

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES

**SECRETARIA DA INDÚSTRIA, COMÉRCIO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**ESTUDO E APLICAÇÃO DE CÓDIGOS NUCLEARES DISPONÍVEIS NO IPEN
EM PROBLEMAS DE FÍSICA DE REATORES DEPENDENTES DO TEMPO**

Mitsuo Yamaguchi

Disertação apresentada ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares como parte dos requisitos para obtenção do grau de "Mestre - Área de Reatores Nucleares de Potência e Tecnologia do Combustível Nuclear"

Orientador: Dr. Yuji Ishiguro



Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Desejo aqui expressar meus agradecimentos ao Prof. Dr. Yuji Ishiguro pela orientação deste trabalho, aos colegas do Centro de Engenharia Nuclear pelo apoio prestado, ao pessoal do Centro de Processamento de Dados pelo auxílio no trabalho computacional e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a execução deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, visando o conhecimento e sua aplicação, dois códigos dependentes do tempo são estudados: um de cinética, GAPOTKIN, e outro de depleção, CITATION. Inicialmente algumas considerações teóricas são feitas. Problemas dependentes do tempo são discutidos, sob o ponto de vista da cinética de reatores e da depleção do combustível. As técnicas numéricas usadas pelos códigos também são apresentadas. Como aplicação, alguns problemas de cinética pontual, um de teoria de difusão estático e outro de depleção foram solucionados com os códigos, e os resultados comparados com os obtidos com outros códigos.

**STUDY OF REACTOR ANALYSIS CODES AVAILABLE
AT IPEN AND THEIR APPLICATION TO TIME
DEPENDENT PROBLEMS**

ABSTRACT

Two computer codes available at IPEN are studied and applied to analyze time-dependent problems of nuclear reactors. The GAPOTKIN code can be used to analyze short-term transient behaviours and the CITATION code is applicable to long-term burnup analysis. Basic theories and numerical techniques used in the codes are studied and summarized. Several standard problems are solved. Comparisons of the obtained and published solutions show that both codes can be used with confidence in the analysis of nuclear reactors.

Í N D I C E

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Problemas de Física de Reatores Dependentes do Tempo	4
1.2. Objetivo do Trabalho	6
1.3. Códigos de Computação GAPOTKIN e CITATION	6
2. CINÉTICA DO REATOR NUCLEAR	8
2.1. Considerações Gerais	8
2.2. Equações de Cinética Pontual	13
2.3. Método Numérico utilizado pelo Código GAPOTKIN.	17
3. DEPLEÇÃO DO COMBUSTÍVEL	27
3.1. Introdução	27
3.2. Equações Básicas de Depleção	28
3.3. Produtos de Fissão	38
3.4. Procedimento Numérico utilizado pelo Código CITATION para Solução das Equações da Cadeia de Nuclídeos	39
4. APLICAÇÃO	44
4.1. Código GAPOTKIN	44
4.2. Código CITATION	48
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	76
 APÊNDICES	
A - Definição de um Problema Padrão Computacional ..	77
B - Estabilidade do Método utilizado pelo Código GAPOTKIN	79
C = Cartões de Controle para Operação dos Códigos...	83
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 85

1. INTRODUÇÃO

Denomina-se código nuclear a um programa de computação que utiliza métodos numéricos para solucionar problemas de interesse da Engenharia Nuclear, com o intuito de fornecer resultados numéricos usados nos projetos de reatores de potência, análises de segurança de centrais nucleares ou na administração do combustível nuclear.

A Engenharia Nuclear primordial não teve o auxílio dos computadores digitais, tendo sido os primeiros projetos de reatores nucleares, executados manualmente. Um projeto de um sistema nuclear real não pode ser executado através de soluções analíticas, devido a sua complexidade, necessitando recorrer às soluções numéricas. A execução de um projeto na época era uma tarefa extremamente árdua e demorada.

Com o aparecimento dos computadores digitais, esta tarefa se tornou mais amena, as técnicas numéricas foram desempenhadas e melhoradas e o intercâmbio tecnológico entre as partes interessadas possibilitou o surgimento dos códigos nucleares.

Os seguintes fatores motivaram o desenvolvimento dos códigos:

- a necessidade competitiva para executar projetos que fossem economicamente atrativos;
- necessidade de segurança e confiabilidade dos sistemas nucleares;
- problemas de projetos propostos por novos tipos de reatores;
- administração do combustível nuclear;

- disponibilidade limitada de protótipos exper
imentais; e
- vantagem de se usar dados nucleares mais com
pletos provenientes de aproximações teóricas melhoradas.

Atualmente, os códigos são ferramentas importan-
tíssimas da Engenharia Nuclear, sem as quais, seria impossível
sua existência.

Devido à grande quantidade e variedade de fato
res e parâmetros que envolvem um projeto de reator, os códigos
foram desenvolvidos para solucionar vários tipos de pro
blemas, podendo ser classificados de acordo com a variável de
maior interesse (energia, tempo, espaço, etc.), ou de acordo
com a função específica para a qual foram desenvolvidos. Assim,
considerando apenas o aspecto neutrônico do reator, tem-se:

(i) Códigos de processamento de biblioteca de
secções de choque. O mais completo arquivo de dados nucleares
que existe atualmente é o ENDF/B, que contém dados para aproxi-
madamente 80 isótopos de todas as reações significantes induzi-
das por nêutron, no intervalo de energia de 10^{-5} eV a 20 MeV. Os
códigos de processamento selecionam os dados de secções de
choque de interesse e os preparam em uma forma conveniente pa-
ra a entrada dos códigos de projeto de reatores. (Ex.: XIACS ,
AMPX1, MC²).

(ii) Códigos para geração de constantes nucleares.
Os parâmetros básicos de interesse tais como secções de choque,
parâmetros de ressonância, coeficientes de difusão e fator de
utilização térmica são gerados de uma forma adequada (usualmen-
te em multigrupos) a fim de serem usados nos códigos de proje

to. (Ex.: HAMMER, THERMOS, LEOPARD).

(iii) Códigos para cálculos estáticos. São usados para obter a distribuição espacial do fluxo de neutrons no caraço do reator. Isto é requerido para predições de carga de combustível, distribuição de potência, distribuição de temperatura, reatividade de excesso, exigências de blindagem, etc. Usualmente tais códigos são usados para determinar o fator de multiplicação e a distribuição do fluxo, onde a teoria de difusão é suficiente para estes cálculos. Determinações de parâmetros que requerem mais precisão são feitas usando a teoria de transporte (Ex.: CITATION, EXTERMINATOR, ANISN, DOT).

(iv) Códigos dependentes do tempo. Estes códigos tratam explicitamente da dependência no tempo do caraço do reator. Basicamente dois tipos de códigos englobam este tratamento: códigos de depleção, que tratam da queima do material físsil, conversão do material fértil em físsil, formação dos produtos de fissão, e os códigos de cinética, que tratam do transiente do sistema. (Ex.: CITATION, BURNER, GAPOTKIN).

Além da neutrônica existem ainda os códigos termo-hidráulicos, que tratam da transferência de calor em um sistema nuclear (ex.: BLOOST-6, COBRA), e os códigos de custo de combustível, que tratam da análise econômica do ciclo de combustível nuclear (ex.: GACOST, PWCOST).

O interesse principal deste trabalho é tratar de códigos que envolvem problemas de física de reatores dependentes do tempo.

1.1. Problemas de Física de Reactores Dependentes do Tempo

Predições da resposta do transiente de um sistema nuclear devido à introdução de reatividade* constituem um fator muito importante na estabilidade e controle do reator, bem como a introdução de reatividade no sistema devido à queima do combustível no projeto. Essa introdução de reatividade no reator pode ocorrer devido a vários fenômenos:

(a) Movimento das barras de controle. As barras de controle são fortes absorvedores de neutrons, os quais mudando as propriedades de absorção do reator, alteram o seu fator de multiplicação e, conseqüentemente introduzem reatividade no sistema.

(b) Queima de combustível. O material físsil é consumido em um reator em operação a uma taxa proporcional à potência do sistema. Assim, a quantidade de combustível decresce com o tempo e isso naturalmente tem um efeito no fator de multiplicação.

(c) Produção de isótopos. Um grande número de isótopos é formado na fissão. Certos isótopos são fortes absorvedores de neutrons e podem substancialmente aumentar a secção de choque de absorção do reator. A conversão do material fér

*Em se tratando da variação do fator de multiplicação k de um sistema, é mais conveniente definir uma outra grandeza denominada reatividade, dada por $\rho = \Delta k/k$ que mede essencialmente o desvio fracional da multiplicação do sistema.

til em fssil e a formação de outros isótopos pesados também afetam o fator de multiplicação.

(d) Mudanças na temperatura. O fator de multiplicação do reator é um parâmetro dependente da temperatura, que por sua vez é uma função da potência de operação. Variações no nível de potência alteram a criticalidade do sistema.

(e) Acidente. Eventos imprevistos podem repentinamente alterar as propriedades e a criticalidade do reator.

(f) Mudanças de estado. A formação de vapor, mudanças na temperatura do refrigerante e do combustível, que caracterizam mudanças de estado, também são fatores que alteram a criticalidade do sistema.

(g) Ruidos. Os ruidos são flutuações locais do fluxo de neutrons inerentes ao sistema e conseqüentemente introduzem reatividade ao reator.

O objetivo principal do estudo dos problemas dependentes do tempo é determinar o comportamento subsequente da população de neutrons, e propriedades do reator depois da introdução de reatividade por qualquer um dos fatores acima citados.

Pode-se grosseiramente distinguir entre dois tipos diferentes de análise dependente do tempo que caracterizam mudanças na população de neutrons. Uma é de interesse para mudanças que ocorrem em intervalos de tempo muito curtos, da ordem de frações de segundos a alguns minutos, sendo este estudo tratado pela cinética ou dinâmica do reator, onde a presença dos neutrons atrasados é de fundamental importância no controle do reator.

A segunda trata de mudanças na composição do cargo do reator devido à queima do combustível e formação de isótopos, que comumente ocorrem em períodos de dias a meses. Este comportamento é usualmente chamado de depleção. Os cálculos das concentrações isotópicas na análise de depleção é um aspecto importante para encontrar um arranjo de carga de material físsil e fértil que mantém a estabilidade do reator a uma densidade de potência constante. Nesta análise, embora os neutrons atrasados sejam um fator importante na sensibilidade do reator a mudanças da reatividade, não são de fundamental importância como em cinética. Obviamente, as análises requeridas para cada tipo de comportamento no tempo são completamente diferentes.

1.2. Objetivo do Trabalho

O Centro de Processamento de Dados do IPEN possui vários códigos nucleares, alguns dos quais nunca estiveram em operação. O objetivo deste trabalho é estudar dois códigos dependentes do tempo existentes no IPEN, um de cinética e outro de depleção, com o propósito de torná-los operacionais e facilitar o seu uso a outros estudantes e pesquisadores. Basicamente o trabalho está dividido em duas partes: estudo da teoria relacionada aos códigos e aplicação dos mesmos em problemas padrões (apêndice A), comparando os resultados obtidos com soluções apresentadas pelos problemas.

1.3. Códigos de Computação GAPOTKIN E CITATION

Para o propósito deste trabalho, foram escolhidos dois códigos disponíveis no CPD do IPEN:

- GAPOTKIN

O GAPOTKIN foi desenvolvido por K.F.Hansen e P.K.Koch em Argonne National Laboratory em outubro de 1967 e escrito em Fortran IV para o computador UNIVAC 1108. É um código que resolve as equações de cinética pontual, para uma forma geral da reatividade introduzida, especificamente em termos de funções constante, linear e quadrática do tempo e de coeficientes de reatividade de temperatura. Permite também incluir fontes externas constante e dependente do tempo. O método numérico permite rápida operação do código e simula eventos que introduzem reatividade como: perda de refrigerante, queda de uma barra de controle e efeitos de realimentação devido à variação da temperatura.

- CITATION

O CITATION foi desenvolvido por T.B.Fowler, D. R.Vondy e G.W. Cunningham em Oak Ridge National Laboratory em julho de 1969, sofrendo uma segunda revisão, em julho de 1971, e com acréscimo dos suplemento 1 em outubro de 1971, suplemento 2 em março de 1972 e suplemento 3 em julho de 1972.

O código foi escrito para resolver problemas de teoria de difusão em multigrupos por diferenças finitas. O código pode solucionar problemas em até três dimensões com geometrias x-y-z, r- θ -z, hexagonal-z e triangular-z. Podem ser tratados também problemas de perturbação e de depleção de combustível com ou sem análise de recarga de combustível em múltiplos ciclos. Arquivos de seções de choque microscópicas podem ser criados por dados fornecidos em cartões ou gerados por códigos apropriados.

2. CINÉTICA DO REATOR NUCLEAR

2.1. Considerações Gerais

Para um reator nuclear operar a um nível de potência constante, a taxa de produção de neutrons através de reações de fissão deve ser igual à taxa de perda de neutrons através de absorção e fugas. Qualquer desvio desta condição de balanço resultará numa dependência temporal da população de neutrons e conseqüentemente do nível de potência do reator. Isto pode ocorrer devido a um número de razões, por exemplo, poderia se desejar mudar o nível de potência do reator alterando temporariamente o fator de multiplicação do reator através do ajuste de barras de controle. Mudanças mais drásticas poderiam ser causadas por situações de acidentes imprevistos, tais como falha numa bomba do refrigerante, obstrução de um canal de refrigerante, ou uma queda acidental de uma barra de controle,

É de fundamental importância, do ponto de vista de segurança que se possa prever o comportamento no tempo da população de neutrons no caroço de um reator induzido por mudanças no fator de multiplicação, isto é, a cinética do reator nuclear. Entretanto o fator de multiplicação nunca está completamente sob o controle do operador; desde que sendo função da composição do caroço, dependerá também de outras variáveis não diretamente acessíveis no controle, tais como a temperatura do reator, que por sua vez depende do nível de potência do reator e, assim, do fluxo de neutrons. O estudo da dependência no tempo da população de neutrons e dos fatores que são responsáveis por essa dependência, o nível de potência do reator, por exem

pio, é conhecido como dinâmica do reator nuclear, e usualmente requer uma modelação detalhada do sistema nuclear completo.

O interesse principal da cinética de reatores é a predição do comportamento no tempo da população de neutrons no reator para uma dada mudança no fator de multiplicação. Dois parâmetros que definem este comportamento são a fração de neutrons atrasados e o tempo de geração de neutrons.

Num reator homogêneo infinito sem considerar a existência de neutrons atrasados, λ_p é definido como sendo o tempo de vida de um neutron pronto, isto é, tempo médio medido a partir da sua emissão na fissão até a sua absorção em algum lugar do reator⁽¹⁶⁾. Num reator térmico infinito, λ_p é igual a soma do tempo de moderação t_s e do tempo de difusão t_d , ou seja, $\lambda_p = t_s + t_d$. Desde que $t_s \ll t_d$, $\lambda_p = t_d$. Em reatores intermediários e rápidos $\lambda_p \ll t_s$ devido ao fato de que os neutrons não termalizam nestes sistemas. Desde que a absorção de um neutron pronto inicia uma nova geração de neutrons de fissão, λ_p é igual ao tempo médio entre sucessivas gerações de neutrons numa reação em cadeia, também chamado de tempo médio de geração.

A absorção de um neutron num reator infinito leva, em média, à absorção de k_{∞} neutrons na próxima geração, isto é, λ_p segundos depois. O comportamento no tempo da população de neutrons que nascem de fissões por cm^3 por segundo no tempo t em algum ponto do sistema é dado por

$$N(t) = N(0) \exp\left(\frac{k_{\infty} - 1}{\lambda_p} t\right) = N(0) \exp\left(\frac{t}{T}\right), \quad (2.1)$$

onde

$$T = \frac{\lambda p}{k_{\infty} - 1} = \text{período do reator.}$$

Com a introdução de reatividade através de, por exemplo, movimento de uma barra de controle, este período se torna muito curto sem a presença dos neutrons atrasados. Nos reatores térmicos infinitos, o tempo de vida do neutron pronto é da ordem de 10^{-4} segundos, e uma variação de, por exemplo, 0,1% em k_{∞} , fornece um período de 0,1 segundos, ou seja, em 1 segundo a potência seria acrescida de um fator de e^{10} .

Com a presença de neutrons atrasados, este período aumenta consideravelmente e o reator pode ser controlado mais facilmente. Incluindo os neutrons atrasados, o tempo de geração dos neutrons é igual a soma do tempo de vida dos neutrons prontos e dos atrasados, ponderados pelas suas respectivas produções. Seja β_i a fração de neutrons que aparecem no i -ésimo grupo. A fração total dos neutrons atrasados é

$$\beta = \sum_{i=1}^G \beta_i,$$

onde G é o número de grupos de precursores de neutrons atrasados.

Se λ_p é o tempo de vida dos neutrons prontos e λ_i é o tempo médio de vida dos neutrons atrasados do i -ésimo grupo medido desde o instante da fissão até o tempo em que o neutron é finalmente absorvido, o tempo médio de vida de todos os neutrons, prontos e atrasados, é dado por

$$t = (1-\beta) t_p + \sum_{i=1}^G \beta_i t_i. \quad (2.2)$$

Os neutrons atrasados moderam-se e são captura dos num tempo que é curto comparado com o tempo médio de vida de seus precursores, isto é, $t_s + t_d \ll \bar{t}_i$, onde \bar{t}_i é a vida média dos precursores do i -ésimo grupo atrasado. Assim, desde que um neutron atrasado é emitido com o decaimento de cada precursor, segue-se que \bar{t}_i é também igual à vida média de um neutron do i -ésimo grupo, isto é, $\bar{t}_i = t_i$. Então

$$t = (1-\beta) t_p + \sum_{i=1}^G \beta_i \bar{t}_i. \quad (2.3)$$

Para todos os nuclídeos físscis, $\beta \ll 1$, portanto,

$$t \approx t_p + \sum_{i=1}^G \beta_i \bar{t}_i. \quad (2.4)$$

Para o U-235, $\sum \beta_i \bar{t}_i$ é igual a 0,05868, sendo $t_p = 10^{-4}$ segundos, $t = 10^{-4} + 0,05868 = 0,05878$. Com a variação de 0,1% em k , $T \approx 58,78$ segundos, ou seja, seriam necessários 58,78 segundos para a potência ser acrescida de um fator de e, um tempo suficiente para se controlar o reator.

