores usados para as secções de choque e constantes de grupo são apresentados nas tabelas 7-1 e 7-2.

Obteve-se resultados para reatores nas mesmas condições que no caso de 2 grupos de energia de neutrons, isto é:

- espessuras

30 cm , 40 cm , 60 cm e 99 cm

- concentração nas interfaces

0.6 , 0.67 , 0.7 , 0.75 , 0.8 , 0.85 , 0.9 , 0.95 , 1 e 1.2
 $\times 10^{20}$ átomos/cm³

São apresentadas as seguintes tabelas:

- Tabelas 7-3 a 7-6

posições das interfaces, potências e massas críticas para as diversas espessuras e concentrações.

- Tabela 7-7

concentração máxima de combustível e onde ela ocorre.

- Tabela 7-8

variação da espessura do refletor com a concentração na interface.

- Tabela 7-9

fluxos para o reator com 40 cm de espessura e concentração na interface $0.65 \cdot 10^{20}$ átomos/cm³.

- Tabela 7-10

correntes para o reator com 40 cm de espessura e concentração na interface $0.65 \cdot 10^{20}$ átomos/cm³.

- Tabela 7-11

distribuição de combustível

- Tabela 7-12

principais resultados

Apresenta-se também as seguintes figuras:

- Figura 7-1

Curva de variação da espessura do refletor com a concentração na interface.

- Figura 7-2

Curva dos fluxos.

- Figura 7-3

Curva da distribuição de combustível.

TABELA 7-1 Secção de choque e Constantes de grupo em 4 grupos de energia

Grupo	1	2	3	4
Σ_R (cm ⁻¹)	0.08626	0.41708	0.151	0.0
Σ_a^M (cm ⁻¹)	0	0	0	0.01728
σ_f (cm ²) .10 ⁻²⁰	0	0	0	0.043476
σ_a^F (cm ²) .10 ⁻²⁰	0	0	0	0.051115
ν (n/f)	0	0	0	2.442
0	1.467	0.686	0.557	0.115

TABELA 7-2 Secção de choque de transferência (cm⁻¹)

Grupo	$\Sigma(g \rightarrow 1)$	$\Sigma(g \rightarrow 2)$	$\Sigma(g \rightarrow 3)$	$\Sigma(g \rightarrow 4)$
1	0	0.07929	0.00697	0
2	0	0	0.41702	0.00006
3	0	0	0	0.15101
4	0	0	0	0

TABELA 7-3 INTERFACES, POTÊNCIAS E MASSAS CRÍTICAS
4 GRUPOS - ESPESSURA 30 cm

concent. interface $\cdot 10^{20}$ atom/cm ³	inter- face 1 cm	potência 1 KW/cm ²	massa 1 g/cm ²	inter- face 2 cm	potência 2 KW/cm ²	massa 2 g/cm ²
0.6						
0.65	9.84	1.1818	0.4380	20.15	2.418	0.676
0.7	7.48	0.8986	0.4131	22.51	2.707	0.7469
0.75	6.46	0.7760	0.4172	23.53	2.823	0.7849
0.8	5.82	0.6990	0.4294	24.17	2.901	0.8127
0.85	5.36	0.643	0.4456	24.63	2.956	0.836
0.9	5.01	0.601	0.4645	24.98	2.998	0.8564
0.95	4.73	0.567	0.4855	25.27	3.032	0.8747
1.	4.49	0.539	0.5082	25.50	3.060	0.8915
1.2	3.85	0.461	0.6162	26.15	3.138	0.9492

TABELA 7-4 INTERFACES, POTÊNCIAS E MASSAS CRÍTICAS
4 GRUPOS - ESPESSURA 40 cm

concent. interface $\cdot 10^{20}$ atom/cm ³	inter- face 1 cm	potência 1 KW/cm ²	massa 1 g/cm ²	inter- face 2 cm	potência 2 KW/cm ²	massa 2 g/cm ²
0.6						
0.65	9.83	1.180	0.4377	30.16	3.619	0.9208
0.7	7.48	0.898	0.4131	32.51	3.901	0.991
0.75	6.46	0.775	0.4172	33.53	4.024	1.029
0.8	5.82	0.698	0.4294	34.17	4.101	1.057
0.85	5.36	0.643	0.4456	34.63	4.156	1.08
0.9	5.01	0.601	0.4645	34.98	4.198	1.10
0.95	4.73	0.567	0.4855	35.27	4.232	1.11
1.	4.49	0.539	0.5082	35.50	4.260	1.136
1.2	3.85	0.461	0.6162	36.15	4.338	1.193

TABELA 7-5 INTERFACES, POTÊNCIAS E MASSAS CRÍTICAS

4 GRUPOS - ESPESSURA 60 cm

concent. interface $\cdot 10^{20}$ atm/cm ³	inter- face 1 cm	potência 1 KW/cm ²	massa 1 g/cm ²	inter- face 2 cm	potência 2 KW/cm ²	massa 2 g/cm ²
0.6						
0.67	8.55	1.026	0.4202	51.44	6.173	1.4466
0.7	7.48	0.8984	0.4130	52.51	6.301	1.4806
0.75	6.46	0.775	0.4172	53.53	6.424	1.5183
0.8	5.82	0.6989	0.4294	54.17	6.501	1.5464
0.85	5.36	0.643	0.4456	54.63	6.556	1.5697
0.9	5.01	0.601	0.4645	54.98	6.598	1.5901
0.95	4.73	0.567	0.4855	55.27	6.632	1.6084
1.	4.49	0.539	0.5082	55.50	6.660	1.6252
1.2	3.85	0.461	0.6162	56.15	6.738	1.6829

