

BR74-2738



**ESTUDO NUMÉRICO DA CRITICALIDADE DE REATORES TIPO
PLACA COM TRÊS REGIÕES NA TEORIA DE TRANSPORTE DE UM GRUPO**

Adimir dos Santos

**DISSERTAÇÃO E TESE - IEA 122
IEA - DT - 122**

JANEIRO/1979

CONSELHO DELIBERATIVO

MEMBROS

Klaus Reinach – Presidente

Roberto D'Utra Vaz

Helcio Modesto da Costa

Ivano Humbert Marchesi

Admar Cervellini

PARTICIPANTES

Regina Elisabete Azevedo Baretta

Flávio Gori

SUPERINTENDENTE

Rômulo Ribeiro Pieroni

**ESTUDO NUMÉRICO DA CRITICALIDADE DE REATORES TIPO
PLACA COM TRÊS REGIÕES NA TEORIA DE TRANSPORTE DE UM GRUPO**

Adimir dos Santos

**Dissertação para obtenção do Título de "Mestre - Área
Reatores Nucleares de Potência e Tecnologia do
Combustível Nuclear" - Orientador Dr. Yuji Ishiguro.
Apresentada e defendida em 9 de Agosto de 1978,
no Instituto de Energia Atômica.**

**INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA
SÃO PAULO - BRASIL**

Série DISSERTAÇÃO E TESE IEA

INIS Categories and Descriptors

E21

Transport theory

One-group theory

Criticality

Slabs

Nota: A redação, ortografia e conceitos são de responsabilidade dos autores.

SUMÁRIO

	Página
1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – Objetivo	4
2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS	4
2.1 – A Equação de Transporte de Nêutrons	4
2.2 – A Equação de Transporte de Nêutrons no Modelo de um Grupo de Energia, Geometria Plana com Espalhamento Isotrópico	6
2.3 – Solução pelo Método de Expansão em Autofunções Singulares (Método de Case)	8
2.4 – Relações de Ortogonalidade e o Princípio da Invariância	10
3 – O PROBLEMA DO REATOR CRÍTICO DE 3 REGIÕES	13
4 – RESULTADOS NUMÉRICOS	22
5 – CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES	25
APÊNDICE A – RELAÇÕES DE ORTOGONALIDADE E TABELA DE INTEGRAIS	48
APÊNDICE B – MÉTODO P_N	50
APÊNDICE C – PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL	55
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60

ESTUDO NUMÉRICO DA CRITICALIDADE DE REATORES TIPO PLACA COM TRÊS REGIÕES NA TEORIA DE TRANSPORTE DE UM GRUPO

Artimír dos Santos

RESUMO

A criticalidade de reatores tipo placa consistindo de um meio multiplicativo, "blanket" e um refletor é estudada numericamente com base no método de expansões em autofunções singulares na teoria de transporte de um grupo. Este trabalho tem 3 objetivos principais: (1) mostra-se que o problema de três meios pode ser convertido, usando um método desenvolvido recentemente num conjunto de equações integrais regulares para os coeficientes de expansão tais que soluções baseadas numa teoria exata podem ser obtidas pela primeira vez; (2) resultados numéricos de excelente exatidão que podem ser usados como padrões de comparação para vários métodos aproximados, são apresentados para conjuntos representativos de parâmetros; (3) a exatidão da aproximação P_N , um dos métodos mais frequentemente utilizados, é analisado comparativamente aos resultados exatos.

1 – INTRODUÇÃO

A teoria de transporte de nêutrons é descrita por uma equação fundamental, denominada equação de Boltzmann, derivada a partir de considerações de conservação do número de nêutrons em um volume de controle elementar. De maneira análoga, são obtidas as equações básicas em outros ramos da ciência, por exemplo: Mecânica dos fluidos. A grandeza fundamental desta equação é a densidade angular de nêutrons, uma função de quatro variáveis: a posição (r), a direção do movimento do nêutron (Ω), a energia do nêutron (E) e o tempo (t).