É preciso notar que esta análise é válida somente enquanto o reator opera num estado subcrítico pronto, ou seja, $(1-\beta)k < 1$. Quando atingir a condição crítica pronta, isto é, quando a reatividade for maior ou igual a β , os neutrons atrasados não exercem mais nenhum papel no controle do reator, e

o fluxo cresce com período muito curto determinado somente pe
los neutrons prontos.

Mas o efeito preciso dos neutrons atrasados na
resposta de um reator para uma mudança no fator de multiplica-
ção não pode ser encontrada simplesmente substituindo o tempo
médio de geração na ausência de neutrons atrasados por uma ex-
pressão mais apropriada dada pela equação (2.4). É necessário
considerar em detalhes a produção e o subsequente decaimento
dos precursores de neutrons atrasados no reator.

Para reatores finitos, o comportamento no tempo
da população de neutrons e das concentrações dos precursores
difere dos reatores infinitos porque são dependentes tanto do
tempo como do espaço. Mas, medições precisas podem ser obtidas
utilizando o modelo de cinética pontual, onde a variável espa-
cial (e outros, com exceção do tempo, se houver) foi elimina-
da através de técnicas matemáticas. Obviamente, os parâmetros
envolvidos no modelo devem ser parâmetros médios efetivos no
volume do reator e energia dos neutrons. Este nome é de certa
forma errônea, uma vez que o modelo realmente não trata o rea-
tor como um ponto.

Os fatores que são responsáveis pela dependência
no tempo da população de neutrons na dinâmica do reator são
chamados mecanismos de realimentação. Variações no nível de po-
tência afetam a temperatura e conseqüentemente alteram a criti-
calidade. As mudanças na reatividade com a temperatura são
descritas pelo coeficiente de temperatura de reatividade, dado
por

$$\alpha_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad (2.5)$$

onde ρ = reatividade;

T = temperatura.

Este coeficiente pode ser obtido através de um estudo detalhado da distribuição de temperatura em todo o reator.

2.2. Equações de Cinética Pontual

A equação de transporte de Boltzmann dependente do tempo é a expressão matemática da taxa de variação temporal da densidade angular de neutrons $n(\underline{r}, \underline{v}, t)$ no espaço de fase $(\underline{r}, \underline{v})$ sendo escrita como⁽¹³⁾:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\underline{r}, \underline{v}, t)}{\partial t} = & -\frac{v}{v} v \phi(\underline{r}, \underline{v}, t) \\ & - \Sigma_t(\underline{r}, v) \phi(\underline{r}, \underline{v}, t) \\ & + \int \Sigma_s(\underline{r}, \underline{v}' \rightarrow \underline{v}, t) \phi(\underline{r}, \underline{v}', t) d\underline{v}' \\ & + \int (1-\beta) \chi(v) v \Sigma_f(\underline{r}, \underline{v}') \phi(\underline{r}, \underline{v}', t) d\underline{v}' \\ & + \sum_i \lambda_i C_i(\underline{r}, t) \chi_i(v) \\ & + S(\underline{r}, \underline{v}, t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$\phi(\underline{r}, \underline{v}, t)$ é o fluxo angular de neutrons;

$\Sigma_t(\underline{r}, v)$ é a secção de choque macroscópica total de interação;

$\int \Sigma_s(\underline{r}, \underline{v}' \rightarrow \underline{v}, t)$ é a secção de choque diferencial macroscópica de transferência, a qual fornece a proba

bilidade por unidade de ângulo sólido, energia e volume que um neutron com velocidade v' ao sofrer espalhamento adquire velocidade v ;

$(1-\beta) v$ é o número médio de neutrons prontos de fissão;

$\Sigma_f(\underline{r}, v)$ é a secção de choque macroscópica de fissão;

$C_i(\underline{r}, t)$ e λ_i são a concentração de precursor e constante de decaimento do i -ésimo grupo de neutrons atrasados respectivamente;

$\chi(v)$ e $\chi_i(v)$ são os espectros de energia dos neutrons prontos e dos atrasados do i -ésimo grupo respectivamente;

$S(\underline{r}, v, t)$ são quaisquer fontes externas de neutrons presentes no sistema.

O primeiro termo do lado direito da equação representa a perda líquida de neutrons (no ponto \underline{r} , com velocidade v e tempo t) devido a fuga de neutrons; o segundo termo representa a perda de neutrons por interação (fissão, captura, etc.); o terceiro representa o ganho líquido de neutrons devido ao espalhamento de partículas com velocidade v' para v no tempo t ; o quarto a contribuição dos neutrons prontos provenientes de fissão; o quinto a contribuição dos neutrons atrasados provenientes do decaimento dos precursores; e o sexto a contribuição das fontes externas.

Os precursores de neutrons atrasados (em um reator de combustível estacionário) satisfazem a equação

$$\frac{\partial C_i(\underline{r}, t)}{\partial t} = \beta_i \int v \Sigma_f(\underline{r}, v') \phi(\underline{r}, v', t) dv' - \lambda_i C_i(\underline{r}, t). \quad (2.6)$$

onde β_i é a fração de neutrons atrasados do i -ésimo grupo.

O primeiro termo do lado direito representa a contribuição do precursor do i -ésimo grupo proveniente de fissão, e o segundo termo representa a perda por decaimento deste mesmo precursor.

O tempo de vida dos neutrons num reator é muito curto (da ordem de 10^{-4} segundos para reatores térmicos), e sofrendo várias colisões, percorrem uma grande distância num pequeno intervalo de tempo antes de serem absorvidos⁽¹²⁾. Assim, os efeitos das perturbações locais em $\phi(\underline{r}, \underline{v}, t)$ serão rapidamente espalhados através de todo o reator. A consequência imediata da perturbação num ponto do reator (por exemplo, mudando levemente a posição de uma barra de controle) é então um reajustamento na forma do fluxo. Este reajustamento é realizado em um curto intervalo de tempo; depois disso a forma reajustada cresce ou decresce como um todo, dependendo se a perturbação inicial aumentou ou diminuiu o fator de multiplicação. Para reatores em que os transientes são deste tipo, a mudança no nível do fluxo é suficiente para permitir uma predição muito precisa das consequências da perturbação. Assim ao invés de resolver em detalhes as equações (2.5) e (2.6), é mais vantajoso encontrar um conjunto de equações que especificam como a magnitude do fluxo varia com o tempo. O modelo de cinética pontual foi derivado justamente para este propósito.

A derivação das equações de cinética pontual pode ser feita assumindo que o fluxo não tem dependência angular (teoria de difusão) e integrando $\phi(\underline{r}, E, t)$ em todas as energias e em todo o volume. Estas equações são:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^G \lambda_i C_i(t) + S(t) \quad (2.7)$$

e

$$\frac{d C_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i=1, \dots, G. \quad (2.8)$$

onde:

$n(t)$ = densidade de neutrons ;

$C_i(t)$ = concentração do precursor do i -ésimo grupo de precursores de neutrons atrasados ;

$\rho(t)$ = reatividade ;

β_i = fração de neutrons atrasados do i -ésimo grupo ;

$\beta = \sum_i \beta_i$ = fração total dos neutrons atrasados ;

Λ = tempo de geração dos neutrons prontos ;

λ_i = constante de decaimento do i -ésimo grupo ;

$Q(t)$ = fontes externas .

Soluções analíticas das equações de cinética podem ser obtidas facilmente quando a reatividade for uma função conhecida e definida do tempo. Quando efeitos de realimentação estão presentes, as soluções analíticas se tornam extremamente difíceis, por isso é mais vantajoso a solução através de técnicas numéricas.

2.3. Método Numérico utilizado pelo Código GAIOTKIN

O método foi desenvolvido por K.F. Hansen, B.V. Koen e W.W. Little, Jr. ⁽¹¹⁾, e é um método numérico incondicionalmente estável.

O método consiste na solução numérica das equações de cinética pontual descritas anteriormente, e em resumo é descrito abaixo.

Define-se o vetor coluna $\underline{\psi}(t)$ de dimensão $G+1$ como

$$\underline{\psi}(t) = \begin{pmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_G(t) \end{pmatrix}.$$

Define-se também a matriz $\underline{A}(t)$ de dimensão $G + 1$ por $G + 1$:

$$\underline{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \dots & \lambda_G \\ \frac{B_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B_G}{\Lambda} & 0 & \dots & -\lambda_G \end{pmatrix}.$$

As equações (2.7) e (2.8) podem então ser escritas na forma (sem fontes externas)

$$\frac{d \underline{\psi} (t)}{dt} = \underline{\Lambda} (t) \underline{\psi} (t), \quad (2.9)$$

onde, usando-se a discretização da variável tempo em intervalos $h = t_{j+1} - t_j$, define-se $\underline{\psi} (t_j) = \underline{\psi}_j$.

Inicialmente considerar-se-á o caso de reatividade de constante. Fatorando-se a matriz $\underline{\Lambda}$ em

$$\underline{\Lambda} = \underline{L} + \underline{D} + \underline{U},$$

onde

\underline{L} = matriz triangular inferior;

\underline{D} = matriz diagonal;

\underline{U} = matriz triangular superior.

a equação (2.9) pode ser escrita como

$$\frac{d \underline{\psi}}{dt} - \underline{D} \underline{\psi} = (\underline{L} + \underline{U}) \underline{\psi}. \quad (2.10)$$

A solução numérica da equação (2.10) pode ser escrita como

$$\underline{\psi}_{j+1} = \exp(\underline{D}h) \underline{\psi}_j + \int_0^h d\tau \exp \left[\underline{D}(h-\tau) \right] (\underline{L} + \underline{U}) \underline{\psi}(t_j + \tau). \quad (2.11)$$

O comportamento temporal da densidade dos neutrons e dos precursores são assumidos serem exponenciais, ou seja, proporcionais a $\exp(\omega t)$, onde ω é um parâmetro a ser determinado. Com esta consideração, para um dado valor da rea

tividade, obtêm-se das equações (2.7) e (2.8) a equação da reatividade (1)

$$\rho = \omega \Lambda + \sum_{j=1}^G \frac{\theta_j \omega}{\omega + \lambda_j} . \quad (2.12)$$

Esta equação tem $G + 1$ raízes ω_n , também denominadas de autovalores de $\underline{\Lambda}$, sendo estas reais e G delas negativas e menores do que $-\lambda_1$, independente do sinal e magnitude da reatividade. A outra raiz, denotada por ω_0 , é algebricamente a maior de todas as raízes, e tem o mesmo sinal da reatividade. Dado que as exponenciais contendo as G raízes negativas desaparecem com o tempo, o comportamento temporal das densidades é determinado pelo modo fundamental (ω_0), chamado comportamento assintótico. Desta forma, pode-se escrever:

$$\underline{\psi} (t_j + \xi) = e^{\omega_0 \xi} \underline{\psi}_j , \quad (2.13)$$

e portanto a equação (2.11) pode ser escrita como

$$\underline{\psi}_{j+1} = \left[\exp(\underline{D}h) + (\omega_0 \underline{I} - \underline{D})^{-1} \left\{ \exp(\omega_0 h \underline{I}) - \exp(\underline{D}h) \right\} (\underline{L} + \underline{U}) \right] \underline{\psi}_j , \quad (2.14)$$

ou

$$\underline{\psi}_{j+1} = \underline{G} \underline{\psi}_j , \quad (2.15)$$

onde a matriz \underline{G} é definida por:

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 e^{-ckh} \\
 \frac{e^{\omega_0 h} - e^{-ckh}}{\omega_0 + ck} \lambda_1 \dots \frac{e^{\omega_0 h} - e^{-ckh}}{\omega_0 + ck} \lambda_G \\
 \frac{e^{\omega_0 h} - e^{-\lambda_1 h}}{\omega_0 + \lambda_1} \frac{\beta_1}{\Lambda} \quad e^{-\lambda_1 h} \quad \dots \quad 0 \\
 \frac{e^{\omega_0 h} - e^{-\lambda_G h}}{\omega_0 + \lambda_G} \frac{\beta_G}{\Lambda} \quad 0 \quad \dots \quad e^{-\lambda_G h}
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

onde $ck = - \frac{\rho - \beta}{\Lambda}$;

Em casos em que a reatividade é uma função do tempo, a equação (2.11) torna-se

$$\psi_{j+1} = \exp \left[\int_0^h d\epsilon \underline{D}(\epsilon) \right] \psi_j \tag{2.16}$$

$$+ \int_0^h d\epsilon \exp \left[\underline{D}(\epsilon)(h-\epsilon) \right] (\underline{L} + \underline{U}) \psi(t_j + \epsilon) .$$

O método assume que o intervalo de tempo h é suficientemente pequeno, de modo que $\rho_{j+1} - \rho_j$ seja pequeno.

Assim, tem-se

$$\psi(t_j + \xi) = e^{\bar{\omega}_0 \xi} \psi_j. \quad (2.17)$$

onde $\bar{\omega}_0$ é o valor médio de $\omega_0(n_j)$ e $\omega_0(n_{j+1})$.

A equação matricial resultante pode ser escrita como

$$\psi_{j+1} = \underline{G}(t_j) \psi_j. \quad (2.18)$$

As matrizes \underline{G} da equação (2.15) e $\underline{G}(t_j)$ da equação (2.18) são matrizes não-negativas, irredutíveis e primitivas (apêndice B).

Para controlar o tamanho do intervalo de tempo h são usados dois parâmetros de controle diferentes. O primeiro parâmetro ($\Delta 1$) é usado para manter a variação do comportamento exponencial pequena. Assim, para um dado valor de ω_0 , as quantidades

$$x_j = \left| \frac{n_{j+1}}{n_j} - e^{\omega_0 h} \right|$$

e

$$y_j = \left| \frac{C_{i, j+1}}{C_{i, j}} - e^{\omega_0 h} \right|$$

são calculadas, e exige-se que

$$\begin{aligned} x_j &\leq \Delta 1 \\ y_j &\leq \Delta 1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Durante o transiente, enquanto a solução não for uma exponencial pura, as condições dadas pelas condições (2.19) limitam o tamanho do passo.

O segundo parâmetro de controle ($\Delta 2$) serve para um propósito similar. Conforme x_j e y_j tornam-se menores, o tamanho do passo aumenta de acordo com a regra:

$$h = \min \left(\frac{\Delta 2}{x_j}, \frac{\Delta 2}{y_j} \right). \tag{2.20}$$

Desta forma, h é determinado da condição (2.19) ou (2.20), além de usar também um passo mínimo e máximo.

A equação (2.9) não inclui fontes externas, entretanto no caso de fontes externas estarem presentes, a equação (2.9) torna-se⁽¹⁰⁾

$$\frac{d \underline{\psi}(t)}{dt} = \underline{A}(t) \underline{\psi}(t) + \underline{S}(t), \tag{2.21}$$

onde $\underline{S}(t)$ é um vetor coluna de dimensão $G + 1$, dado por

$$\underline{S}(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

c

$$S(t) = S_0 + S_1(t), \quad (2.22)$$

onde

S_0 = intensidade de fonte constante;

$S_1(t)$ = intensidade de fonte linear.

Numericamente o termo de fonte

$$D^{-1} (e^{-Dh} - 1) \underline{S}_j$$

deve ser incluído na equação (2.15) ou (2.18), onde no intervalo de tempo h , \underline{S}_j é calculada por

$$\underline{S}_j = \underline{S}_0 + \underline{S}_1 \left(t_j + \frac{h}{2} - t_0 \right), \quad (2.23)$$

onde t_0 é a condição inicial.

O autovalor ω_0 é calculado através da solução da equação

$$\det (\underline{A} - \omega \underline{I}) = 0, \quad (2.24)$$

quando a reatividade se encontra no intervalo -5β e 5β .

Para reatividades menores do que -5β , $\omega_0 = -\lambda_1$, e para maiores do que 5β , $\omega_0 = (\rho - \beta) / \Lambda$ (10).

A reatividade em qualquer instante de tempo é calculada como

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \rho_f n(t) + \rho_s \int_0^t n(t') dt', \quad (2.25)$$

onde

ρ_0 = coeficiente de reatividade constante;

ρ_1 = coeficiente de reatividade linear;

ρ_2 = coeficiente de reatividade quadrática;

ρ_f = coeficiente de reatividade de realimentação de potência;

ρ_s = coeficiente de reatividade de realimentação de energia.

Os três primeiros coeficientes são simplesmente meios de simulação dos efeitos de barras de controle, ou qualquer evento que possa ser simulado por coeficientes de reatividade destes tipos. O coeficiente de reatividade de realimentação de potência corresponde ao coeficiente de temperatura para um reator com taxa de remoção de calor proporcional à temperatura. O coeficiente de reatividade de realimentação de energia corresponde ao coeficiente de temperatura para um reator com taxa de remoção de calor uma constante independente da temperatura do reator.

A operação do reator é dividida em uma sequência de zonas de tempo. Para cada zona um conjunto de coeficientes de reatividade é usado. Os contornos das zonas são definidos por um dado intervalo de tempo, ou por uma dada densidade de neutrons. Após atingir o tempo ou a densidade de neutrons especificados para cada zona, iniciam-se novos cálculos com novos

coeficientes.