TABELA 7-6 INTERFACES, POTÊNCIAS E MASSAS CRÍTICAS

4 GRUPOS - ESPESSURA 99 cm

concent. interface $\cdot 10^{20}$ atm/cm ³	inter- face 1 cm	potência 1 KW/cm ²	massa 1 g/cm ²	inter- face 2 cm	potência 2 KW/cm ²	massa 2 g/cm ²
0.6						
0.67	8.55	1.026	0.4202	90.44	10.853	2.4005
0.7	7.48	0.8984	0.4130	91.51	10.981	2.4344
0.75	6.46	0.775	0.4172	92.53	11.104	2.4722
0.8	5.82	0.6989	0.4294	93.17	11.181	2.5003
0.85	5.36	0.643	0.4456	93.63	11.236	2.5236
0.9	5.01	0.601	0.4645	93.98	11.278	2.5439
0.95	4.73	0.567	0.4855	94.27	11.312	2.5625
1.	4.49	0.539	0.5082	94.50	11.340	2.5790
1.2	3.85	0.461	0.6162	95.15	11.418	2.639

TABELA 7-7 Concentração máxima de combustível e onde ocorre

espessura reator cm	30		40		espessura reator cm	60		99	
	x_{\max} cm	N_{\max} $\cdot 10^{20}$ atm/cm ³	x_{\max} cm	N_{\max} $\cdot 10^{20}$ atm/cm ³		concentração $\cdot 10^{20}$ atm/cm ³	x_{\max} cm	N_{\max} $\cdot 10^{20}$ atm/cm ³	x_{\max} cm
0.65	20	0.6634	30	0.6635	0.67	51.5	0.6805	90.5	0.6805
0.7	22.5	0.7099	32.5	0.7099	0.7	52.5	0.7099	91.5	0.7099
0.75	23.5	0.7563	33.5	0.7563	0.75	53.5	0.7563	92.5	0.7563
0.8	24.5	0.803	34.5	0.803	0.8	54.5	0.803	93.5	0.803
0.85	25	0.8521	35	0.852	0.85	55	0.8521	94	0.8521
0.9					0.9				
0.95					0.95				
1.					1.				
1.2					1.2				

TABELA 7-8 Espessura do refletor x concentração

concentração .10 ²⁰ atm/cm ³	espessura refletor cm
0.65	9.5
0.67	8.2
0.7	7.0
0.75	6.0
0.8	5.4
0.85	4.9
0.9	4.5
0.95	4.2
1.	4.0
1.2	3.4

TABELA 7-9 FLUXOS NORMALIZADOS

n/cm².seg

X cm	Y ₁	Y ₃	Y ₅	Y ₇
0	1.2306	0.2339	0.7026	3.1808
2.0	1.2305	0.2339	0.7026	3.1797
4.0	1.2302	0.2338	0.7023	3.1761
6.0	1.2296	0.2337	0.7018	3.1693
8.0	1.2285	0.2334	0.7010	3.1577
10.0	1.2267	0.2331	0.6995	3.1389
12.0	1.2238	0.2325	0.6972	3.1089
14.0	1.2191	0.2315	0.6935	3.0617
16.0	1.2114	0.2299	0.6874	2.9887
18.0	1.1989	0.2272	0.6776	2.8780
20.0	1.1787	0.2230	0.6619	2.7148
22.0	1.1457	0.2160	0.6370	2.4841
24.0	1.0922	0.2049	0.5984	2.1796
26.0	1.0053	0.1870	0.5405	1.8245
28.0	0.8642	0.1591	0.4588	1.5166
30.0	0.6350	0.1196	0.3564	1.5109
30.16	0.6105	0.1159	0.3474	1.5384
32.0	0.3865	0.0783	0.2511	1.5821
34.0	0.2297	0.0477	0.1625	1.2644
36.0	0.1281	0.0268	0.0949	0.8385
38.0	0.0572	0.0120	0.0433	0.4110
40.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TABELA 7-10 CORRENTES NORMALIZADAS