No que concerne ao comportamento do nêutron dentro de um meio material, dois aspectos devem ser considerados. Primeiramente o aspecto microscópico: a grandeza fundamental que caracteriza os materiais (do ponto de vista neutrônico) são as secções de choque microscópicas, que é proporcional a probabilidade de interação entre o nêutron e o meio material; por outro lado há que se salientar o aspecto macroscópico: comportamento médio do número de nêutrons. Dentro deste prisma de análise, a equação de transporte de nêutrons faz a conexão entre os efeitos microscópicos e o macroscópico. As secções de choque microscópicas são funções da espécie nuclear, energia do nêutron (incidente e emergente) e ângulo de espalhamento. Os dados básicos de secções de choque microscópicas, para utilização em Física de Reatores Nucleares, são determinados por processos experimentais. A abordagem teórica desse parâmetro ainda não está completa, mas quando possível, seus dados básicos são corrigidos por métodos teóricos desenvolvidos pela física nuclear (ex.: Efeito Doppler).

Poder-se-ia formular o problema de transporte de nêutrons, elegendo-se um certo contorno de interesse e inserindo-se na equação de transporte de nêutrons, secções de choque que retratassem o comportamento dos nêutrons no meio material. Contudo, seria necessário considerar uma quantidade imensa de detalhes; por exemplo, as secções de choque são funções da energia do nêutron, e nem sempre é possível exprimi-las em funções matemáticas simples. Os efeitos de espalhamento do nêutron podem

Aprovada para publicação em Setembro/1978.

(*) Neste trabalho, o til colocado abaixo de uma grandeza, significa que esta grandeza é um vetor ou matriz

ser anisotrópicos, cada nuclídeo no meio material exibe comportamento diferente do ponto de vista neutrônico, etc., mesmo para situações onde se considera dependência energética das seções de choque simples, espalhamento isotrópico e geometria plana, soluções exatas da equação de transporte de nêutrons para estas condições, ainda não foram possíveis. Portanto, torna-se necessário adotar métodos aproximados para resolver a equação de transporte de nêutrons. Para este propósito pode-se considerar dois caminhos. Na resolução dos problemas que se apresentam na prática, como no projeto neutrônico de um reator nuclear, é necessário adotar-se métodos aproximados. Para estudo teórico da equação de transporte de nêutrons, adota-se modelos fisicamente aproximados, sendo que os resultados numéricos obtidos por estes modelos servem como padrão para comparação com resultados de métodos aproximados.

O método mais vastamente utilizado em Física de Reatores Nucleares para se caracterizar a dependência energética, é o modelo de multigrupos. Neste método divide-se o domínio da variável energia em vários intervalos denominados grupos de energia; as seções de choque e função transferência são tomadas como valores médios em cada grupo. Haverá uma melhor identidade entre o modelo e a realidade física, em princípio, quanto maior for o número de grupos. Por outro lado, pode-se dar um tratamento contínuo na variável energia, expandindo seus parâmetros dependentes em polinômios com intervalo de definição conveniente (zero a infinito), como é o caso dos polinômios de Chebyshev-Laguerre.

Como o fenômeno de espalhamento exibe anisotropia, geralmente expande-se a função transferência em polinômios de Legendre, truncando-se a série numa certa ordem de aproximação. O modelo de espalhamento isotrópico é obtido retendo-se apenas o termo de ordem zero, e quanto ao modelo linearmente anisotrópico, retém-se a série no termo de ordem um.

Quanto à dependência angular, utiliza-se o método S_N , cujo desenvolvimento é devido a Carlson⁽⁸⁾. Este método utiliza um número N de direções descritas para aproximar a dependência angular, transformando as integrais angulares em somatórias. Analogamente ao tratamento da variável energia, pode-se dar um tratamento contínuo à variável angular, expandindo-a em uma série de harmônicos esféricos, que no caso de geometria plana, corresponde à expansão da densidade angular de nêutrons, em polinômios de Legendre (método P_N). Este método foi desenvolvido por Mark⁽²⁸⁾.

Não obstante todos estes métodos que aproximam diretamente a equação de transporte de nêutrons, há uma outra versão simplificada, denominada teoria da difusão, a qual é regida por uma equação diferencial (equação de Helmholtz) para o fluxo total de nêutrons e é imposta uma direção preferencial na migração dos nêutrons, através da lei de Fick⁽²²⁾. No entanto em virtude de suas hipóteses simplificadoras, a teoria de difusão não descreve a realidade física próximo a contornos interfaces e fontes explícitas. Estes fatores são de suma importância para reatores pequenos, como os reatores de pesquisa, cálculos em estrutura fina, como elementos combustíveis, etc.