A reatividade $\tilde{\rho}$ assumida constante sobre um intervalo de tempo h e $\tilde{\rho}$ é calculada por

$$\rho(t_j \rightarrow t_{j+1}) = \rho_0 + \rho_1(t_j + \frac{h}{2} - t_0) + \rho_2(t_j + \frac{h}{2} - t_0)^2 + \rho_f(n_j - n_0) + \rho_s I, \quad (2.26)$$

onde t_0 e $n_0 = n(t_0)$ são as condições iniciais da zona de tempo, e a integral I é aproximada pela regra trapezoidal:

$$I = \sum_{j'=1}^j \left\{ \frac{h_{j'}}{2} [n_{j'} + n_{j'-1}] \right\} + h n_j. \quad (2.27)$$

A grandeza $n(t)$ $\tilde{\rho}$ é expressa como densidade de neutron, dada em neutrons/cm³. Ela pode ser expressa também como densidade de potência, MW/cm³, uma vez que as duas grande-zas são proporcionais. Neste caso, as concentrações dos precursores também devem ser expressas em MW/cm³, e as fontes externas em MW/seg.cm³. Para converter em densidades de potência, as grandezas acima são multiplicadas pelo fator

$$\alpha = \gamma \sum_f v, \quad (2.28)$$

onde

- γ = energia recuperável por fissão (MW.seg/fissão);
- \sum_f = secção de choque macroscópica de fissão (cm⁻¹);

v e velocidade dos neutrons (cm/seg);

As unidades dos coeficientes de reatividade de
vem estar de acordo. Assim, se $n(t)$ for expressa como densida
de de neutrons, ρ_f e expresso em cm^3 , e ρ_s em cm^3/seg . Se $n(t)$
for expressa como densidade de potência, ρ_f e expresso em
 cm^3/MW , e ρ_s em $\text{cm}^3/\text{MW}\cdot\text{seg}$.

3. DEPLEÇÃO DO COMBUSTÍVEL.

3.1. Introdução

Um outro aspecto dos problemas dependentes do tempo é o relativo às mudanças na composição isotópica do combustível que envolvem longos períodos de tempo, causadas pela exposição ao fluxo de neutrons sob várias condições de operação do reator. Essas mudanças, tanto temporais como espaciais alteram o período de vida do caroço de um reator, como também a estabilidade e o controle e, conseqüentemente, tais mudanças devem ser levadas em conta no projeto.

Durante a operação do reator, os nuclídeos fissíveis são consumidos e cerca de duas centenas de produtos de fissão são formados, alguns diretamente do processo de fissão e outros por decaimento radioativo. Alguns desses produtos de fissão possuem secções de choque de captura de neutrons relativamente altas e, conseqüentemente possuem uma influência significativa na economia de neutrons do sistema neutrônico. Além disso, a conversão de nuclídeos férteis para físséis tem um importante efeito no tempo de recarga do combustível e no controle do reator, que contribui com reatividade positiva para o reator.

Em adição, a captura radioativa de neutrons tanto por nuclídeos físséis como por férteis leva à formação de nuclídeos tais como urânio-236, urânio-237, netúnio-237, plutônio-240. Estes isótopos podem capturar neutrons ou sofrer

decaimento beta (ou ambos), de modo que vários novos isótopos pesados estão presentes no combustível após um período de operação do reator.

A queima do material físsil e a formação dos isótopos pesados e dos produtos de fissão, em particular os chamados venenos (devido a sua alta secção de choque de absorção) introduz reatividade negativa para o reator. Para compensar essa reatividade introduzida pela formação de isótopos, uma reatividade de excesso deve ser providenciada na carga inicial do combustível, sendo a criticalidade mantida por elementos de controle.

3.2. Equações Básicas de Depleção

Os núclídeos férteis, físséis, produtos de fissão e isótopos pesados podem ser tratados de um ponto de vista uniforme (os comportamentos espacial e temporal são funções definidas) num cálculo de depleção (3,8). Assim, seja $N_n(\underline{r}, t)$ o número de núcleos por unidade de volume (ou concentração) de algum núclídeo indicado por n . Então a taxa temporal de N_n pode ser escrita como

$$\frac{\partial N_n}{\partial t} = \text{taxa de formação} - \text{taxa de destruição} - \text{taxa de decaimento.} \quad (3.1)$$

Por simplicidade a formação e desaparecimento dos núclídeos são considerados apenas pelo processo de fissão, captura de neutron e decaimento radioativo. As várias taxas na equa

ção (3.1) podem então ser expressas da maneira que se segue abaixo.

Seja N_{n-1} a concentração de núclídeos que podem ser convertidos para o tipo n por captura de neutrón; isto significa dizer que se n denota um núclídeo com número de massa A e número atômico Z , então $n-1$ implica no núclídeo $(A-1, Z)$. Similarmente seja N_n , a concentração de núclídeos que produzem os núclídeos do tipo n por decaimento beta, isto é, com a composição $(A, Z-1)$; a constante de decaimento para esses núclídeos é representada por λ_n' . Finalmente, seja N_m a concentração de núclídeos físséis ou fissionáveis, e seja $\gamma_{mn}(E)$ a probabilidade de que um núclídeo do tipo n seja formado como um produto de fissão por absorção de um nêutron de energia E por um núclídeo do tipo m . Se o núclídeo do tipo n não for produto de fissão então γ_{mn} é zero.

Com as definições acima, a equação (3.1) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_n}{\partial t} = & \sum_m \bar{\gamma}_{mn} \bar{\sigma}_{fm} N_m \phi + \bar{\sigma}_{c,n-1} N_{n-1} \phi \\ & + \lambda_n' N_n - \bar{\sigma}_{an} N_n \phi - \lambda_n N_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde as quantidades com barra são valores médios que são definidos abaixo.

O primeiro termo do lado direito da equação (3.2) fornece a taxa de formação dos núclídeos do tipo n resultantes

de fissão dos núcleos do tipo m , isto é,

$$\bar{\gamma}_{mn} \bar{\sigma}_{fm} \phi = \int_0^{\infty} \gamma_{mn}(E) \sigma_{fm}(E) \phi(\underline{r}, E, t) dE, \quad (3.3)$$

onde $\sigma_{fm}(E)$ é a secção de choque microscópica de fissão do núcleo do tipo m para neutrons de energia E . Se $\phi(\underline{r}, t)$ é definido por

$$\phi(\underline{r}, t) = \int_0^{\infty} \phi(\underline{r}, E, t) dE, \quad (3.4)$$

então da equação (3.3) obtém-se

$$\bar{\gamma}_{mn} \bar{\sigma}_{fm} = \frac{\int_0^{\infty} \gamma_{mn}(E) \sigma_{fm}(E) \phi(\underline{r}, E, t) dE}{\phi(\underline{r}, t)}. \quad (3.5)$$

Esta quantidade pode ser calculada como uma função de \underline{r} e t , desde que o fluxo de neutrons, a secção de choque de fissão e a fração de produção a partir de fissão estejam disponíveis. Será independente do tempo se o espectro de energia do neutron não variar com o tempo.

O segundo termo da equação (3.2) representa a taxa de formação dos núcleos do tipo n por captura de neutron por núcleos do tipo $n-1$, assim

$$\bar{\sigma}_{c,n-1} \phi = \int_0^{\infty} \sigma_{c,n-1}(E) \phi(\underline{r}, E, t) dE, \quad (3.6)$$

onde $\sigma_{c,n-1}(E)$ é a secção de choque microscópica de captura radioativa dos nuclídeos do tipo $n-1$ para neutrons de energia E .

O terceiro termo da equação (3.2) é a taxa de formação dos nuclídeos do tipo n como resultado do decaimento radioativo dos nuclídeos do tipo n' .

O quarte termo é a taxa de destruição dos nuclídeos do tipo n por absorção, de modo que

$$\bar{\sigma}_{an} \phi = \int_0^{\infty} \sigma_{an}(E) \phi(\underline{r}, E, t) dE, \quad (3.7)$$

onde $\sigma_{an}(E)$ é a secção de choque microscópica de absorção dos nuclídeos do tipo n para neutrons de energia E .

Finalmente, o último termo é a taxa de decaimento radioativo dos nuclídeos do tipo n .

Normalmente as secções de choque estão disponíveis ou são geradas por técnicas de multigrupos de energia. Neste caso, existe um valor de fluxo de nêutrons para cada grupo, e as equações (3.3), (3.6) e (3.7) são substituídas por equações do tipo

$$\bar{\phi} = \sum_R \bar{\phi}_R \phi_R(\underline{r}, t), \quad (3.8)$$

onde g denota o grupo de energia.

Em geral a variável espacial é discretizada por técnicas de diferenças finitas, e em cada malha espacial do reator existirá uma equação do tipo da equação (3.2), para cada nuclídeo. Para diminuir o número de equações, uma simplificação é feita, calculando um valor médio para o fluxo em cada zona considerada do reator, ou seja,

$$\bar{\phi}_{g,z} = \frac{\sum_i \phi_{iz} V_i}{V_z}, \quad (3.9)$$

onde i se refere à malha e z à zona, e V_i e V_z são volumes.

As equações diferenciais resultantes estão todas acopladas através dos vários processos de formação e destruição.

As mudanças no nível e na forma do fluxo em um reator operando sob condição de potência constante são pequenas dentro de um intervalo de tempo (da ordem de meses), por isso não há necessidade de recorrer às equações de neutron dependentes do tempo⁽¹²⁾. Ao invés disso, um cálculo estático de criticidade pode ser feito, considerando em estado inicial a plena potência e a temperatura de operação. A forma e o nível do fluxo resultante deste cálculo podem ser assumidos e permanecerem constantes dentro de um intervalo de tempo chamado

passo de tempo de depleção. Assim, a forma do fluxo no início do passo de tempo é correta (dentro dos limites da teoria de difusão), mas desvia ligeiramente com o passar do tempo dos valores que seriam calculados se as equações de difusão dependentes do tempo fossem solucionadas em todo o intervalo de tempo. As mudanças nas concentrações dos materiais no reator, devido à depleção, são calculadas com este valor de fluxo, fixado em todo o intervalo. Uma nova forma do fluxo (e configuração crítica das barras de controle) baseada nestas mudanças é então determinada, sendo esta forma assumida a persistir durante o próximo passo de tempo.

Assim, o método convencional de analisar um reator durante o tempo de vida de depleção utiliza uma sequência de cálculos estáticos de criticalidade misturados com cálculos de depleção dependentes do tempo para determinar as concentrações em todo o reator de todos os isótopos afetados pelo processo de depleção. Este método de determinar as mudanças espaciais da forma do fluxo e as mudanças temporais das concentrações isotópicas proporciona uma aproximação muito boa para o verdadeiro comportamento no espaço-tempo durante a depleção.

Um completo tratamento da depleção do combustível exigiria o conhecimento dos parâmetros de todos os isótopos presentes no reator; entretanto isto não é possível, parcialmente devido a falta de dados que estes cálculos exigiriam, e também devido ao excessivo tempo que seria requerido para executar tais cálculos. Conseqüentemente, um número de simplificações são feitas; e mesmo embora os resultados não sejam altamente precisos, eles proporcionam predições muito úteis do comportamento do reator.

Alguns exemplos destas simplificações são mostradas abaixo.

Exemplo 1. A cadeia de nuclídeos originários do urânio-238 é mostrada na figura 3.1.

As equações de mudança das concentrações, de acordo com a equação (3.2) são

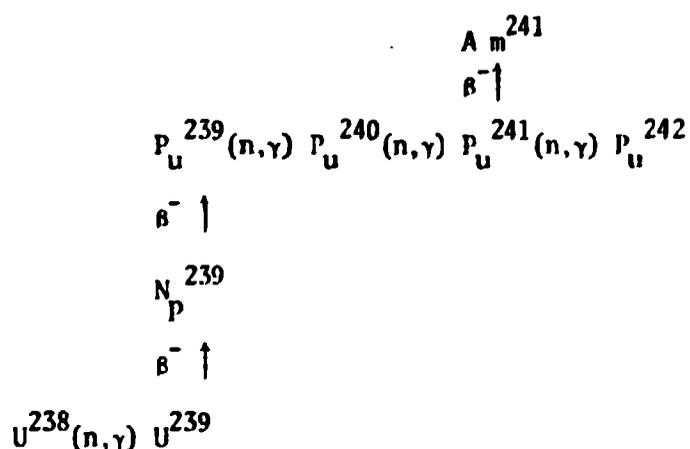


FIGURA 3.1 - Cadeia de nuclídeos originários do urânio-238.

$$\frac{d N_{28}^*}{dt} = - \bar{\sigma}_{a28} \phi N_{28} \quad (2.10)$$

$$\frac{d N_{29}}{dt} = \bar{\sigma}_{c28} \phi N_{28} - \lambda_{29} N_{29} \quad (3.11)$$

* o primeiro dígito do subscrito é o último dígito do número atômico do nuclídeo e o segundo dígito é o último dígito do número de massa.

$$\frac{dN_{39}}{dt} = \lambda_{29} N_{29} - \lambda_{39} N_{39} \quad (3.12)$$

$$\frac{dN_{49}}{dt} = \lambda_{39} N_{39} - \bar{\sigma}_{n49} \phi N_{49} \quad (3.13)$$

$$\frac{dN_{40}}{dt} = \bar{\sigma}_{c49} \phi N_{49} - \bar{\sigma}_{a40} \phi N_{40} \quad (3.14)$$

$$\frac{dN_{41}}{dt} = \bar{\sigma}_{c40} \phi N_{40} - (\bar{\sigma}_{a41} \phi + \lambda_{41}) N_{41} \quad (3.15)$$

$$\frac{dN_{42}}{dt} = \bar{\sigma}_{c41} \phi N_{41} - \bar{\sigma}_{a42} \phi N_{42} \quad (3.16)$$

$$\frac{dN_{51}}{dt} = \lambda_{41} N_{41} - \bar{\sigma}_{a51} \phi N_{51} \quad (3.17)$$

Assumiu-se que $\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_f$.

Na cadeia, e conseqüentemente nas equações, vãrias considerações foram feitas, levando em conta a importância relativa dos termos de produção e perda.

Nas equações (3.11) e (3.12), por exemplo, assumiu-se para todos os valores antecipados de fluxo que a perda do U^{239} e N_p^{239} por absorção de neutron é desprezível compara da com a perda por decaimento radioativo. A justificativa destas considerações pode ser vista na tabela 3.1. As secções de choque são as térmicas (exceto para o U^{238} , para o qual $\bar{\sigma}_{c28}$ foi arbitrariamente assumido igual a 10 barns para levar em conta a absorção na ressonância). O fluxo foi tomado como sendo igual a 5×10^{13} neutrons/cm².seg.

Isótopo	$\bar{\sigma}_{a_i} \phi$ (seg ⁻¹)	$\bar{\sigma}_{c_j} \phi$ (seg ⁻¹)	λ_i (seg ⁻¹)
U ²³⁴	$4,8 \times 10^{-9}$	$4,8 \times 10^{-9}$	
U ²³⁵	$3,4 \times 10^{-8}$	$5,1 \times 10^{-9}$	
U ²³⁶	$3,0 \times 10^{-10}$	$3,0 \times 10^{-10}$	
U ²³⁸	$5,0 \times 10^{-10}$	$5,0 \times 10^{-10}$	
U ²³⁹	$1,7 \times 10^{-9}$	$1,1 \times 10^{-9}$	$5,0 \times 10^{-4}$
N _p ²³⁹	$1,5 \times 10^{-9}$	$1,5 \times 10^{-9}$	$3,4 \times 10^{-6}$
P _u ²³⁹	$5,1 \times 10^{-8}$	$1,4 \times 10^{-9}$	

TABELA 3.1 - Constantes de tempo para vários isótopos, com $\phi = 5 \times 10^{13}$ neutrons/cm².seg.

Da tabela 3.1 vê-se claramente que se pode desprezar o termo $\bar{\sigma}_{a29}\phi$ em comparação com λ_{29} , e $\bar{\sigma}_{a39}\phi$ em comparação com λ_{39} . Pode-se observar também que a escala de tempo para efeitos significantes de depleção é da ordem de centenas de horas. Por exemplo, em 300 horas, a um fluxo constante de 5×10^{13} neutrons/cm².seg, a quantidade de U²³⁵ inicialmente presente é reduzido de um fator de $\exp(-\bar{\sigma}_{a25}\phi t) = \exp(-0,034) = 0,966$.

Exemplo 2. Outras considerações podem ser feitas, como por exemplo, o desprezo do U²³⁴ em um reator a urânio altamente enriquecido com 93% de U²³⁵. Com este enriquecimento, a quantidade de U²³⁴ contido no material vindo de uma usina de enriquecimento é da ordem de 4,7%. Da equação

$$\frac{dN_{24}}{dt} = -\bar{\sigma}_{a24} \phi N_{24} \quad (3.18)$$

a quantidade deste material convertido para U^{235} num tempo t é

$$N_{24 \rightarrow 25}(t) = N_{024} \left[1 - \exp(-\bar{\sigma}_{a24} \phi t) \right]. \quad (3.19)$$

Agora, durante um tempo t , a fração $1 - \exp(-\bar{\sigma}_{a25} \phi t)$ de U^{235} inicialmente presente é destruída, e para $t = 3 \times 10^7$ segundos (= 9000 horas), com $\phi = 5 \times 10^{13}$ neutrons/cm².seg., os valores mostrados na tabela 3.1 fornecem 0,64 para esta fração. Um reator altamente enriquecido com 64% da sua carga inicial de U^{235} destruída, improvavelmente será crítico; o tempo de 3×10^7 segundos é um limite superior razoável para o tempo de vida da criticalidade do combustível. Novamente da tabela 3.1 um total de 14% de U^{234} ($1 - \exp(-\bar{\sigma}_{a24} \phi t) \approx 0,14$) inicialmente presente foram convertidos em U^{235} durante este tempo. Desde que o U^{234} é em torno de 4,7% do U^{235} inicialmente, a conversão total leva a um aumento de 0,65% ($0,14 \times 0,047 \approx 0,0065$) na quantidade de U^{235} no intervalo de tempo de 3×10^7 segundos. Este efeito pode ser justificavelmente ignorado em cálculos grosseiros.