n/cm².seg

X cm	Y ₂	Y ₄	Y ₆	Y ₈
0.0	0	0	0	0
2.0	0.1893 .10 ⁻³	0.18635.10 ⁻⁴	0.5756.10 ⁻⁴	0.1647 .10 ⁻³
4.0	0.3320 .10 ⁻³	0.3267 .10 ⁻⁴	0.1009.10 ⁻³	0.2873 .10 ⁻³
6.0	0.59547 .10 ⁻³	0.5860 .10 ⁻⁴	0.1809.10 ⁻³	0.5099 .10 ⁻³
8.0	0.10017 .10 ⁻²	0.9858 .10 ⁻⁴	0.3042.10 ⁻³	0.8445 .10 ⁻³
10.0	0.16482 .10 ⁻²	0.1622 .10 ⁻³	0.4999.10 ⁻³	0.1359 .10 ⁻²
12.0	0.2690 .10 ⁻²	0.2647 .10 ⁻³	0.8144.10 ⁻³	0.2151 .10 ⁻²
14.0	0.4377 .10 ⁻²	0.4307 .10 ⁻³	0.1320.10 ⁻²	0.3357 .10 ⁻²
16.0	0.7114 .10 ⁻²	0.7000 .10 ⁻³	0.2133.10 ⁻²	0.5151 .10 ⁻²
18.0	0.1155 .10 ⁻¹	0.11369.10 ⁻²	0.3429.10 ⁻²	0.7723 .10 ⁻²
20.0	0.1877 .10 ⁻¹	0.1845 .10 ⁻²	0.5467.10 ⁻²	0.1119 .10 ⁻¹
22.0	0.3049 .10 ⁻¹	0.2989 .10 ⁻²	0.8595.10 ⁻²	0.1541 .10 ⁻¹
24.0	0.4952 .10 ⁻¹	0.4818 .10 ⁻²	0.1317.10 ⁻¹	0.1942 .10 ⁻¹
26.0	0.8042 .10 ⁻¹	0.7655 .10 ⁻²	0.1931.10 ⁻¹	0.2054 .10 ⁻¹
28.0	0.1306	0.1161 .10 ⁻¹	0.2605.10 ⁻¹	0.1255 .10 ⁻¹
30.0	0.2121	0.1499 .10 ⁻¹	0.3009.10 ⁻¹	0.1698 .10 ⁻¹
30.16	0.2208	0.1503 .10 ⁻¹	0.3014.10 ⁻¹	0.2102 .10 ⁻¹
32.0	0.1433	0.1250 .10 ⁻¹	0.2756.10 ⁻¹	0.108921.10 ⁻¹
34.0	0.9116 .10 ⁻¹	0.8634 .10 ⁻²	0.2164.10 ⁻¹	0.23039 .10 ⁻¹
36.0	0.6088 .10 ⁻¹	0.5920 .10 ⁻²	0.1625.10 ⁻¹	0.2500 .10 ⁻¹
38.0	0.4520 .10 ⁻¹	0.4432 .10 ⁻²	0.1284.10 ⁻¹	0.2404 .10 ⁻¹
40.0	0.403611.10 ⁻¹	0.3365 .10 ⁻²	0.1170.10 ⁻¹	0.2341 .10 ⁻¹

TABELA 7-11 Distribuição de Com
bustível

X cm	N(x) átomos/cm ³
0	0.3143
2	0.3144
4	0.3148
6	0.3155
8	0.3166
10	0.3185
12	0.3216
14	0.3266
16	0.3345
18	0.3474
20	0.3683
22	0.4025
24	0.4587
26	0.5480
28	0.6593
29	0.6893
30	0.6618
30.16	0.65
32	0
34	0
36	0
38	0
40	0

TABELA 7-12 RESULTADOS PRINCIPAIS

4 GRUPOS

E = 40 cm

N = 0.65 atm/cm³

	1 ^a resposta	2 ^a resposta
Potência KW/cm ²	1.180	3.619
Massa Crítica g/cm ²	0.4377	0.9208
Potência/Massa Crítica KW/g	2.695	3.930
Interface cm	9.83	30.16