Os métodos aproximados descritos, possuem como vantagem principal, o fato de seu poder de aplicação em problemas práticos ser vasto, e fornecem solução aproximada de um problema real.

Como foi explanado, há um outro tipo de enfoque que pode ser dado ao problema de transporte de nêutrons, ou seja, procura-se obter soluções exatas de um problema fisicamente aproximado. Atualmente, o campo da pesquisa, no sentido de soluções exatas, situa-se praticamente em problemas de geometria plana, no modelo de um ou dois grupos de energia, embora haja trabalhos em geometria cilíndrica⁽²⁶⁾ e esférica⁽¹³⁾. A principal finalidade das soluções exatas na teoria de transporte de nêutrons é que seus resultados de padrão para comparação com os métodos aproximados, e ainda possibilita uma compreensão da estrutura matemática da equação de transporte.

No senso de soluções exatas na teoria de transporte de nêutrons, o método mais largamente utilizado, é o método de expansões em autofunções singulares ou método de Case⁽⁹⁾. A solução geral da equação de transporte de nêutrons no modelo de um grupo de energia, num meio uniforme com simetria azimutal é obtida, e consiste em uma aplicação do processo de separação de variáveis.

Como a equação de transporte é linear, a solução geral (fluxo angular) é expressa por uma expansão em autofunções ortonormais, cujos coeficientes são determinados a partir das condições de contorno impostas ao problema específico.

Um enfoque diferente foi dado pelo astrofísico Ambarzumian⁽²⁾ em problemas de transferência radiativa, através do método da invariância ("invariant imbedding"). Apesar do método ter sido elaborado originalmente para reflexão difusa de luz numa atmosfera estelar, pode ser aplicado para raios gama e nêutrons. A essência do método consiste em se determinar a função espalhamento através do princípio da invariância, e gerar equações integrais para a reflexão e a transmissão da radiação por este princípio. Este método foi sistematizado por Chandrasekar⁽¹²⁾ e posteriormente aplicado a transporte de nêutrons⁽³¹⁾.

Com a publicação do trabalho de Case⁽⁹⁾ em 1960, a teoria de transporte de nêutrons teve um grande avanço. A solução geral da equação de transporte, no modelo de um grupo de energia foi obtida, e como Case prova e é provado em outros modelos^(29,35), a solução é completa, no senso que, com apropriados coeficientes, pode representar qualquer função, e suas autofunções são ortogonais no intervalo completo $(-1,1)$. Com a demonstração do teorema da completividade e existência das soluções por Case e Zweifel⁽¹⁰⁾, a consistência matemática foi plenamente estabelecida.

Utilizando-se o método de Case, e as propriedades de ortogonalidade no intervalo completo, vários trabalhos foram elaborados^(23,37). Entretanto, na aplicação das propriedades de ortogonalidade das autofunções no intervalo completo, em problemas de meio espaço, o método revelou-se muito trabalhoso, e para problemas de multi-regiões⁽²¹⁾ o método não teve sucesso. Como Kuzell conclui em seu trabalho sobre problemas de multi-regiões; a aplicação das relações de ortogonalidade das autofunções no intervalo completo, são reduzidas a solução de equações integrais de Fredholm. A solução destas respectivas equações não é conhecida em sua forma analítica.

Coube a Kušćer⁽²⁰⁾ o desenvolvimento das propriedades de ortogonalidade das autofunções de Case, em semi-intervalo $(0,1)$, e com estas propriedades McCormick e Mendelson⁽²⁷⁾ resolveram o problema do albedo; surgiram também trabalhos para espalhamento anisotrópico^(25,32). A aplicação destas propriedades para problemas de multi-regiões é muito difícil, porque no senso do método de Kušćer, as equações singulares são resolvidas diretamente.