Exemplo 3. A justificativa para ignorar o U^{238} e sua cadeia é mais forte em reatores altamente enriquecidos a 93% de U^{235} . A quantidade de U^{238} é de 2,3% em uma carga de combustível inicial. A tabela 3.1 mostra que em 3×10^7 segundos uma fração de $1 - \exp(-\bar{\sigma}_{a28} \phi t) = 1 - \exp(-0,015) \approx 0,015$ é destruída. Assumindo que todos foram convertidos em plutônio - 239, a quantidade de P_u^{239} então produzida é apenas uma fração de $0,015 \times 0,023 = 0,000345$ do combustível inicialmente presen

te. Mesmo em cálculos detalhados pode-se prontamente desprezar este efeito.

Para reatores com combustível de urânio levemente enriquecido, pelo menos as equações (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13) são de fundamental importância, embora as outras equações também devam ser incluídas, mesmo num cálculo grosseiro, pois os seus efeitos não são desprezíveis para estes tipos de reatores.

3.3. Produtos de Fissão

Cerca de duas centenas de isótopos chamados produtos de fissão estão presentes no combustível parcialmente queimado como resultado de produção direta do processo de fissão, de decaimento radioativo de um produto de fissão, de captura de um neutron por um produto de fissão, ou de uma combinação dos dois últimos. Alguns destes nuclídeos tem secções de choque de absorção de neutrons substancialmente altas, e o seu acúmulo no reator contribui para a introdução de reatividade negativa, consequentemente reduzindo o fator de multiplicação. Por essa razão estes nuclídeos são conhecidos como venenos.

Dois produtos de fissão são particularmente importantes devido à alta secção de choque de absorção: o xenônio-135, com uma secção de choque térmica de $2,7 \times 10^6$ barns, e o samário-149, com 40800 barns. O efeito do resto dos produtos de fissão pode ser representado com grande precisão definindo alguns isótopos fictícios tendo secções de choque de absorção $\bar{\sigma}_{aj}$, constantes de decaimento radioativo λ_j e frações

de produção γ_{jj} fictícios. A aproximação mais simples é assumir que existe somente um isótopo fictício que não decai e que, quando absorve um neutrón de acordo com a sua secção de choque de absorção fictícia $\bar{\sigma}_{nf}$, o produto de tal absorção também tem a secção de choque fictícia $\bar{\sigma}_{nf}$.

3.4. Procedimento Numérico utilizado pelo Código CITATION para Solução das Equações da Cadeia de Nuclídeos.

Uma forma explícita de solução para equações da cadeia de nuclídeos é usada no código CITATION^(7,18).

A equação diferencial que expressa a relação entre nuclídeos numa cadeia devido às reações nucleares é escrita como

$$\frac{d N_n(t)}{dt} = -a_n N_n(t) + Y_n(t) + \sum_m G_{m \rightarrow n} N_m(t), \quad (3.20)$$

onde

$N_n(t)$ é a concentração do nuclídeo n em uma cadeia, em algum lugar do reator no tempo t ;

a_n se refere à taxa de perda específica do nuclídeo n ;

$Y_n(t)$ é a taxa de produção do nuclídeo n do processo de fissão por neutrons; e

$G_{m \rightarrow n}$ se refere à taxa de geração específica do nuclídeo n a partir de um precursor m .

Aparentemente a equação (3.20) difere da equação

(3.2), entretanto elas são equivalentes como será visto a seguir.

Os nuclídeos são enumerados numa cadeia, e o primeiro nuclídeo da cadeia deve ter uma concentração inicial e não ser originário de nenhum outro nuclídeo. A escala de tempo é dividida em passos de tempo, e no fim de um passo T, a forma explícita da solução da equação (3.20) é

$$N_n(T) = N_n(0) e^{-a_n T} + Y_n \frac{1 - e^{-a_n T}}{a_n} + \sum_j \sum_{i=1}^{n-1} \left[N_i(0) Q_{j,n,i} + Y_{j,i} U_{j,n,i} \right] \quad (3.21)$$

onde o subscrito j se refere à contribuição da cadeia j (o nuclídeo n pode estar presente em mais de uma cadeia), e $N_n(0)$ e $N_i(0)$ são as concentrações dos nuclídeos n e i, respectivamente, no início do passo T.

Os fatores Q e U são dados por:

$$Q_{j,n,i} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{e^{-a_m T} - e^{-a_n T}}{a_n - a_m} G_{j,m \rightarrow m+1} \prod_{\substack{k=i \\ k \neq m}}^{n-1} \frac{G_{j,k \rightarrow k+1}}{a_k - a_m}, \quad (3.22)$$

e

$$U_{j,n,i} = \frac{1 - e^{-a_n T}}{a_n} \prod_{m=i}^{n-1} \frac{G_{j,m \rightarrow m+1}}{a_m} .$$

$$- \sum_{m=i}^{n-1} \frac{e^{-a_m T} - e^{-a_n T}}{a_m (n_n - a_m)} G_{j,m \rightarrow m+1} \quad \sum_{k=i}^{n-1} \frac{G_{j,k \rightarrow k+1}}{k/m} \quad (3.23)$$

Nas equações acima o termo a_n representa o coeficiente de taxa de perda específica total do nuclídeo n , e é dado por

$$a_n = \lambda_n + 10^{-24} \sum_g \bar{\sigma}_{a,n,g} \bar{\phi}_{g,z} \quad (3.24)$$

onde o subscrito g se refere ao grupo de energia. A secção de choque microscópica é dada em barns, e por isso o termo é multiplicado por 10^{-24} cm^2 . O fluxo $\bar{\phi}_{g,z}$ é dado pela equação (3.9).

A taxa de geração do nuclídeo n a partir de um precursor m é dada por

$$G_{m \rightarrow n} = \begin{cases} \lambda_{m \rightarrow n}; \text{ ou} \\ r_{m \rightarrow n}, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\text{onde } r_{m \rightarrow n} = \sum_g \bar{\sigma}_{c,m,g} \bar{\phi}_{g,z} \quad (3.26)$$

dependendo das especificações na cadeia.

A taxa de produção de um produto de fissão n originado diretamente de fissão é dada por

$$Y_n(T) = \sum_m \gamma_{m \rightarrow n} \left(\frac{N_m(0) + N_m(T)}{2} \right) \sum_R \bar{\sigma}_{f,m,R} \bar{\phi}_{R,2} \quad (3.27)$$

onde $\gamma_{m \rightarrow n}$ é a fração de produção de nuclídeo n a partir do nuclídeo fissionável m . A média aritmética dos valores dos limites do passo das concentrações dos nuclídeos fissionáveis é usada como mostrada na equação (3.27). Se uma cadeia de produtos de fissão estiver localizada antes de uma cadeia em que aparece o nuclídeo fissionável que gerou o produto de fissão, $N_m(0)$ substitui a média na equação (3.27).

Para uma cadeia com somente um nuclídeo produto de fissão, a solução da equação é

$$N_n(t) = N_n(0) + Y_n(T). \quad (3.28)$$

O código também está disponível para uma cadeia com um só nuclídeo que pode ser usado em situações especiais, como por exemplo, venenos queimáveis,

$$N_n(T) = N_n(0) e^{-\lambda_n T}. \quad (3.29)$$

Para todos os cálculos, as taxas de reações são baseadas no fluxo de neutrons disponível no início do passo de tempo.

Para obter uma maior precisão, certos termos são mudados de

$$\frac{e^{-zt} - e^{-yt}}{y - z} \text{ para } te^{-zt} \left[\frac{1 - e^{-(y-z)t}}{(y-z)t} \right],$$

e a seguinte aproximação é usada:

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = (1 - \frac{x}{2} (1 - \frac{x}{3} (1 - \frac{x}{4} (1 - \frac{x}{5} (1 - \frac{x}{6} \dots))))). \quad (3.30)$$

quando $x < 0,01$.

4. APLICAÇÃO

4.1. Código GAPOTKIN

Como aplicação do código GAPOTKIN, alguns problemas de cinética foram solucionados; e são mostradas em gráficos variações da densidade de neutrons $n(t)$, em sistemas inicialmente em equilíbrio.

Problema 4.1.1 (Ref.15). A figura 4.2 mostra a resposta de $n(t)$ para uma inserção de reatividade constante $\rho = 0,0022$, em um sistema com 1 grupo de neutrons atrasados, $\beta = 0,0065$, constante de decaimento $\lambda = 0,08 \text{ seg}^{-1}$ e tempo de geração de neutrons $\Lambda = 10^{-8} \text{ seg}$. O sistema está inicialmente em equilíbrio, com $n(0) = 1 \text{ neutron/cm}^3$. A solução apresentada pelo problema está na tabela 4.1. Os valores da tabela 4.1 estão colocados no gráfico da figura 4.2, representados pela linha contínua, e a tracejada é a solução do GAPOTKIN. Com limites do tempo de transiente de 120 segundos e da densidade de neutrons de $5,0 \times 10^2 \text{ neutrons/cm}^3$, foram executados 1033 passos, necessitando um tempo de computação de 28,22 segundos.

Problema 4.1.2 (Ref. 15). A figura 4.3 representa a resposta de $n(t)$ para uma inserção de reatividade como uma função linear do tempo afetada por uma reatividade de realimentação negativa devido ao aumento de temperatura, num sistema de U-235, com 6 grupos de neutrons atrasados, dados na tabela 4.2, e tempo de geração dos neutrons prontos $\Lambda = 5,0 \times 10^{-5} \text{ segundos}$, inicialmente em equilíbrio, com $n(0) = 1 \text{ neutron/cm}^3$.

A reatividade é da forma

t (seg)	n(t) (neutrons/cm ³)
0,0	1,0
0,4657	1,54072
1,1298	1,58317
2,2019	1,65419
5,3686	1,88312
10,4809	2,32140
20,4657	3,49332
30,6961	5,30996
40,9265	8,07131
61,3872	18,64873
81,8479	43,08782
102,3086	99,55420

TABELA 4.1 - Solução apresentada do problema 4.1.1.

$$\rho(t) = 0,003t - 10^{-11} \int_0^t n(t') dt'$$

Grupo	β_i	λ_i (seg ⁻¹)
1	0,00021	0,0124
2	0,00141	0,0305
3	0,00127	0,1110
4	0,00255	0,3010
5	0,00074	0,1400
6	0,00027	3,0000

TABELA 4.2 - Frações de neutrons atrasados e constantes de decaimento dos precursores para o U-235

A solução é apresentada como o primeiro pico da curva, colocado na figura 4.3, dado por $n(t_p) = 5,11409 \times 10^9$ neutrons/cm³, para $t_p = 2,90307$ segundos. A solução do GAPOTKIN apresenta como o primeiro pico da curva, $n(t_p) = 5,12254 \times 10^9$ neutrons/cm³, para $t_p = 2,9112$ segundos. Com limites do tempo de transiente de 3 segundos e da densidade de neutrons de 10^{10} neutrons/cm³, foram executados 23589 passos, necessitando 1 minuto e 44,45 segundos de tempo de computação.

Problema 4.1.3 (Ref. 14). A figura 4.1 mostra a resposta de $n(t)$ para uma inserção de reatividade como uma função quadrática do tempo $\rho(t) = at + bt^2$ para um sistema de U-235. Com $a = 0$, corresponde a uma queda livre de uma barra de controle. Uma ligeira refreada no seu movimento pode ser simulada com uma escolha conveniente de um valor negativo de a . O tempo de geração dos neutrons prontos Λ é de 10^{-4} segundos, com o sistema inicialmente em equilíbrio, $n(0) = 1$ neutron/cm³. As frações de neutrons atrasados e constantes de decaimento dos precursores são dadas na tabela 4.2. As curvas são resultados do código RTS.

A figura 4.4 mostra os resultados do GAPOTKIN. Em todos os casos os limites do tempo de transiente e da densidade de neutrons foram de 3 segundos e 10^6 neutrons/cm³, respectivamente. Observando as duas figuras, nota-se que as curvas são bem próximas. A tabela 4.3 mostra o tempo de computação necessário e o número de passos executados para todos os casos.

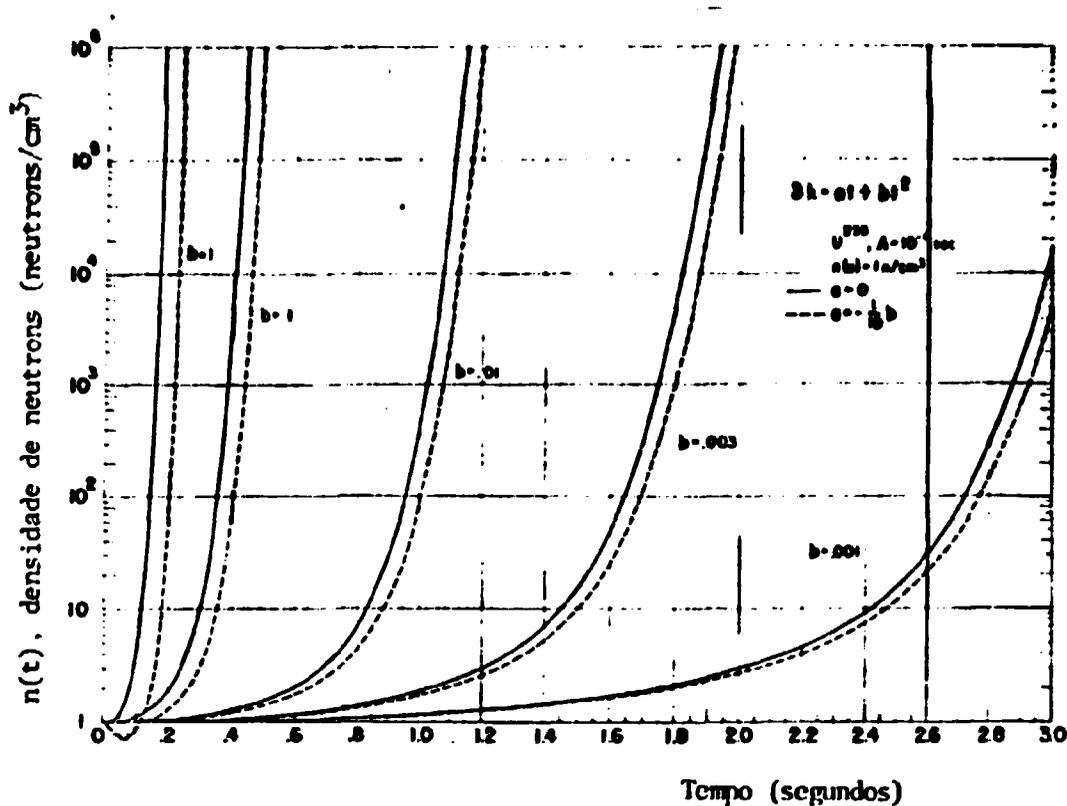


FIGURA 4.1 - Resultados do Código RTS

a	b	Tempo de Computação (seg)	Nº de passos
-0,1	1,0	11,35	630
0,0	1,0	10,58	545
-0,01	0,1	10,47	529
0,0	0,1	10,47	484
-0,001	0,01	9,92	482
0,0	0,01	9,56	485
-0,0003	0,003	8,82	471
0,0	0,003	8,75	486
-0,0001	0,001	9,38	402
0,0	0,001	9,51	411

TABELA 4.3 - Tempo de computação e número de passos para o problema 4.1.3.

COMENTÁRIO

Comparando os resultados obtidos pelo GAPOTKIN com os apresentados, observa-se que esses resultados são bastante consistentes, uma diferença entre ambos praticamente inxiste. O tempo de computação gasto para a solução dos problemas é um outro resultado bastante satisfatório. Segundo a Ref. 11, a solução de um problema semelhante ao problema 4.1.2 com o código RTS necessitaria de aproximadamente 30 minutos de tempo de computação.

4.2. Código CITATION

Dois problemas padrões foram solucionados com o código CITATION: um estático e outro de depleção do combustível - vel.

Problema 4.2.1 (Ref. 4). O problema é identificado como 2-A1-1 na referência. É um modelo simplificado de um HTGR (High Temperature Gascooled Reactor), com as seguintes características:

- a seção transversal do caroço, com as dimensões é mostrada na figura 4.5;
- os materiais constituintes do caroço e suas concentrações (homogeneizadas) são dados na tabela 4.5;
- 7 grupos de energia, dados na tabela 4.6;
- duas dimensões, com geometria (x,y), discretizadas com 36 x 36 malhas, como mostrada na figura 4.6 (1/4 do caroço, demarcado pelas linhas tracejadas na figura 4.5);
- as constantes macroscópicas são dadas nas tabe

nas 4.7, 4.8 e 4.9:

- espectro de neutrons de fissão:

$$x_1 = 0,9675,$$

$$x_2 = 0,0325,$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0;$$

- condição de contorno externo:

$d = 0,4695$ cm (distância extrapolada) para todos os grupos de energia.