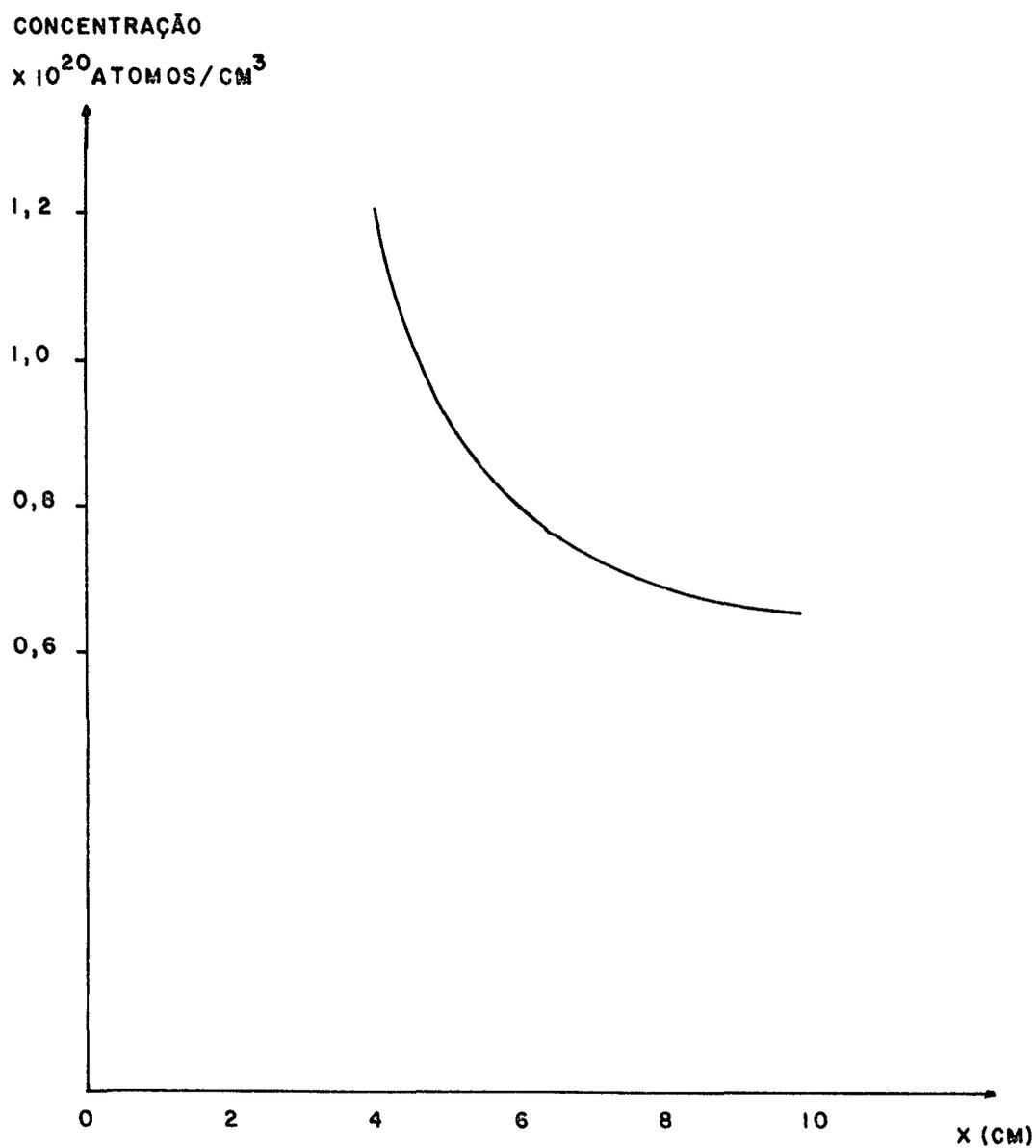


FIGURA 7 - 1 CONCENTRAÇÃO NA INTERFACE X ESPESSURA DO REFLETOR - QUATRO GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

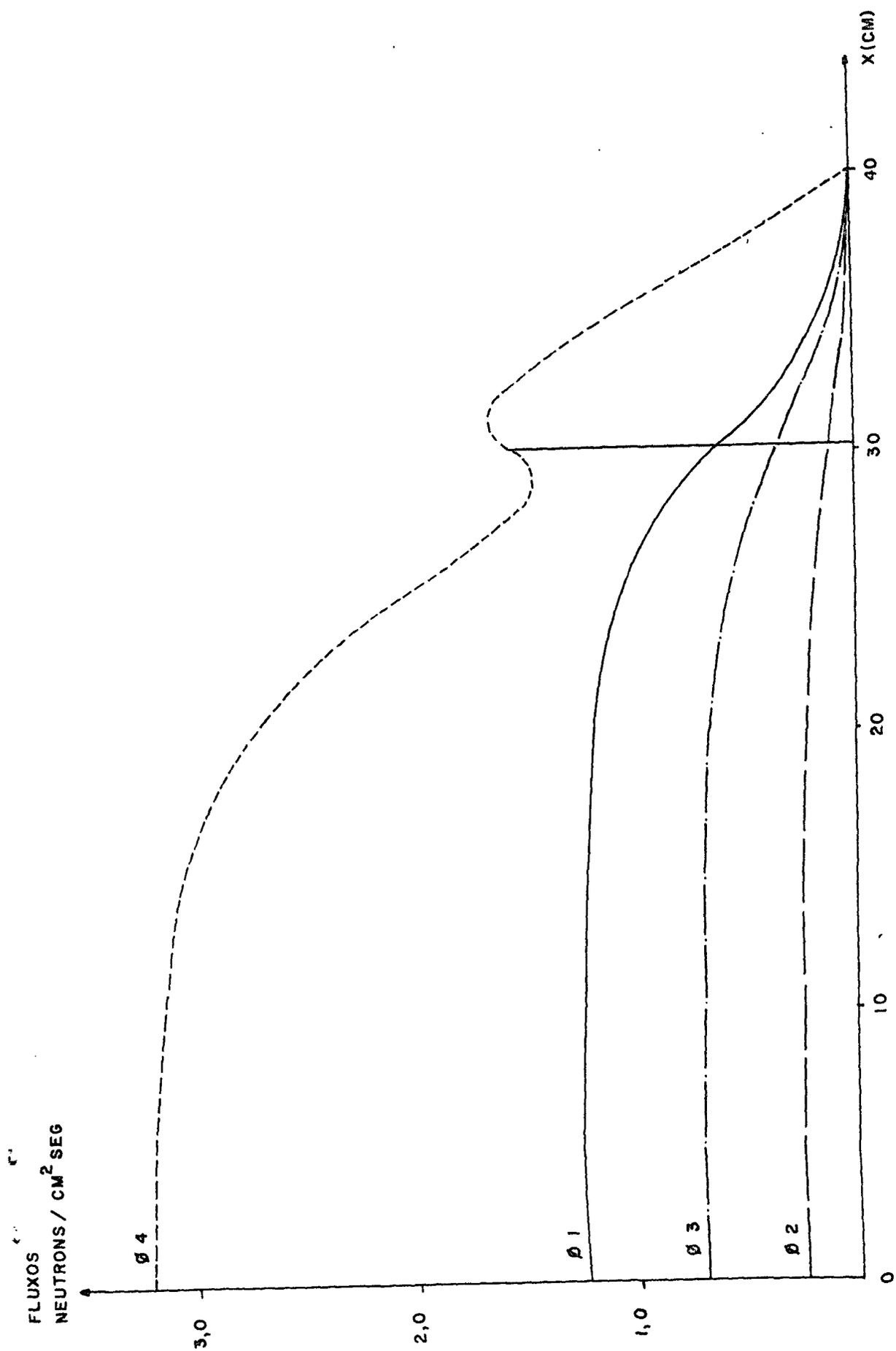


FIGURA 7 - 2 FLUXOS NORMALIZADOS - QUATRO GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