A introdução da função H de Chandrasekar⁽¹²⁾ por McCormick e Kušćer⁽²⁴⁾ nas relações de ortogonalidade de meio intervalo, simplificou grandemente estas relações. Mas neste sentido, uma abordagem direta foi dada por Pahor e Zweifel⁽³⁰⁾, com o acoplamento dos trabalhos de Chandrasekar⁽¹²⁾ e Case⁽⁹⁾ em problema de transporte de nêutrons. Neste método, o fluxo angular de nêutrons refletido numa interface ou num semi-espaço é expresso em termos do incidente através da função espalhamento. A função de espalhamento S é expressa em termos de função H, e são utilizadas as relações de ortogonalidade de meio intervalo das autofunções deduzidas por McCormick e Kušćer⁽²⁴⁾. Utilizando este recurso, Siewert e Burkart⁽³⁴⁾, resolveram o problema da placa crítica infinitamente refletida no modelo de um grupo de energia, com espalhamento isotrópico. No modelo de espalhamento linearmente anisotrópico, em um grupo de energia, cita-se o trabalho de Burkart et al⁽⁵⁾, e para dois grupos de energia, o trabalho de Ishiguro e Maiorino⁽¹⁸⁾.

Utilizando as várias relações de ortogonalidade citadas, diversos trabalhos foram realizados. Alguns tiveram solução explícita, enquanto que outros recaíram em um sistema de equações regulares para os coeficientes, o qual é resolvido numericamente por um processo iterativo. Para muitos problemas, especialmente os de multi-regiões, nem mesmo esta segunda classe foi possível. A dificuldade principal destes métodos é que eles recaem em sistemas de equações singulares para os coeficientes, dependendo do problema considerado, e sua solução numérica é muito trabalhosa. Entretanto, num recente trabalho⁽¹⁶⁾, Ishiguro propôs um novo método de regularização das equações integrais singulares obtidas para os coeficientes pelas condições de contorno impostas ao problema. O método é direto, e utiliza somente relações de ortogonalidade de meio intervalo das autofunções de Case, e é aplicável tanto

no modelo de um grupo, como em dois grupos de energia, e em princípio pode ser aplicado a qualquer problema de multi-regiões.

1.1 – Objetivo

Há dois propósitos neste trabalho:

- 1) Apresentar a solução exata ao problema do reator crítico de 3 regiões, no modelo de um grupo de energia, que é um problema clássico na teoria da difusão, e anteriormente sem solução na teoria de transporte de nêutrons.
- 2) Comparar os resultados obtidos pelo método P_{NR} com os de solução exata.

2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Considera-se neste capítulo os fundamentos teóricos necessários para o modelo de um grupo de energia, numa forma resumida, uma vez que o detalhamento pode ser encontrado nas referências básicas^(3,11).

2.1 – A Equação de Transporte de Nêutrons

Seja um volume dV , na posição r .

Define-se:

$N(r, \Omega, E, t)$ = Densidade angular de nêutrons, número médio de nêutrons na posição r , com velocidade na direção Ω e energia E , no tempo t , por unidades de volume, ângulo sólido e energia.

A lei fundamental que descreve o comportamento da densidade angular de nêutrons neste elemento de volume dV é uma equação de balanço, ou seja, a conservação do número de nêutrons $N(r, \Omega, E, t) dV d\Omega dE$ no tempo. A equação geral de transporte de nêutrons, deduzido a partir desta lei é escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N(r, \Omega, E, t) + v\Omega \cdot \nabla N(r, \Omega, E, t) + \sigma(r, E, t) v N(r, \Omega, E, t) = \\ = \int_{E'} \int_{\Omega'} \sigma(r, E', t) f(r, \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) v' N(r, \Omega', E', t) d\Omega' dE' + Q(r, \Omega, E, t) \end{aligned} \quad 2.1.1$$

onde:

$N(r, \Omega, E, t)$ – já definido

$\sigma(r, E, t)$ – Secção de choque macroscópica total, quantidade fundamental que caracteriza os materiais do ponto de vista de comportamento neutrônico, representa a probabilidade de interação entre um nêutron e o meio, por unidade de deslocamento do nêutron.

$f(\underline{r}, \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$ – Função transferência, é a probabilidade que se um nêutron de direção $\underline{\Omega}'$, e energia E' , após sofrer uma interação com um núcleo em \underline{r} , emergja nêutrons secundários com direção entre $\underline{\Omega}$ e $\underline{\Omega} + d\underline{\Omega}$ e energia entre E e $E + dE$.