A solução consiste no cálculo do fator de multiplicação. A solução apresentada pelo problema foi obtida com o código GAMBLE-5 no computador UNIVAC 1108. Esta solução é

$$k = 1,006397,$$

com um critério de convergência de 10^{-4} de erro relativo do fluxo de neutrons no processo iterativo, necessitando 72 iterações e 6,45 minutos de tempo de computação.

Para solucionar o problema com o CITATION foi necessário especificar a região 4, para a qual o problema não faz nenhuma menção. Alguns testes foram feitos, colocando valores diferentes, para definir esta região. Alguns casos estão citados na tabela 4.4, todos para o mesmo critério de convergência.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
$D_{g,4}$	10^{-5}cm	$D_{g,2}$	$D_{g,3}$
$\Sigma_{a,g,4}$	$10^{-4} \times \Sigma_{a,g,2}$	$\Sigma_{a,g,2}$	$1,0 \text{cm}^{-1}$
$\Sigma_{s,4}(g' \rightarrow g)$	0,0	$\Sigma_{s,2}(g' \rightarrow g)$	0,0
k	1,040354	1,015873	1,006684
Nº iterações	111	103	133
Tempo de computação (min)	12,37	11,57	14,90

TABELA 4.4 - Resultados do CITATION para o problema 4.2.1

Comentário

No primeiro caso, as perdas por absorção e fuga na região 4 são pequenas, resultando num valor de k maior. No segundo, é uma extensão do refletor, que possibilita uma menor fuga de neutrons. No terceiro, a região 4 contendo um material fictício altamente absorvedor e sem espalhamento, absorve rapidamente os neutrons que fogem do refletor, e nem permite o seu retorno ao caroço. Essas características simulam melhor a não existência da região 4.

Problema 4.2.2 (Ref. 9). O problema padrão de depleção apresenta três partes distintas: problema de depleção pontual, depleção celular e depleção do reator. O reator apresenta 4 tipos de células, assim denominadas: hexágono de combustível, hexágono de controle, hexágono de refletor e hexágono da parede do tanque. Na parte de depleção do reator, que é de interesse deste trabalho, as secções de choque são apresen

tadas em grandezas macroscópicas para todas as células, e em grandezas microscópicas para o U-235, U-238 e todos os núcleos originários destes dois isótopos. Em vista do fato de que o CITATION aceita só grandezas microscópicas (em problemas de depleção) ou só macroscópicas, e não ambas, algumas considerações são feitas.

A geometria do reator é representada pelas figuras 4.7 e 4.8. Está mostrado apenas 1/6 da secção transversal. Existe simetria rotacional de 60° em torno do hexágono de controle central. A secção transversal total do caroço ativo está mostrada na figura 4.9. A secção axial do reator é representada pela figura 4.10, já discretizada a variável z . As outras duas variáveis espaciais são discretizadas em geometria triangular, como mostradas nas figuras 4.11 e 4.12. Supõe-se que os espaços em branco no topo e à direita são preenchidos com o mesmo material da parede do tanque.

As secções de choque microscópicas dos materiais da célula de combustível foram geradas pelo código LEOPARD⁽²⁾, onde os dados de entrada estão na figura 4.13. Para a célula de controle (figura 4.14), os valores das secções de choque microscópicas foram assumidos de modo que as secções de choque macroscópicas fossem as mesmas que as fornecidas pelo problema. Estes valores estão nas tabelas 4.10 e 4.11. As concentrações são homogêneas, dadas em átomos/barn.cm.

Para as células do refletor e da parede do tanque, as secções de choque microscópicas, mostradas nas tabelas 4.12 e 4.13, foram obtidas considerando que existe apenas um material fictício de maneira que suas secções de choque macros

cópias fossem as mesmas apresentadas pelo problema. A concentração deste material foi assumida como sendo igual a 0,06446 átomos/barn.cm, para ambas as células.

Nas cadeias de núclídeos (figura 4.15) estão presentes apenas os principais elementos, e suas secções de choque microscópicas estão na tabela 4.14. Constantes de decaimento, frações de produção dos produtos de fissão, frações de produção dos neutrons atrasados são dadas nas tabelas 4.15, 4.16 e 4.17, respectivamente.

A solução do problema de depleção consiste em encontrar como resultado primário a quantidade de materiais físseis e férteis dependentes do tempo. A tabela 4.18 mostra resultados obtidos do módulo GRIMH2 do GRASS (Generalized Reactor Analysis Subsystem), com 6 malhas por hexágono e malhas axiais como mostradas na figura 4.10. Cada segmento axial de cada hexágono de combustível foi uma região distinta para a qual as equações de depleção isotópica foram solucionadas. O computador utilizado foi o IBM 360/195, necessitando 74 minutos de tempo de computação e espaço de memória do computador de 790 "kbytes".

Com o CITATION, uma pesquisa da concentração do boro-10 contido no hexágono de controle, para manter a criticidade do sistema é feita. Esta concentração simula a configuração crítica das barras de controle. A tabela 4.19 mostra os resultados do CITATION, necessitando 50 minutos de tempo de computação para um critério de convergência de 10^{-4} de erro relativo no processo iterativo de cálculo do fluxo de neutrons, e uma região de memória de 780 "kbytes".

Comentário

Observando os valores das tabelas 4.18 e 4.19, existem diferenças entre ambas, que são resultados das considerações feitas no problema. Os resultados obtidos pelo LEOPARD contribuíram em parte para estas diferenças. Além disso, os resultados do GRASS são soluções das equações em cada hexágono de combustível, enquanto que o CITATION utiliza o fluxo médio dos hexágonos de combustível.

Para um estudo preliminar do ciclo de combustível de um reator térmico, estes resultados são satisfatórios, pois a maioria dos núclídeos pesados de importância formados no reator existem em pequena quantidade.

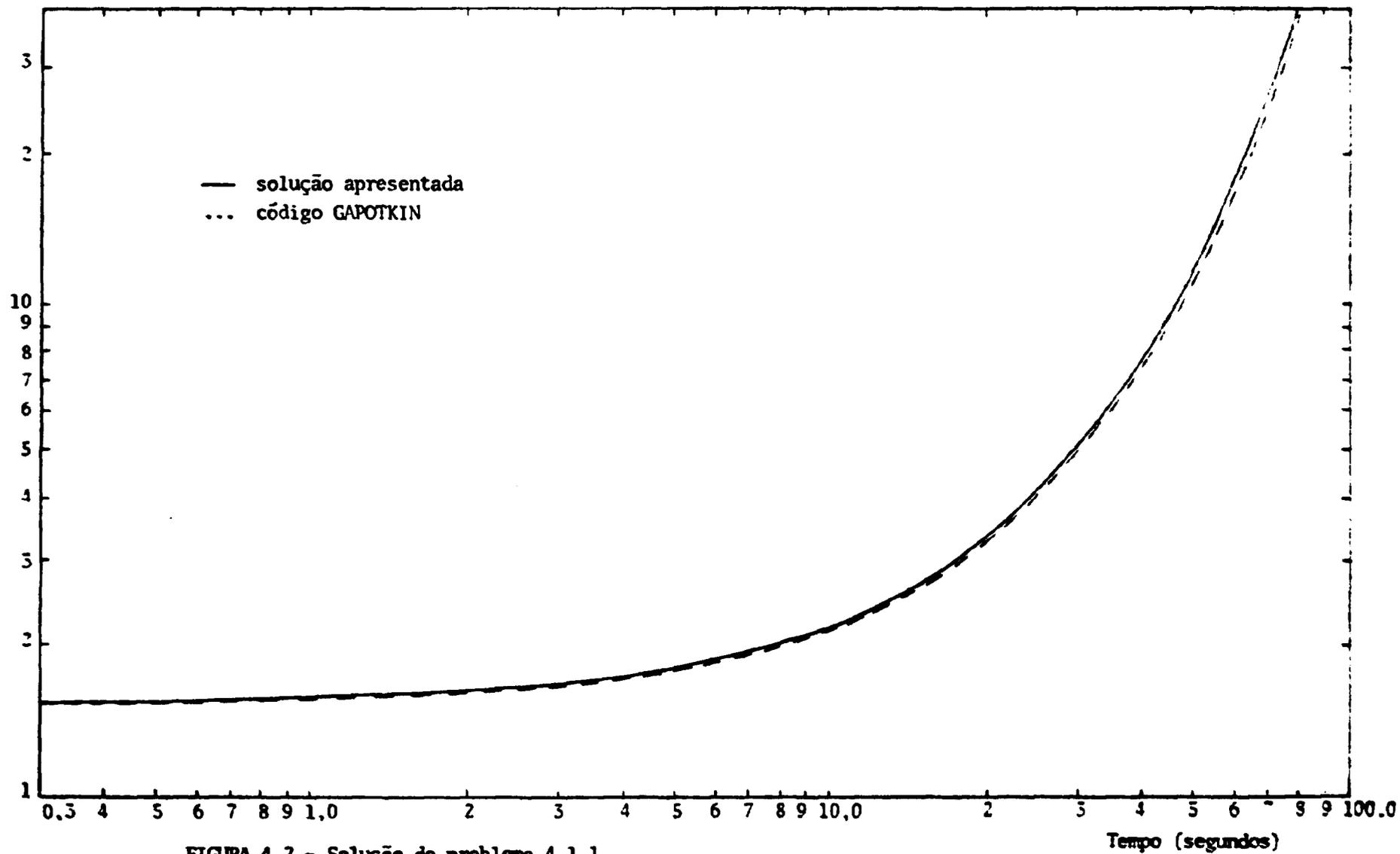


FIGURA 4.2 - Solução do problema 4.1.1

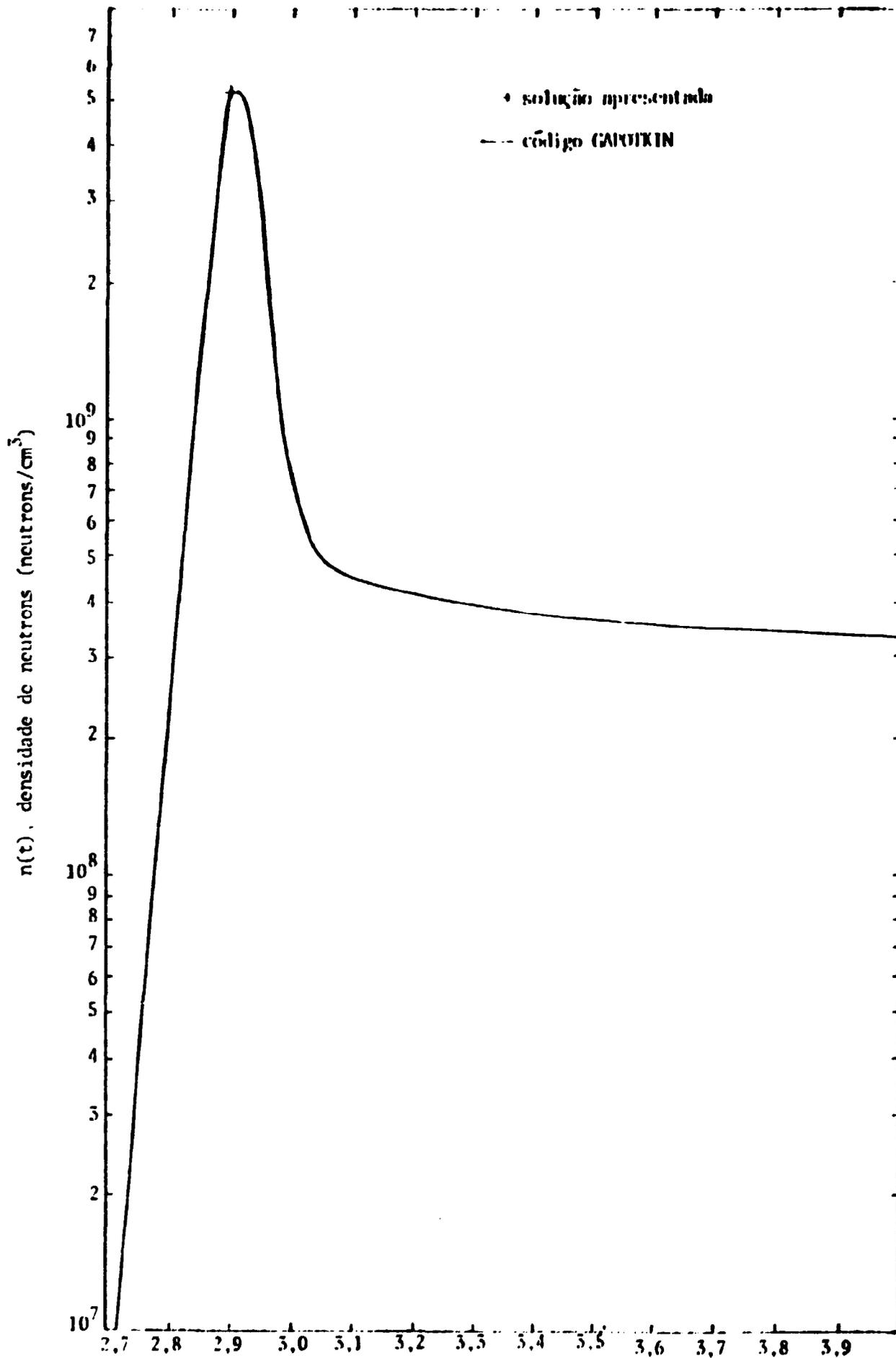


FIGURA 4.3 - Solução do problema 4.1.2 Tempo (segundos)

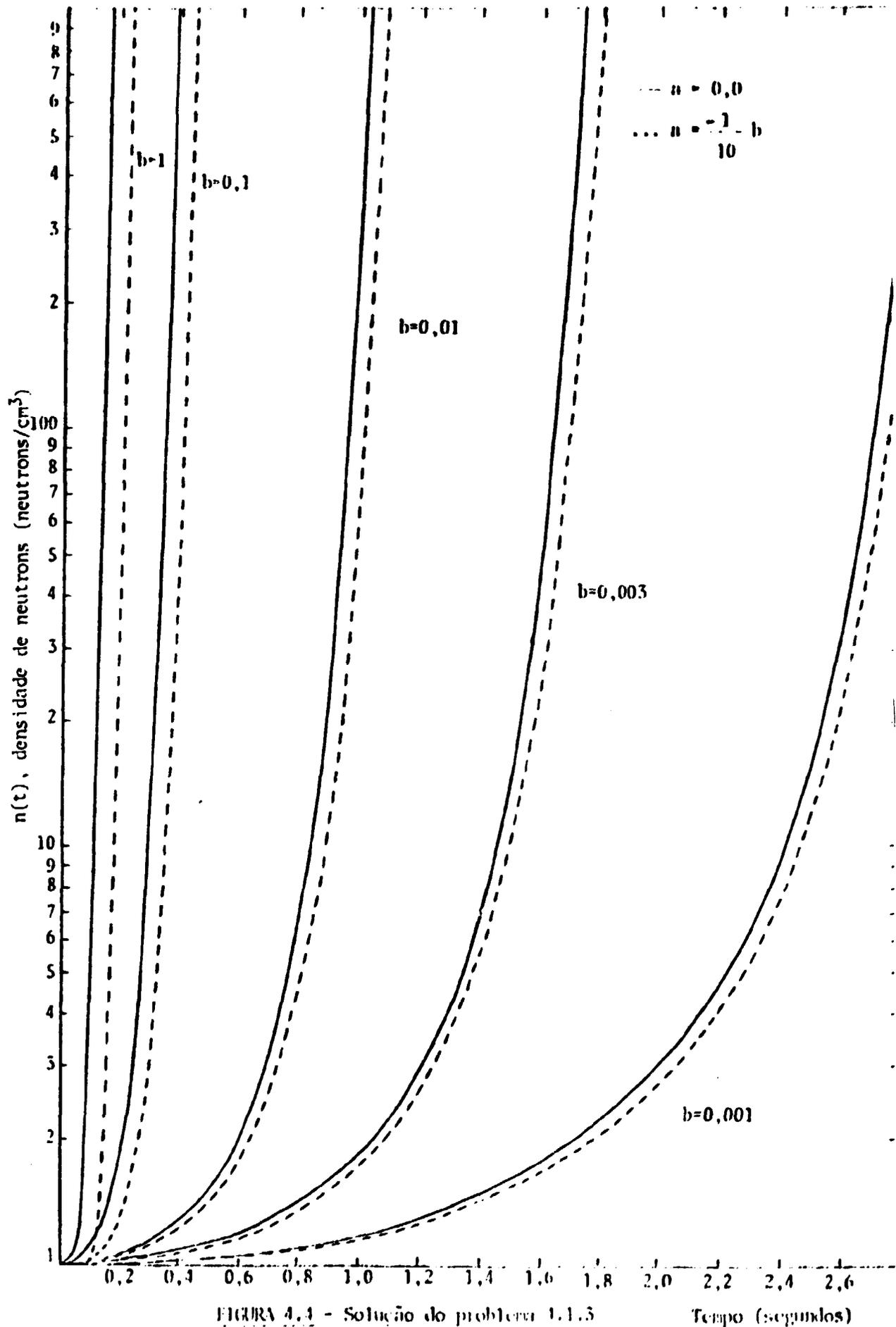


FIGURA 4.4 - Solução do problema 1.1.5

Tempo (segundos)

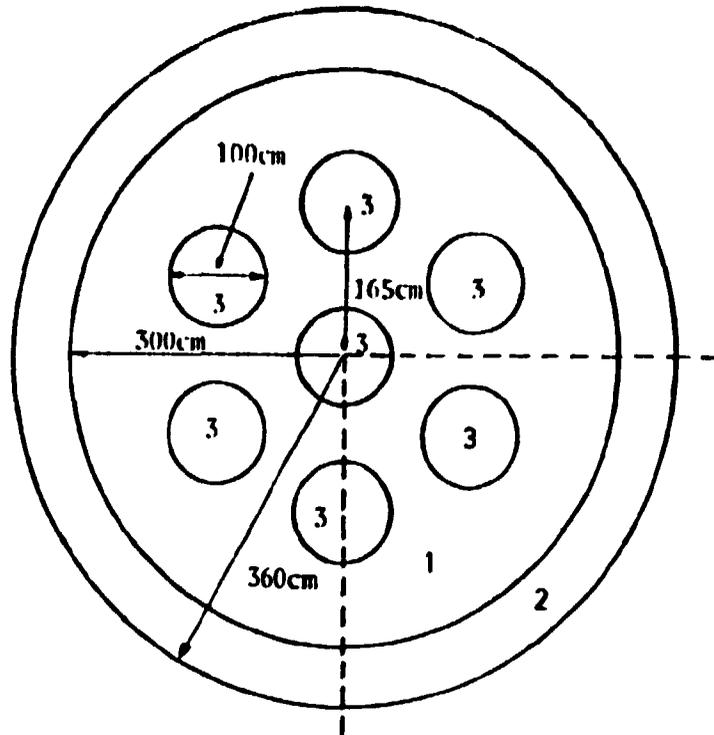


FIGURA 4.5 - Solução transversal do caroço do IITCR.