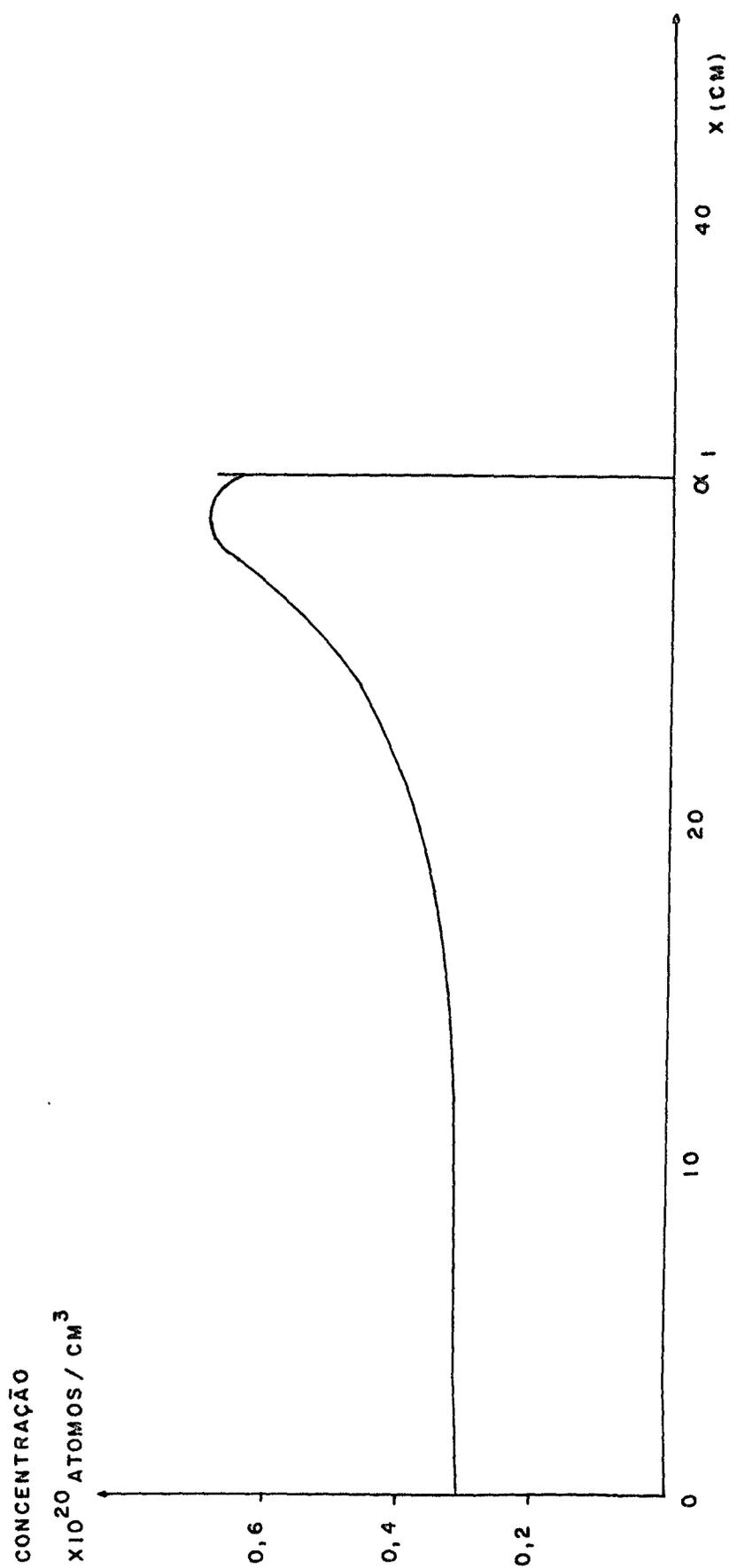


FIGURA 7 - 3 DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTIVEL - QUATRO GRUPOS DE ENERGIA DE NEUTRONS

8. COMENTÁRIOS GERAIS

As simplificações feitas na formulação do problema e já comentadas no Capítulo 5 quando comparadas com os resultados obtidos pelo código XSDRN são também perfeitamente justificadas em 4 grupos de energia, como pode ser verificado nas tabelas 8-1 e 8-2.

TABELA 8-1 Constantes geradas pelo código XSDRN
4 Grupos de energia

	1	2	3	4
χ_i	$9.8959 \cdot 10^{-1}$	$1.0406 \cdot 10^{-2}$	0	0
σ_{fi} barn	1.26432	2.44487	$2.48692 \cdot 10^1$	$4.34757 \cdot 10^2$
$a U_{235}$ barn	1.38902	3.34553	$4.00375 \cdot 10^1$	$5.11145 \cdot 10^2$
σ_a^H barn	0	$1.76104 \cdot 10^{-4}$	$1.15530 \cdot 10^{-2}$	$2.58919 \cdot 10^{-1}$
σ_a^O barn	$9.37151 \cdot 10^{-3}$	0	$1.758 \cdot 10^{-4}$	$1.388 \cdot 10^{-4}$

TABELA 8-2 Matriz de espalhamento gerado pelo código XSDRN
4 Grupos de energia

grupo g	$\Sigma(g \rightarrow 1)_{cm^{-1}}$	$\Sigma(g \rightarrow 2)_{cm^{-1}}$	$\Sigma(g \rightarrow 3)_{cm^{-1}}$	$\Sigma(g \rightarrow 4)_{cm^{-1}}$
1	0.33352	0.07929	0.00696	0.000001
2	0	0.93512	0.417018	0.00006
3	0	0	1.45426	0.15101
4	0	0	$1.26073 \cdot 10^{-5}$	2.9749

TABELA 8-3 Resultados principais obtidos por W.N. Santos /20/ 4 Grupos

Potência KW/cm ²	2.8665
Massa crítica g/cm ²	0.9204
Potência/Massa crítica KW/g	3.114

Com a finalidade de se fazer comparações, são apresentadas na tabela 8-3 a potência, a massa crítica e a relação potência/massa crítica obtida por W.N. dos Santos /20/ para um reator tipo placa, infinito, não refletido, otimizado e sujeito à vínculos na densidade de potência e na concentração de combustível, com espessura total 30 cm e concentração máxima de combustível $4.4485 \cdot 10^{20}$ átomos/cm³. Os mesmos dados para um reator refletido com espessura 40 cm e concentração de combustível $0.65 \cdot 10^{20}$ são apresentados na tabela 7-12. Escolheu-se para efeito de comparação, o reator acima, por apresentar um cerne aproximadamente igual ao do reator considerado por W.N. Santos (≈ 30 cm). Vê-se que o reator refletido apresenta uma maior relação potência/massa crítica.

O deslocamento das posições das interfaces de 2 para 4 grupos, variou de 0.32 a 0.47 cm, conforme a concentração de combustível varia de 0.65 a $1.2 \cdot 10^{20}$ átomos/cm³. Esse deslocamento possivelmente será mais nítido em geometrias mais reais.

O comportamento do fluxo térmico é típico de reatores refletidos, isto é, apresenta uma subida depois da interface com o refletor devido à presença dos neutrons que escapam do cerne e são

imediatamente moderados no refletor. Apresenta também uma variação lenta próximo ao centro do reator, caindo rapidamente próximo à interface, devido a condição de anulamento do fluxo na fronteira do reator.

A curva de distribuição de combustível também sofre influência do refletor. Aumenta gradativamente até próximo do refletor, passa por um máximo e cai um pouco na interface. Este efeito é devido a variação do fluxo térmico, próximo a interface, por influência do refletor e diminui conforme aumenta a concentração de combustível na interface pois, nesse caso, a densidade de potência é mais achatada.

As conclusões tiradas para dois grupos de energia de neutrons são confirmadas em 4 grupos, isto é:

- para uma mesma concentração, a espessura do refletor é a mesma, independente do tamanho do reator.
- quanto maior a concentração, menor o refletor.
- para uma mesma concentração na interface e espessura total do reator diferente, a concentração máxima é a mesma.
- a variação entre a concentração máxima e a concentração na interface, isto é, o efeito do refletor na moderação diminui conforme aumenta a concentração na interface.
- 2 interfaces para cada caso, sendo que só a segunda maximiza a potência, conforme pode ser visto nas tabelas 7-3 a 7-6.
- a soma das espessuras das duas regiões resulta na espessura total do reator.

Pode-se afirmar, então, que a dupla criticalidade existe realmente, no problema proposto, uma vez que ela foi encontrada também em resultados mais realísticos, obtidos com quatro grupos

de energia de neutrons.

Também pode-se afirmar que somente uma das posições da interface que torna o reator crítico, maximiza a potência do mesmo.

Concluindo, pode-se dizer que os objetivos inicialmente propostos foram atingidos, conforme se pode ver no desenvolvimento deste trabalho.

Para finalizar, seguem algumas sugestões para trabalhos futuros:

- aplicação da teoria de otimização e método de solução para situações mais reais, isto é, geometrias mais próximas de um reator real.
- impor ao reator outros tipos de vínculos tecnológicos, especialmente os de segurança, e obter-se maximização da potência.
- otimizar outros parâmetros do reator.
- verificar em outras geometrias se são mantidas as observações sobre variação da concentração máxima com a concentração na interface, variação da espessura do refletor com a concentração, dupla criticalidade e relação entre as duas respostas.

Quanto à existência de dupla criticalidade em reatores com outras geometrias, um trabalho já foi desenvolvido paralelamente a este e outros estão em fase de desenvolvimento.

A P Ê N D I C E

ZONA SINGULAR

O princípio de Máximo de Pontryagin requer:

$$\frac{\partial H}{\partial N} = 0 \quad (1)$$

ao longo da trajetória ótima. Esta mesma condição, que também deve ser satisfeita na trajetória singular, fornece a seguinte sequência de condições:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial N} &\equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right) \equiv \dots \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right) \equiv 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Se a Hamiltoniana for linear no controle, $\frac{\partial H}{\partial N} = 0$ é independente de N e portanto estabelece relações somente entre Y , λ e x . Utilizando as equações:

$$\dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (3)$$

$$e \quad \dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial Y} \quad (4)$$

as condições dadas em (2) podem ser reduzidas em relações similares entre aquelas variáveis. Se para um valor finito de m for encontrada uma relação que envolva $N(x)$ explicitamente, então existe trajetória singular caso contrário não existe zona singular. Além disso, para ser ótima, a zona singular precisa satisfazer a seguinte condição:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial N} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{2k} \frac{\partial H}{\partial N} \right] \leq 0 \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (5)$$

que é conhecida como Critério de Robbins /4/ e /5/.

Se k é o menor valor para o qual a desigualdade é satisfeita, então $2k$ é o grau de singularidade do arco.