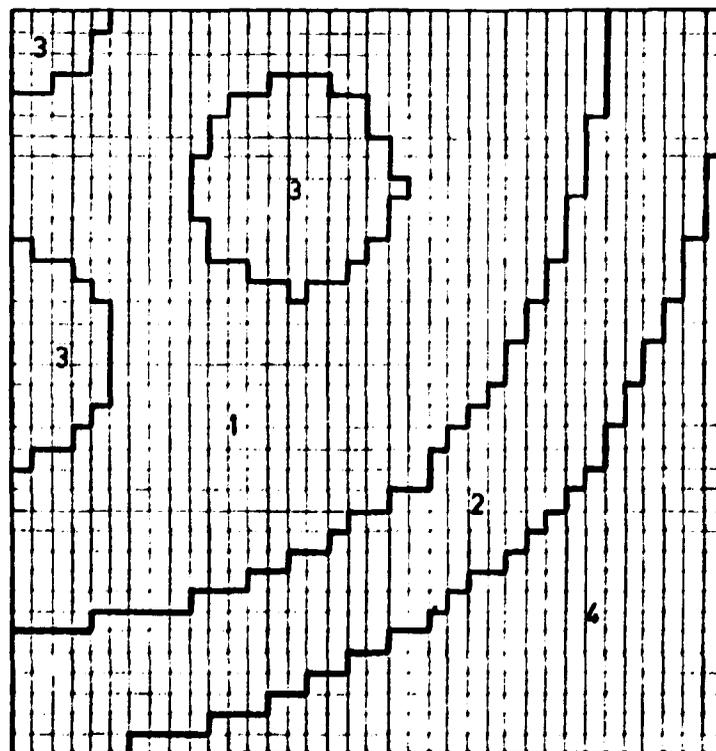


FIGURA 4.6 - Discretização do caroço do IITCR em geometria (x,y).

Isótopo	Região 1	Região 2	Região 3
Tório-232	3,91 E-4*	0,0	3,91 E-4
Urânio-235	2,22 E-5	0,0	2,22 E-5
Urânio-238	1,54 E-6	0,0	1,54 E-6
Boro natural	0,0	0,0	2,22 E-4
Boro-10	3,76 E-7	0,0	3,76 E-7
Carbono	6,03 E-2	8,03E-2	6,03 E-2

* Lc-se $3,91 \times 10^{-4}$

TABELA 4.5 - Isótopos e concentrações (átomos/
barn.cm) das regiões do HTGR.

Grupo	Intervalo de energia (eV)
1	1,83 E+5 a 1,49 E+7
2	1,76 E+1 a 1,83 E+5
3	2,38 E+0 a 1,76 E+1
4	4,14 E-1 a 2,38 E+0
5	1,00 E-1 a 4,14 E-1
6	4,00 E-2 a 1,00 E-1
7	0,0 a 4,00 E-2

TABELA 4.6 - Grupos de energia

Grupo	Coefficiente de Difusão,	Seção de Choque de Captação,	Seção de Choque de Fissão,	Seção de Choque de Produção,
g	D_g	Σ_{cg}	Σ_{fg}	$\nu \Sigma_{fg}$
1	2,384 E+0	5,328 E-5	4,286 E-5	1,074 E-4
2	1,221 E+0	1,726 E-3	2,553 E-4	6,207 E-4
3	1,227 E+0	9,050 E-4	7,504 E-4	1,823 E-3
4	1,225 E+0	8,905 E-4	1,277 E-0	3,104 E-3
5	1,145 E+0	2,453 E-3	4,127 E-3	1,003 E-2
6	9,930 E-1	4,023 E-3	7,115 E-3	1,729 E-2
7	9,175 E-1	7,479 E-3	1,395 E-2	3,390 E-2

MATRIZ DE ESPALHAMENTO, $\Sigma_S (g' \rightarrow g)$

Grupo, g'	Grupo g						
	1	2	3	4	5	6	7
1		1,198E-2					
2			3,546E-3				
3				2,140E-2			
4			7,827E-4		3,643E-2	1,821E-4	1,890E-4
5				1,049E-2		1,856E-2	2,305E-3
6				1,234E-4	5,946E-2		1,490E-2
7				4,051E-5	2,257E-2	4,869E-2	

TABELA 4.7 - Seções de Choque Macroscópicas (cm^{-1})

Região 1

Grupo	Coefficiente de Difusão,	Seção de Choque de Captura,	Seção de Choque de Fissão,	Seção de Choque de Produção,
g	D_g	Σ_{cg}	Σ_{fg}	$\nu \Sigma_{fg}$
1	1,839E+0	5,621E-8	0,0	0,0
2	9,480E-1	2,497E-6	0,0	0,0
3	9,329E-1	2,028E-5	0,0	0,0
4	9,432E-1	6,07E-5	0,0	0,0
5	8,932E-1	1,172E-4	0,0	0,0
6	7,971E-1	1,910E-4	0,0	0,0
7	7,730E-1	3,419E-4	0,0	0,0

MATRIZ DE ESPALHAMENTO, $\Sigma_s (g' \rightarrow g)$

Grupo, g'	Grupo g						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,562E-2						
2		6,369E-3					
3			2,986E-2				
4			4,936E-4	7,600E-2	3,616E-4	3,757E-5	
5				7,031E-3	2,893E-2	3,421E-3	
6				7,060E-5	6,481E-2		1,899E-2
7				2,137E-5	2,209E-2	5,513E-2	

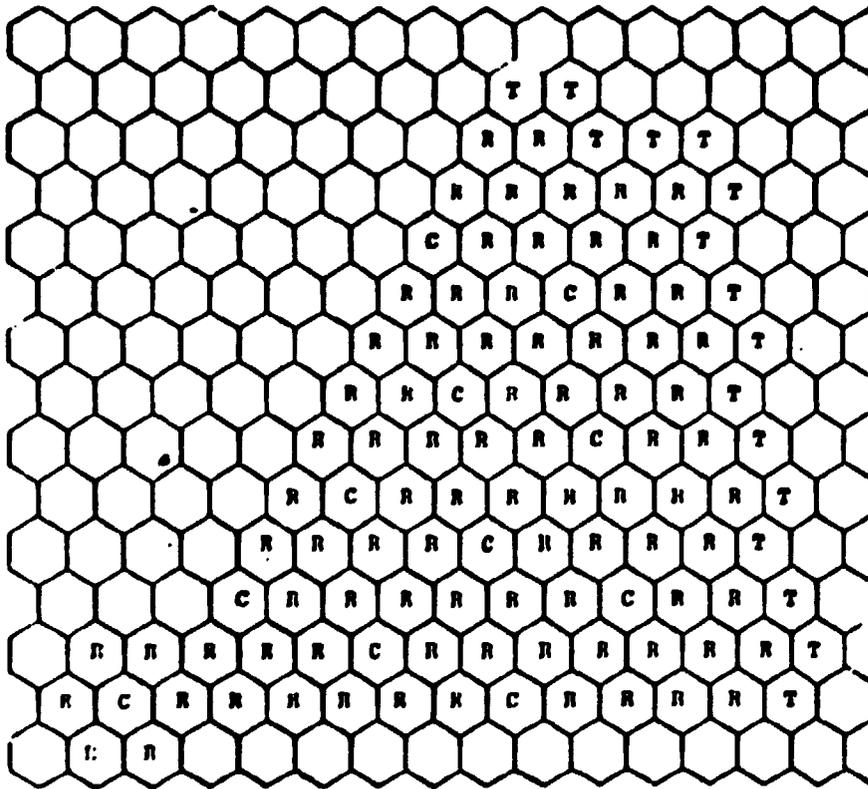
TABELA 4.8 - Seções de choque macroscópicas (cm^{-1})
Região 2.

Grupo	Coefficiente de Difusão,	Seção de Choque de Captura,	Seção de Choque de Fissão,	Seção de Choque de Produção,
β	D_g	Σ_{CG}	Σ_{FG}	$\nu \Sigma_{FG}$
1	2,381 E+0	6,942 E-5	4,286 E-5	1,074 E-4
2	1,217 E+0	2,184 E-3	2,553 E-4	6,207 E-4
3	1,222 E+0	1,916 E-3	7,504 E-4	1,823 E-3
4	1,221 E+0	1,800 E-3	1,277 E-3	3,104 E-3
5	1,142 E+0	3,193 E-3	4,127 E-3	1,003 E-2
6	9,909 E-1	4,737 E-3	7,115 E-3	1,729 E-2
7	9,158 E-1	8,224 E-3	1,395 E-2	3,390 E-2

MATRIZ DE ESPALHAMENTO, $\Sigma_s(g' \rightarrow g)$

Grupo g'	Grupo g						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,200E-2						
2		3,551E-3					
3			2,140E-2				
4			7,827E-4	3,643E-2	1,821E-4	1,890E-4	
5				1,048E-2	1,856E-2	2,305E-3	
6				1,234E-4	5,946E-2		1,490E-2
7				4,051E-5	2,257E-2	4,869E-2	

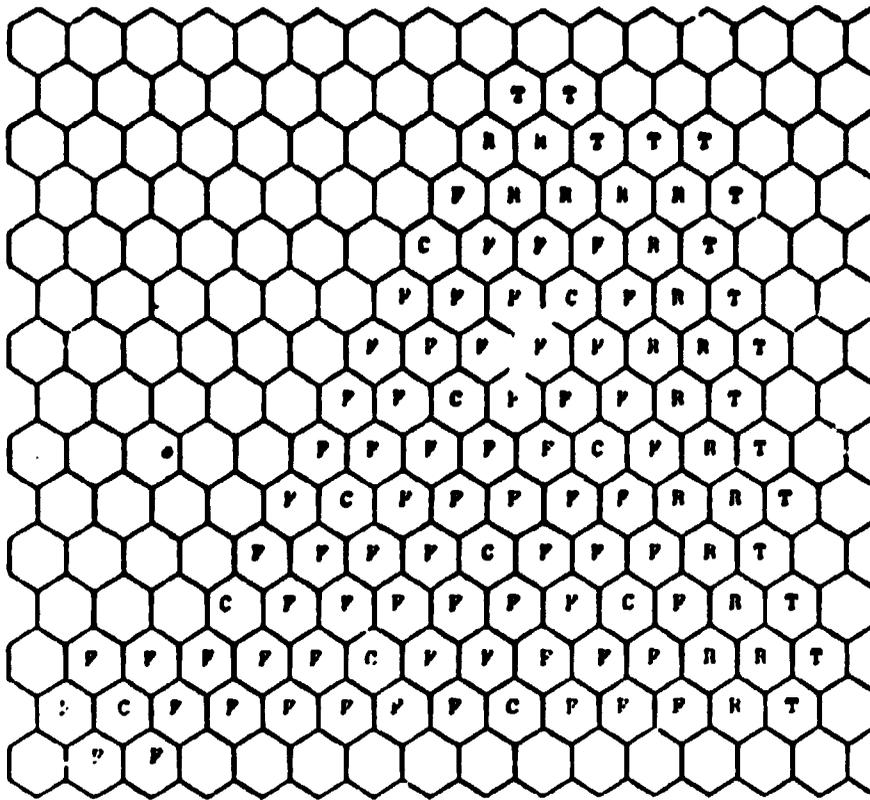
TABELA 4.9 - Secções de Choque Macroscópicas (cm⁻¹)
Região 3.



- C - Hexágono de Controle
- R - Hexágono de Refletor de D₂O
- T - Hexágono da Parede do Tanque

Cada hexágono tem 12,7cm de distância entre 2 lados opostos

FIGURA 4.7 - Secção Transversal do Refletor do Topo e da Base do Reator



C - Hexágono de Controle

R - Hexágono de Refletor de D_2O

T - Hexágono da Parede do Tanque

F - Hexágono de Combustível

Cada hexágono tem 12,7cm de distância entre 2 lado opostos

FIGURA 4.8 - Seção Transversal do Carroço Ativo do Reator.

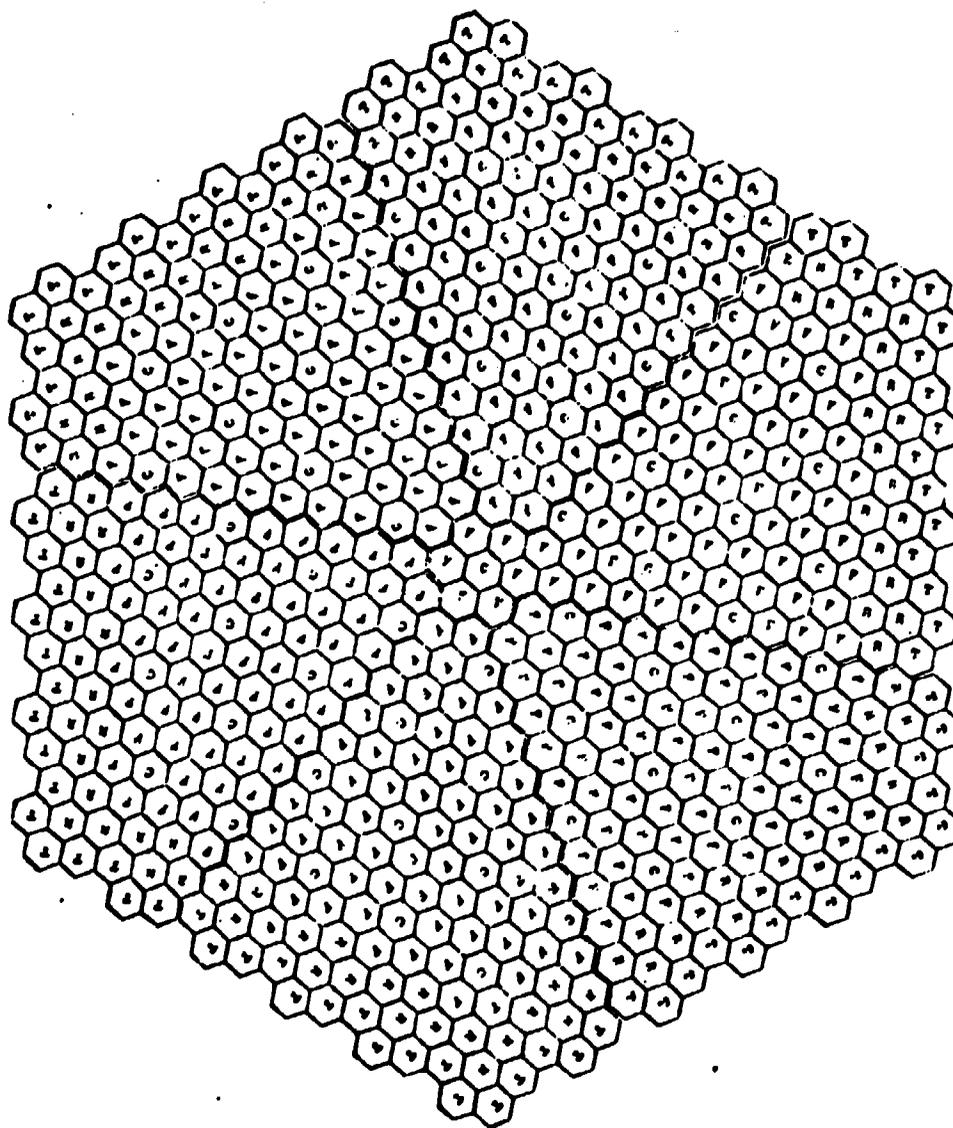


FIGURA 4.9 - Secção Transversal do Carço Ativo do Reator.