Tomando-se a Hamiltoniana, definida na secção 3-2 e lembrando que se existir zona singular $u_1 = u_2 = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 H = & K \sigma_f N(x) Y_3(x) - \frac{1}{D_1} \lambda_1 Y_2(x) + \lambda_2 \left[v \sigma_f N(x) Y_3(x) - \right. \\
 & \left. - \Sigma_{R,1} Y_1(x) \right] - \frac{1}{D_2} \lambda_3 Y_4(x) + \lambda_4 \left\{ \Sigma_{R,1} Y_1(x) - \right. \\
 & \left. - \left[\Sigma_a + N(x) \sigma_a^F \right] Y_3(x) \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Aplicando-se a condição (1)

$$\frac{\partial H}{\partial N} = Y_3(x) \left[K \sigma_f + v \sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_a^F \lambda_4(x) \right] = 0 \quad (7)$$

Uma vez que $Y_3(x)$ é o fluxo térmico e portanto $\neq 0$, tem-se:

$$K \sigma_f + v \sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_a^F \lambda_4(x) = 0 \quad (8)$$

Fazendo a segunda derivada da Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \frac{d}{dx} Y_3(x) \left[K \sigma_f + v \sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_a^F \lambda_4(x) \right] + \\
 Y_3(x) \frac{d}{dx} \left[K \sigma_f + v \sigma_f \lambda_2(x) - \sigma_a^F \lambda_4(x) \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

Usando as equações (3), (4) e (8), a equação acima toma a forma:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = Y_3(x) \left[\frac{v}{D_1} \sigma_f \lambda_1(x) - \frac{\sigma_a^F}{D_2} \lambda_3(x) \right] \quad (10)$$

Fazendo a mesma análise que para (7), tem-se:

$$\frac{v}{D_1} \sigma_f \lambda_1(x) - \frac{\sigma_a^F}{D_2} \lambda_3(x) = 0 \quad (11)$$

Derivando-se novamente a Hamiltoniana, temos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \frac{d}{dx} Y_3(x) \left[\frac{v}{D_1} \sigma_f \lambda_1(x) - \frac{\sigma_a^F}{D_2} \lambda_3(x) \right] +$$

$$Y_3(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{v}{D_1} \sigma_f \lambda_1(x) - \frac{\sigma_a^F}{D_2} \lambda_3(x) \right] \quad (12)$$

Considerando a igualdade (11) e as condições (3) e (4),
tem-se

$$\frac{d}{dx^2} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = Y_3(x) \left[\frac{v}{D_1} \sigma_f \left(\Sigma_{R,1} \lambda_2 - \Sigma_{R,1} \lambda_4 \right) \right] +$$

$$Y_3(x) \frac{\sigma_a^F}{D_2} \left[K \sigma_f N(x) + v \sigma_f \lambda_2 N(x) - \lambda_4 N(x) \sigma_a^F \right] \quad (13)$$

Explicitando $N(x)$ e combinando com a relação (8), ob
tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = Y_3(x) \left[\frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\Sigma_{R,1} \lambda_2(x) - \Sigma_{R,1} \lambda_4(x) \right] \right] \quad (14)$$

Procedendo da mesma maneira que para (7) e (11):

$$\frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\Sigma_{R,1} \lambda_2(x) - \Sigma_{R,1} \lambda_4(x) \right] = 0 \quad (15)$$

Para terceira derivada da Hamiltoniana tem-se:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 = \frac{d}{dx} Y_3(x) \left\{ \frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\Sigma_{R,1} \lambda_2(x) - \Sigma_{R,1} \lambda_4(x) \right] \right\} +$$

$$+ Y_3(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\Sigma_{R,1} \lambda_2(x) - \Sigma_{R,1} \lambda_4(x) \right] \right\} \quad (16)$$

Combinando com (16), (3) e (4):

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = Y_3(x) \left\{ \frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\frac{\Sigma_{R,1}}{D_1} \lambda_1 - \frac{\Sigma_{R,1}}{D_2} \lambda_3(x) \right] \right\} \quad (17)$$

Uma vez que $Y_3 \neq 0$

$$\frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\frac{\Sigma_{R,1}}{D_1} \lambda_1 - \frac{\Sigma_{R,1}}{D_2} \lambda_3 \right] = 0 \quad (18)$$

Derivando mais uma vez

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 &= \frac{d}{dx} Y_3(x) \left\{ \frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\frac{\Sigma_{R,1}}{D_1} \lambda_1(x) - \frac{\Sigma_{R,1}}{D_2} \lambda_3(x) \right] \right\} + \\ + Y_3(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\frac{\Sigma_{R,1}}{D_1} \lambda_1(x) - \frac{\Sigma_{R,1}}{D_2} \lambda_3(x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Considerando (18) e fazendo-se as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 &= Y_3(x) \left\{ \frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\frac{\Sigma_{R,1}}{D_1} \left(\Sigma_{R,1} \lambda_2(x) - \Sigma_{R,1} \lambda_4(x) \right) + \right. \right. \\ + \left. \left. \frac{\Sigma_{R,1}}{D_2} \left(K \sigma_f N(x) + \lambda_2 v \sigma_f N(x) - \lambda_4 N(x) \sigma_a^F \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Evidenciando $N(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{\partial H}{\partial N} \right] = 0 &= Y_3(x) \left\{ \frac{v}{D_1} \sigma_f \left[\frac{\Sigma_{R,1}}{D_1} \left(\Sigma_{R,1} \lambda_2(x) - \Sigma_{R,1} \lambda_4(x) \right) + \right. \right. \\ + \left. \left. \frac{\Sigma_{R,1}}{D_2} N(x) \left(K \sigma_f + \lambda_2 v \sigma_f - \lambda_4 \sigma_a^F \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

Nessa última equação, como na equação (13), o termo que contém $N(x)$ explicitamente é multiplicado por um termo nulo, de acordo com a equação (6). Nota-se também que repete o termo com λ_2 e λ_4 . Trata-se, portanto, de um ciclo repetitivo e pode-se perceber que nunca vai ocorrer alguma equação na qual o controle $N(x)$ aparece explicitamente a não ser multiplicado por um coeficiente nulo.

Fica provado assim, a não existência da zona singular.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- / 1 / AXFORD, R.A. *Constrained Optimal Programming Problems in Reactor Statics*. Los Alamos, N.M., Los Alamos Sci Lab., Aug. 1969. (LA-4267).
- / 2 / BARTOSEK, V. & ZALESKY, K. *Optimal Reactor Configuration Yielding Maximum Power I*. Kernenergie, 17(11) : 351 - 6, Jah. 1974.
- / 3 / BARTOSEK, V. & ZALESKY, K. *Optimal Reactor Configuration Yielding Maximum Power II*. Kernenergie, 17(12) : 373 - 6, Jah. 1974.
- / 4 / BRYSON JR., A.E. & HO, Y.C. *Applied Optimal Control*. New York, N.Y., Wiley, 1975.
- / 5 / CITRON, S.J. *Elements of Optimal Control*. New York, N. Y., Reinhardt and Winston, 1969.
- / 6 / DEVOOGHT, J. *Restricted Minimum Critical Mass*. Nucl. Sci. Engng, 5 : 190-4, 1959.
- / 7 / GLASSTONE, S. & BELL, G.I. *Nuclear Reactor Theory*. New York, N.Y., Van Nostrand, 1970.
- / 8 / GOERTZEL, G. *Minimum Critical Mass and Flat Flux*. J. nucl. Energy, 2 : 193-201, 1956.
- / 9 / GOLDSCHMIDT, P. *Minimum Critical Mass in Intermediate Reactors Subject to Constraints on Power Density and Fuel Enrichment*. Nucl. Sci. Engng, 49 : 263, 1973.
- / 10 / GOLDSCHMIDT, P. *Optimal Fuel Enrichment Distribution in Fast Reactors*. Nucl. Sci. Engng, 50 : 153-63, 1973.
- / 11 / GOLDSCHMIDT, P. & QUENON, J. *Minimum Critical Mass in Fast Reactors with Bounded Power Density*. Nucl. Sci. Engng, 39 : 311-9, 1970.

- /12/ GREENE, N.M. & CRAVEN JR., C.W. *XSDRN a Discrete Ordinates Spectral Averaging Code*. Oak Ridge, Tenn. Oak Ridge National Lab., Jul. 1969. (ORNL-TM-2500).
- /13/ HOFMANN, P.L. & HURWITZ JR., H. *Application of Minimum Loading Conditions to Enriched Lattices*. Nucl. Sci. Engng, 2 : 461-8, 1957.
- /14/ KOCHUROV, B.P. *Masse Critique Minirale pour une Concentration Limite d'Uranium*. Energie atom, 20(3) : 68-76, 1966.
- /15/ LAMARSH, J.R. *Introduction to Nuclear Reactor Theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
- /16/ OTSUKA, M. *Fuel Importance Function and Minimum Critical Mass*. Nucl. Sci. Engng, 18 : 514-7, 1964.
- /17/ PONTRYAGIN, L.S.; BOLTYANSKII, V.G.; GAMKRELIDZE, R.V.; MISHCHENKO, E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Oxford, Pergamon, 1964.
- /18/ ROBBINS, H.M. *A Generalized Legendre Clebesh Condition for the Singular Cases of Optimal Control*. IBM JL Res. Dev., 11 : 361-72, 1967.
- /19/ ROBERTS, J.J. & SMITH JR., H.P. *Time Optimal Solution to the Reactivity. Xenon Shutdown Problem*. Nucl. Sci. Engng, 22 : 470-8, 1965.
- /20/ SANTOS, N.W. dos. *Cálculo da Distribuição Ótima de Combustível que Maximiza a Retirada de Potência de um Reator*. São Paulo, 1967. (Dissertação de Mestrado).
- /21/ SHAPIRO, M.M. *Minimum Critical Mass Invariable Density and Epithernal Reactors*. Nucl. Sci. Engng, 10 : 159-62, 1961.
- /22/ STACEY JR., W.M. *Optimal Control of Xenon Power Spatial Transients*. Nucl. Sci. Engng, 33 : 162-8, 1968.
- /23/ STACEY JR., W.M. *Control of Xenon Spatial Oscillations*. Nucl. Sci. Engng, 38 : 229-43, 1969.

- /24/ TSOURI, N.; ROOTENBERG, J.; LIDOFISKY, L.J. *Optimal Control of a Large Core Reactor in Presence of Xenon.* IEEE Trans. Nucl. Sci., 22 : 702-10, Feb. 1975.
- /25/ ZARITSKAYA, T.S. & RUDIK, A.P. *Maximum Power from a Gas Cooled Reactor.* Sov. At. Energy, 23(3) : 940-4, Sept. 1967.