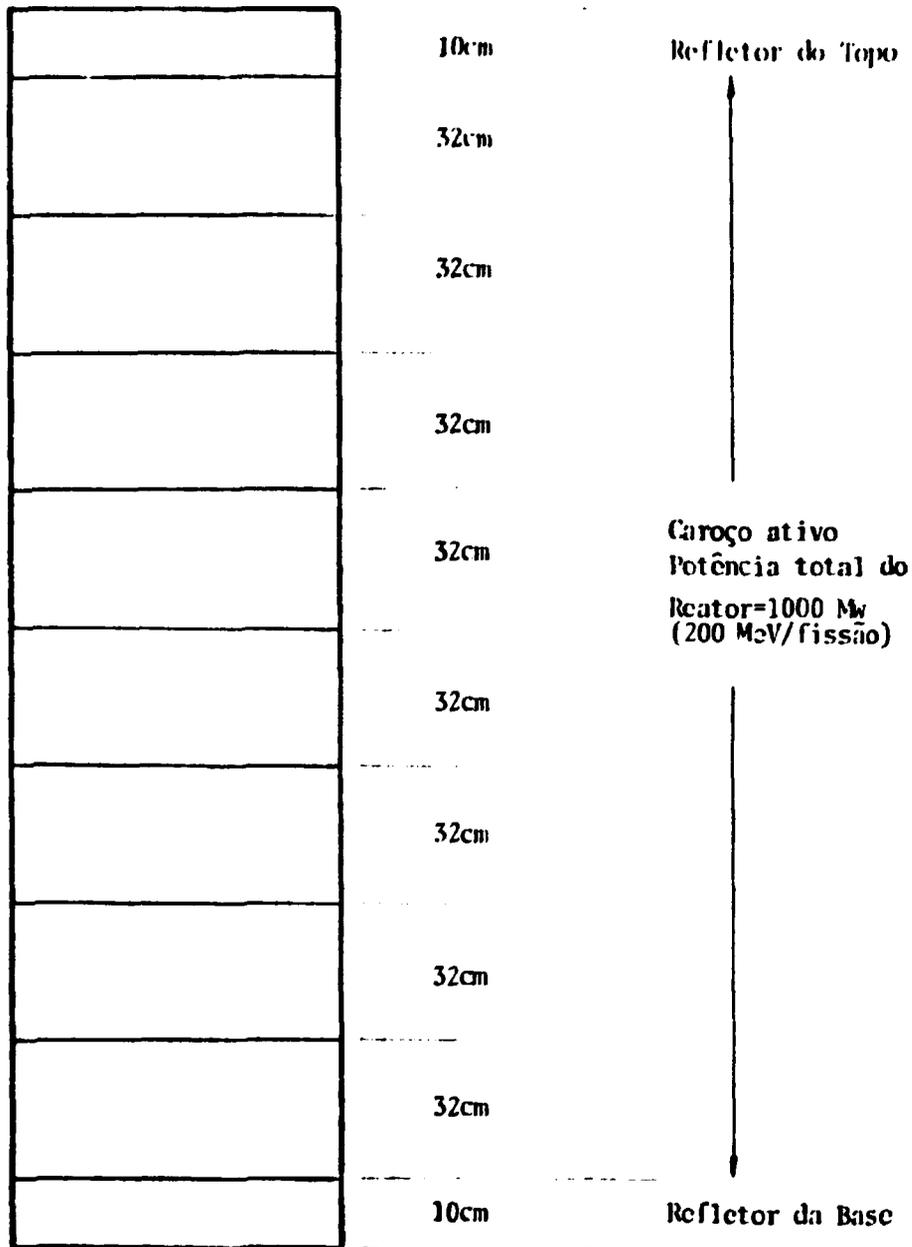


FIGURA 4.10 - Secção Axial do Reator

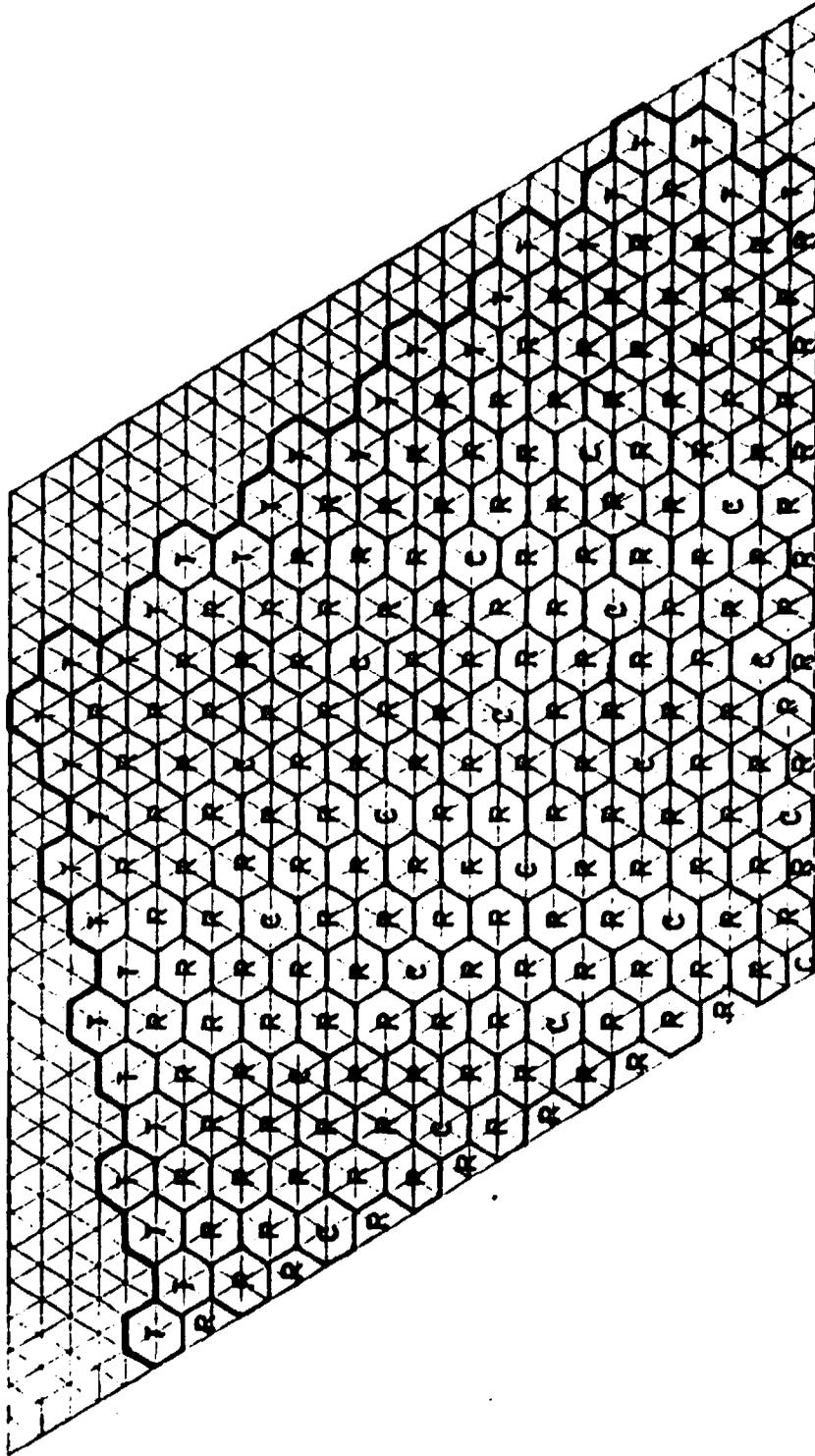


FIGURA 4.11 - Discretização Espacial do Refletor da base e do Topo do Reator.

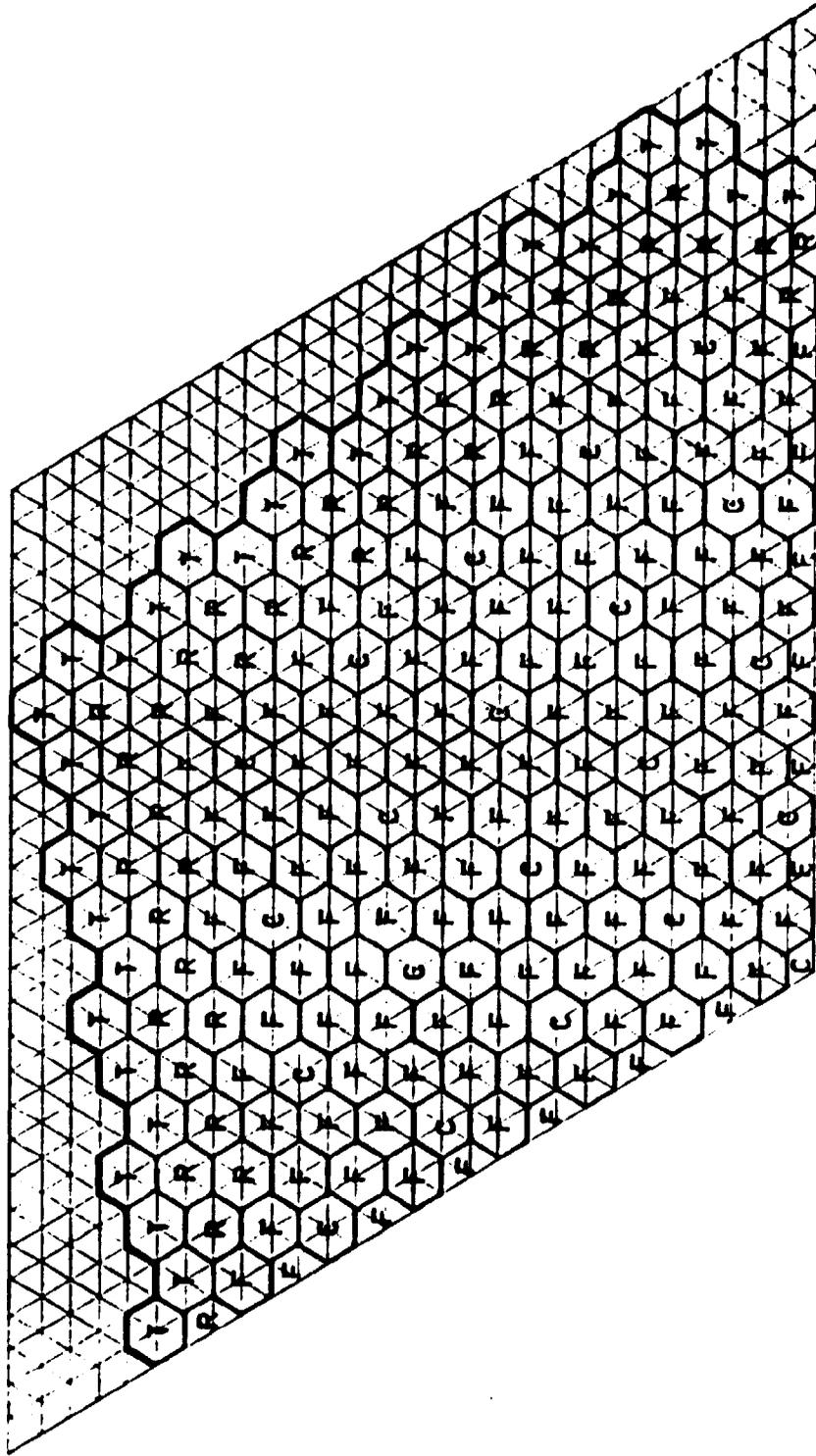
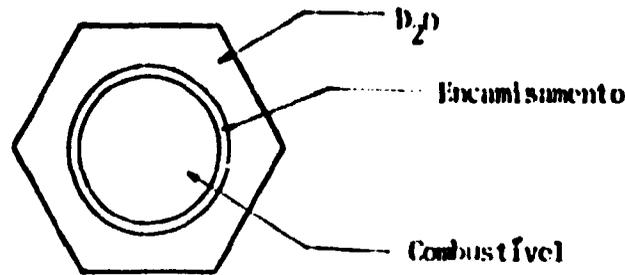
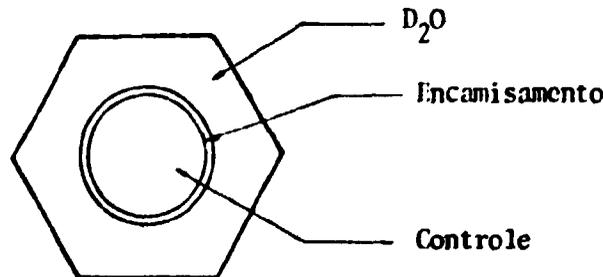


FIGURA 4.12 - Discretização Espacial do Caroco Ativo do Reator



Barra de combustível (diâmetro)	5,08cm
U-235	5,10 I:-4 at./barn.cm
U-238	4,78 I:-2 at./barn.cm
Espessura do encamisamento	0,0254cm
Ferro	8,84 E-2 at./barn.cm
Hexágono (distância entre 2 lados)	12,7cm
D	6,646 I:-2 at./barn/cm
O	3,323 E-2 at./barn.cm

FIGURA 4.13 - Hexágono de Combustível



Barra de controle (diâmetro)	1,524cm
B-10	4,80 I:-3 at./barn.cm
Alumínio	5,52 I:-2 at./barn.cm
Espessura do encamisamento	0,0254cm
Ferro	8,84 E-2 at./barn.cm
Hexágono (distância entre 2 lado)	12,7cm
D	6,646 I:-2 at./barn/cm
O	3,323 E-2 at./barn.cm

FIGURA 4.14 - Hexágono de Controle

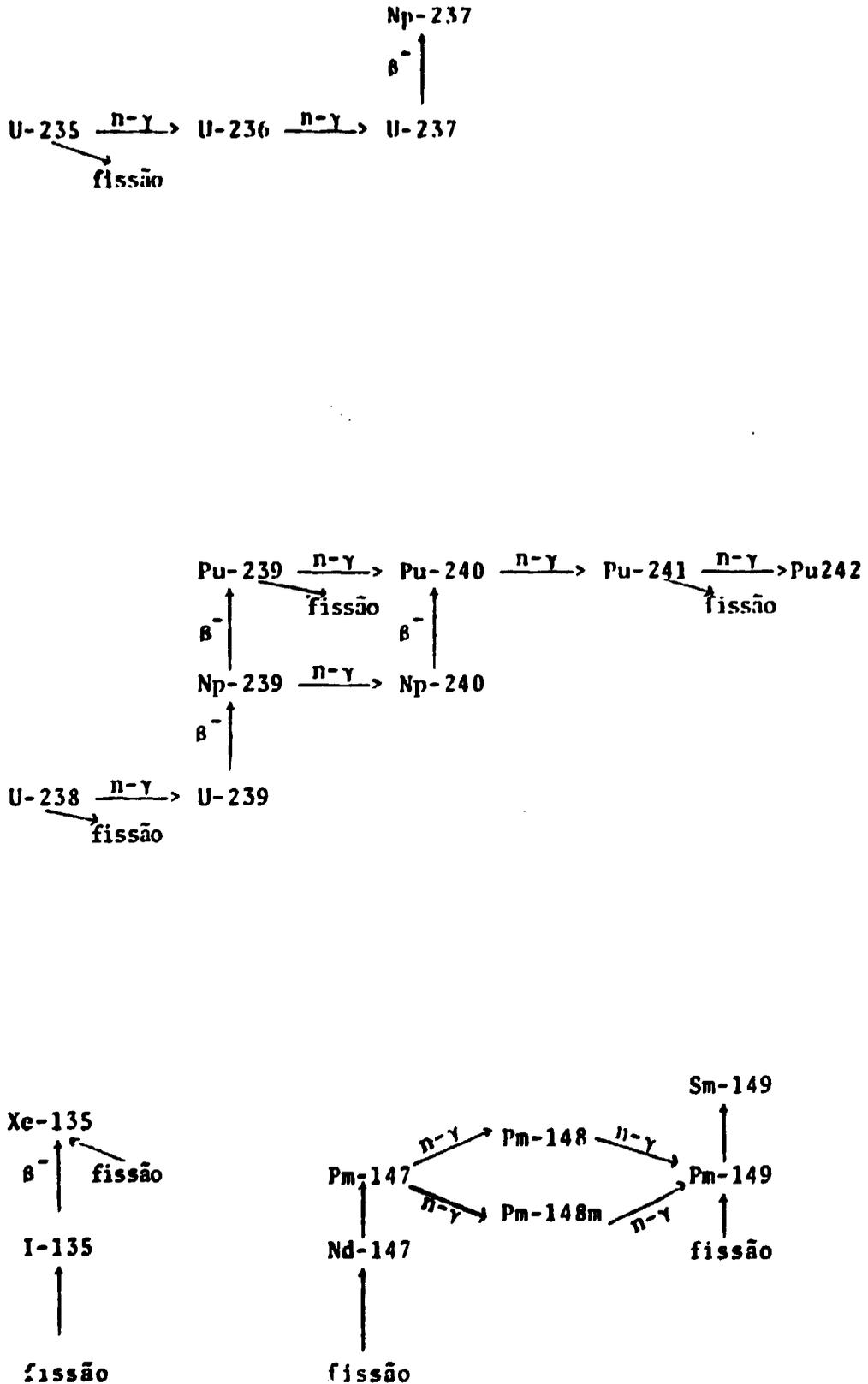


FIGURA 4.15 - Cadeias de Nuclídeos

	CONC.	σ_{a1}	σ_{a2}	σ_{tr}	σ_{tr}	σ_{f1}	σ_{f2}	ν_1	ν_2
U-235	7,4003E-5	18,3572	176,60	14,19667	131,183114	12,370	148,18	2,43053	2,42299
U-238	6,9360E-3	0,61392	0,73141	9,114698	4,658130	0,081338	0,0	2,79292	0,0
Oxigênio	2,8311E-2	2,5789E-3	1,6462E-4	3,179576	4,446919				
Ferro	2,5782E-4	0,0462725	1,22549	4,741557	8,23545				
Deuterio*	5,6622E-2	1,7866E-3	3,7865E-4	2,224033	4,25554				

* $\sigma_s(1-2) = 0,118575$; $\sigma_s(2-1) = 7,99293 E-4$

TABELA 4.10 - Secções de Choque do Hexágono de Combustível (barns)

	CONC.	σ_{a1}	σ_{a2}	σ_{tr}	σ_{tr}	$\sigma_s(1-2)$	$\sigma_s(2-1)$
Oxigênio	3,2766E-2	2,9124E-2	1,765E-4	2,67592	3,86949		
Ferro	7,8246E-5	1,87537E-3	0,92577	3,07978	5,13561		
Alumínio	7,2088E-4	7,7862E-3	0,00723	3,31936	0,05308		
B - 10	6,2685E-5	0,583296	120,7133	3,19829	88,2639		
Deuterio	6,5533E-2	2,06155E-2	4,0657E-4	2,69454	3,910	0,1500393	6,4882E-4

TABELA 4.11 - Secções de Choque do Hexágono de Controle (barns)

	D	Σ_a	$\Sigma_s(1 \rightarrow 2)$	$\Sigma_s(2 \rightarrow 1)$
Grupo 1	1,2522	1,4712E-8	-	6,7772E-6
Grupo 2	0,83323	2,3804E-5	0,012583	-

	σ_{tr}	σ_a	$\sigma_s(1 \rightarrow 2)$	$\sigma_s(2 \rightarrow 1)$
Grupo 1	4,005389	2,21266E-7	-	1,01974E-4
Grupo 2	6,019404	3,5817E-4	0,18933	-

Concentração: 0,06646 átomos/barn.cm

TABELA 4.12 - Secções de Choque do Hexágono de Refletor.

	D	Σ_a	$\Sigma_s(1 \rightarrow 2)$	$\Sigma_s(2 \rightarrow 1)$
Grupo 1	1,2609	1,4253E-5	-	3,6347E-5
Grupo 2	0,8752	2,8434E-4	0,010628	-

	σ_{tr}	σ_a	$\sigma_s(1 \rightarrow 2)$	$\sigma_s(2 \rightarrow 1)$
Grupo 1	3,97775	2,1446E-4	-	5,469E-4
Grupo 2	5,73074	4,2783E-3	0,159916	-

Concentração: 0,06646 átomos/barn.cm

TABELA 4.13 - Secções de Choque do Hexágono da Parede do Tanque.

	σ_{a1}	σ_{a2}	σ_{f1}	σ_{f2}	ν_1	ν_2
U-236	17,02564	1,4399				
U-237	17,16239	132,67512				
Np-237	24,49067	71,873425				
U-239	0,67298	10,622	0,27283	4,2009		
Np-239	26,341	16,654				
Np-240	0,0	0,0				
Pu-239	24,2688	545,66	14,403	348,89	2,90049	2,8900
Pu-240	366,63033	96,495744				
Pu-241	58,229	504,97	29,986	352,73	3,0349	3,030
Pu-242	52,2546	5,1003				
I-135	0,0	0,0				
Xe-135	243,47	1064780,0				
Nd-147	0,0	0,0				
Pm-147	248,78	65,814				
Pm-148	3368,4	420,09				
Pm-148m	2921,0	7561,6				
Pm-149	0,0	0,0				
Sm-149	105,85	23387,4				
LLFP*	10,376	19,429				

* Produtos de fissão de longa vida

TABELA 4.14 - Seções de Choque Microscópicas (Barns)

	λ (seg ⁻¹)
I-135	2,874 E - 5
Xe-135	2,093 E - 5
Nd-147	7,228 E - 7
Pm-147	8,289 E - 9
Pm-148	1,488 E - 6
Pm-148m	1,976 E - 7
Pm-149	3,626 E - 6
U-237	1,190 E - 6
U - 239	4,915 E - 4
Np-239	3,410 E - 6
Np-240	1,583 E - 3

TABELA 4.15 - Constantes de Decaimento

	U-235	U-238	Pu-239	Pu-241
I-135	0,0617	0,0578	0,0693	0,0626
Xc-135	0,0024	0,0022	0,0027	0,0024
Nd-147	0,0113	0,0210	0,0130	0,0120
Pm-149	0,0236	0,0280	0,0205	0,0220
LLFP	0,9010	0,8910	0,8945	0,9010

TABELA 4.16 - Frações de Produção dos produtos de fissão/fissão.

Grupo	U-235	U-238	Pu-239	Pu-241
1	0,00052	0,000475	0,00024	0,00015
2	0,00346	0,00536	0,00176	0,00365
3	0,0031	0,00634	0,00136	0,00275
4	0,00624	0,01519	0,00207	0,0062
5	0,00182	0,00881	0,00065	0,0024
6	0,00066	0,00294	0,00022	0,0005

TABELA 4.17 - Frações de Produção dos Neutrons atrasados/fissão

Isótopo	24 horas	120 horas	480 horas	840 horas	1200 horas
U-235	0,37696E+6	0,37233E+6	0,35598E+6	0,34100E+6	0,32728E+6
U-238	0,35893E+8	0,35888E+8	0,35870E+8	0,35854E+8	0,35837E+8
Pu-239	0,12421E+3	0,23478E+4	0,15254E+5	0,27027E+5	0,37262E+5

TABELA 4.18 - Inventário dos Isótopos x tempo (gramas)

Isótopo	24 horas	120 horas	480 horas	840 horas	1200 horas
U-235	0,37683E+6	0,37212E+6	0,35497E+6	0,33905E+6	0,32421E+6
U-238	0,35863E+8	0,35859E+8	0,35842E+8	0,35826E+8	0,35810E+8
Pu-239	0,12859E+3	0,23452E+4	0,15505E+5	0,27730E+5	0,38486E+5

TABELA 4.19 - Resultado do CITATION (gramas)

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Os resultados obtidos com os códigos foram bastante consistentes e dentro do que se esperava. Os objetivos propostos foram alcançados, adquirindo um domínio sobre os códigos, embora não absoluto, mas dentro de um limite bastante satisfatório, e um conhecimento básico da teoria da Física de Reatores suficientes para a operação dos códigos. Com a experiência adquirida neste trabalho, é possível agora considerar análises de segurança e análises de ciclos de combustível de reatores particulares.

Para algum trabalho posterior com códigos de depleção, sugere-se:

- solucionar o problema de depleção com geometria hexagonal-z e comparar o tempo de computação e a região de memória ocupada, com a triangular-z;

- solucionar o mesmo problema calculando a configuração crítica das barras de controle, isto é, determinando a posição das barras em cada passo de tempo.

APÊNDICE A - DEFINIÇÃO DE UM PROBLEMA PADRÃO COMPUTACIONAL

De acordo com a Ref. 4 um problema padrão ("benchmark problem") é um problema matematicamente bem definido para o qual tanto solução analítica como solução aproximada bastante precisa são conhecidas⁽⁵⁾. A exigência matematicamente bem definido exerce uma função muito importante: tende a eliminar discrepâncias entre soluções que são devido a formulações matemáticas diferentes para o mesmo problema. Estas formulações pode resultar em duas soluções diferentes, que é indesejável para uma padronização. Definindo dois problemas padrões separados, um para cada tipo de formulação, eliminaria tais discrepâncias.

Para uma melhor clareza e uso, um problema padrão computacional é usualmente dividido em três partes distintas: situação de fonte, definição e solução do problema padrão.

A situação de fonte é uma descrição da situação física da qual os problemas padrões são derivados. Detalhes do sistema tais como dimensões, materiais, temperaturas, etc., são dados na situação de fonte. Na segunda parte, definição do problema, o modelo matemático do problema a ser solucionado é dado incluindo as equações a serem solucionadas, os coeficientes das equações, a geometria, e condições iniciais e/ou condições de contorno. Neste ponto existe uma flexibilidade no desenvolvimento de um problema padrão, com a condição de que o resultado final seja um problema matematicamente bem definido. Por exemplo, um problema estático de teoria de difusão bi-dimensional e 2 grupos de energia com condição de contorno externo de

fluxo igual a zero constituiria uma definição de um problema padrão, e a mesma descrição do problema com condição de contorno externo de corrente igual a zero, constituiria uma segunda definição de problema padrão. Finalmente a terceira parte é a solução do problema. A solução, se numérica, incluiria também resultados que mostram como a precisão depende do nível de discretização (por exemplo, k_{ef} versus o número de malhas espaciais), o computador usado, o espaço de memória ocupado, tempo de computação, etc.

APÊNDICE B - ESTABILIDADE DO MÉTODO UTILIZADO PELO CÓDIGO
GAPOTKIN

Das características da matriz G na equação (2.15) pode-se deduzir que o método proposto é estável e produz uma solução assintoticamente correta⁽¹¹⁾. Para provar estas afirmações, deve-se lembrar de certos teoremas a respeito de matrizes não-negativas.

Uma matriz quadrada, por exemplo, \underline{B} , é não-negativa se todos os elementos de \underline{B} forem maiores ou iguais a zero. Denota-se uma matriz não-negativa \underline{B} por $\underline{B} \geq 0$. Assim, se $b_{ij} \geq 0$ para todo i, j , então $\underline{B} \geq 0$ e vice-versa. Se $b_{ij} > 0$ para todo i, j , então \underline{B} é uma matriz positiva e é denotada por $\underline{B} > 0$. Se $\underline{B} \geq 0$ e $\underline{B}^k > 0$ para algum inteiro positivo k , então \underline{B} é chamada uma matriz positiva. Uma matriz \underline{B} , não necessariamente não-negativa ou primitiva, é redutível se existe uma matriz permutação \underline{P} da mesma ordem de \underline{B} , tal que

$$\underline{P} \underline{B} \underline{P}^T = \underline{B}' = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ 0 & \underline{B}_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

As submatrizes \underline{B}_{11} e \underline{B}_{22} são quadradas, mas não necessariamente da mesma ordem. Se tal permutação não existe, então \underline{B} é irredutível.

Observa-se que a matriz \underline{G} é não-negativa, irredutível e primitiva para todos os valores de ρ , h e ω_0 .

A importante propriedade teórica do presente in

teresse é o teorema de Perron-Frobenius que estabelece, em parte, que se \underline{G} é não-negativa, irredutível e primitiva, então:

1) \underline{G} tem um autovalor real e positivo, por exemplo γ_0 , que é maior em magnitude do que os outros autovalores de \underline{G} ;

2) o autovetor correspondente a γ_0 tem todas as componentes positivas;

3) se qualquer elemento de \underline{G} é acrescido (ou decrescido), então γ_0 é também acrescido (ou decrescido). A prova deste teorema pode ser vista na Ref. 17.

O teorema implica que o procedimento numérico tem um autovalor que é maior que os outros e é real e positivo. Além disso, o autovetor correspondente tem componentes positivas. Relativamente a este autovetor positivo, todas as outras harmônicas decaem com o aumento de j . Abaixo será mostrado que este autovetor positivo é também o autovetor $\underline{\mu}_0$ de $\underline{\Lambda}$, onde $\underline{\mu}_0$ é o autovetor correspondente a ω_0 , e assim, a solução numérica é assintoticamente proporcional a solução analítica. Além do mais, o método numérico é estável no sentido de que todas as outras harmônicas decaem, e a diferença nas soluções numérica e analítica é limitada.

O autovetor $\underline{\mu}_0$ e o autovalor ω_0 obedece a relação

$$\underline{\Lambda} \underline{\mu}_0 = \omega_0 \underline{\mu}_0, \quad (B.2)$$

para a qual se tem

$$(\underline{I} + \underline{D}) \underline{\mu}_0 = (\omega_0 \underline{I} - \underline{D}) \underline{\mu}_0. \quad (\text{B.3})$$

Inserindo a equação (B.3) em

$$\underline{\psi}_{j+1} = \underline{G} \underline{\psi}_j, \quad (\text{B.4})$$

e após alguma álgebra, obtém-se

$$\underline{G} \underline{\mu}_0 = e^{\omega_0 h} \underline{\mu}_0. \quad (\text{B.5})$$

Assim, se $\underline{\mu}_0$ é um autovetor de \underline{A} com autovalor ω_0 , então $\underline{\mu}_0$ é, do mesmo modo, um autovetor de \underline{G} com autovalor $e^{\omega_0 h}$. Sabe-se que $\underline{\mu}_0$ tem componentes positivas. Para mostrar que $\gamma_0 = e^{\omega_0 h}$, isto é, que $e^{\omega_0 h}$ é o maior autovalor de \underline{G} , assume-se o contrário e acha-se uma contradição. Assim, sejam os autovalores e autovetores de \underline{G}^T dados por

$$\underline{G}^T \underline{v}_n = \gamma_n \underline{v}_n, \quad (\text{B.6})$$

onde \underline{G}^T é a transposta de \underline{G} e possui os mesmos autovalores de \underline{G} . Claramente, \underline{G}^T é não-negativa, irredutível e primitiva, se \underline{G} o é também. A matriz \underline{G}^T deve possuir um autovalor maior do que os outros, por exemplo γ_k , e um correspondente autovetor positivo \underline{v}_k pelo teorema de Perron-Frobenius. Assim, tem-se

$$\underline{G}^T \underline{v}_k = \gamma_k \underline{v}_k. \quad (\text{B.7})$$

Multiplicando a equação (B.5) por \underline{v}_k^T , a equação

(B.7) por $\underline{\mu}_0^T$ e subtraindo, obtém-se

$$0 = (e^{\omega_0 h} - \gamma_k) \underline{\mu}_0^T \underline{v}_k, \quad (\text{B.8})$$

que pode ser verdade somente se $\gamma_k = e^{\omega_0 h}$, uma vez que \underline{v}_k e $\underline{\mu}_0$ são positivos.

APENDICE C - CARTÕES DE CONTROLE PARA OPERAÇÃO DE CÓDIGOS

1. GAPOTKIN

```
// EXEC PGM=GAPOTKIN,REGION=320K
//STEPLIB DD DSN=CPAC.GAPOTKIN.LOAD,DISP=SHR,
// VOL=SER=PRTGER,UNIT=SYSPVT
//FT06F001 DD SYSOUT=A
//FT05F001 DD *
INICIO
:
:   Cartões de dados
:
FIM
/*
```

2. CITATION

```
// EXEC PGM=IEBUPDTE,PARM=NEW
//SYSPRINT DD SYSOUT=A
//SYSUT2 DD DSNAME=GGWILLEN,UNIT=SYSDA,DISP=(NEW,PASS),
// SPACE=(CYL,(2,1))
//SYSIN DD*
./ ADD
./ NUMBER NEW1=10,INCR=10

:
:   Cartões de dados
:

./ ENDUP
// EXEC PGM=CITATION,REGION=900K,TIME=0060
//STEPLIB DD DSN=CP018.CITATION.LOAD,DISP=SHR
//FT51F001 DD SYSOUT=A
//FT01F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT02F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT03F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT04F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(3520,(100,50))
//FT05F001 DD DSNAME=GGWILLEN,UNIT=SYSDA,DISP=(OLD,PASS)
//FT06F001 DD SYSOUT=A
//FT07F001 DD DUMMY
```

```
//FT08F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT09F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(3520,(100,50))
//FT10F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(3520,(100,50))
//FT11F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT12F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(3520,(100,50))
//FT13F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(3520,(100,50))
//FT14F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT15F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT16F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT17F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(3520,(100,50))
//FT18F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(3520,(100,50))
//FT19F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
//FT30F001 DD UNIT=SYSDA,SPACE=(13000,(100,50))
/*
```

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AKCAZU, Z.; LELLOUCHE, G.S.; SHOTKIN, L.M. Mathematical methods in nuclear reactor dynamics. New York, Academic Press, 1971.
 2. BARRY, R.F. LEOPARD - a spectrum dependent non-spatial depletion code for the IBM-7094. Pittsburgh, Penn., Westinghouse Electric Corporation, Sep. 1963. (WCAP-3269-26).
 3. BELL, G.I. & GLASTONE, S. Nuclear reactor theory. New York, Van Nostrand Reinhold, 1970.
 4. BENCHMARK PROBLEM COMMITTEE. Argonne Code Center: Benchmark Problem Book. Argonne, Ill., Argonne National Laboratory, Dec. 1972. (ANL-7416, Suppl. 1).
 5. DODS, H.L., Jr. Computational benchmark problems - a review of recent work within the American Nuclear Society Mathematics and Computation Division. Nucl. Sci. Eng., New York, 64:63-73, 1977.
 6. DUDERSTADT, J.J. & HAMILTON, L.J. Nuclear reactor analysis. New York, John Wiley & Sons, 1976.
 7. FOWLER, T.B.; VONDY, D.R.; CUNNINGHAM, G.W. Nuclear reactor core analysis code: CITATION. Oak Ridge, Tenn., Oak Ridge National Laboratory, Jul. 1971. (ORNL-TM-2496, Rev. 2).
 8. GRAVES, H.W., Jr. Nuclear fuel management. New York, John Wiley & Sons, 1979.
 9. GREGORY, M.V. A depletion benchmark in hex-z geometry. Aiken, S.C., Savannah River Laboratory, E.I. du Pont de Nemours & Co., Jun. 1975. (DP-MS-75-59).
 10. HANSEN, K.F. & KOCH, P.K. GAPOTKIN: a point kinetics code for UNIVAC 1108. Argonne, Ill., Argonne National
-

11. HANSEN, K.F.; KOEN, B.V.; LITTLE, W.W., Jr. Stable numerical solutions of the reactor kinetics equations. Nucl. Sci. Eng., New York, 22:51-9, 1965.
12. HENRY, A.F. Nuclear reactor theory. Cambridge, Mass., MIT Press, 1975.
13. KEEPIN, G.R. Physics of nuclear kinetics. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1965.
14. KEEPIN, G.R. & COX, C.W. General solution of the reactor kinetics equations. Nucl. Sci. Eng., New York, 8:670-90, 1960.
15. KUENG, Y. Polynomial approach to reactor kinetics equations. Nucl. Sci. Eng., New York, 66:235-42, 1978.
16. LAMARSH, J.R. Introduction to nuclear reactor theory. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
17. VARGA, R.S. Matrix iterative analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1962.
18. VONDY, D.R. & CUNNINGHAM, G.W. Exposure calculation code module for reactor core analysis: BURNER. Oak Ridge, Tenn., Oak Ridge National Laboratory, Feb. 1979. (ORNL-5180).