$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ – Número de nêutrons introduzidos na posição \underline{r} por fontes externas, por unidade de volume, ângulo sólido, energia e tempo.

Na obtenção de equação geral de transporte de nêutrons (2.1.1) são feitas as seguintes limitações e hipóteses:

Flutuações estatísticas na densidade angular de nêutrons não são consideradas. Esta análise pode ser feita utilizando-se outras técnicas, como análise de Fourier.

Colisões nêutron-nêutron são desprezadas. Uma vez que nos reatores nucleares as densidades relativas de nêutrons são baixas. Com esta hipótese a equação geral de transporte de nêutrons torna-se linear.

Correção relativística. Não há necessidade de se considerar os nêutrons de energia muito alta para os casos de interesse na engenharia nuclear.

Nêutrons atrasados. Importante no estudo de cinética de reatores nucleares, mas o objetivo aqui é tratar problemas no estado estacionário, não há necessidade de considerá-los. Para um caso geral, incluindo nêutrons atrasados, há que se modificar o termo de transferência, incluindo uma dependência temporal. Resolve-se a equação de transporte, juntamente com a equação de decaimento dos precursores.

Dependência angular das secções de choque a qual ocorre em casos muito raros, como alguns cristais.

Tempo de interação entre nêutron e o núcleo.

Comportamento ondulatório. O comprimento de onda de de Broglie do nêutron é pequeno comparado com a separação média entre moléculas. O nêutron é descrito classicamente pela sua posição e velocidade.

Efeitos de polarização, oriundos do "spin" e momento magnético do nêutron, são negligenciados devido a sua pequena magnitude.

Decaimento radioativo do nêutron. São desprezados devido ao tempo de vida do nêutron num reator ser muito menor que sua meia-vida.

Exceto estas limitações, e principalmente no estado estacionário, onde os nêutrons atrasados não são importantes, a equação geral de transporte de nêutrons traduz bem a realidade física para todos os problemas da engenharia nuclear.

Os termos que compõem a equação geral de transporte de nêutrons são definidos como segue:

$$-\frac{\partial}{\partial t} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE$$

– variação temporal do número de nêutrons que ocupam o espaço $dV d\underline{\Omega} dE$

$$v\underline{\Omega} \cdot \nabla N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE$$

- fuga total de nêutrons devido ao seu transporte através das fronteiras de dV , por unidade de tempo.

$$\sigma(r, E, t) v N(r, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE$$

- taxa total de interação *nêutron-núcleo por unidade de tempo.

$$\int_{\underline{\Omega}'} \int_{E'} \sigma(r, E', t) f(r, \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) v' N(r, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' d\underline{\Omega} dE dV$$

- número de nêutrons secundários produzidos no espaço $dV d\underline{\Omega} dE$ por espalhamento ou fissão, por unidade de tempo.

$$Q(r, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega} dE dV$$

- número de nêutrons de energia E e direção $\underline{\Omega}$, produzidos no espaço $dV d\underline{\Omega} dE$ por fontes externas, por unidade de tempo.

O produto $vN(r, \underline{\Omega}', E', t)$ é definido como o fluxo angular de nêutrons, e esta grandeza é de interesse principal, do ponto de vista neutrônico, para a engenharia nuclear. Com esta definição a equação 2.1.1 será escrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, \underline{\Omega}, E, t) + \underline{\Omega} \cdot \nabla \Psi(r, \underline{\Omega}, E, t) + \sigma(r, E, t) \Psi(r, \underline{\Omega}, E, t) = \int_{\underline{\Omega}'} \int_{E'} \sigma(r, E', t) f(r, \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \Psi(r, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' + Q(r, \underline{\Omega}, E, t) \quad 2.1.2$$

Devido à complexidade matemática da equação geral de transporte de nêutrons, soluções exatas desta equação são difíceis, não só pelo prisma matemático, mas também dificuldades de caráter físico; as secções de choque são funções muito complicadas da energia do nêutron, e nem sempre é possível exprimir-se esta dependência por uma função simples.

2.2 – A Equação de Transporte de Nêutrons no Modelo de um Grupo de Energia, Geometria Plana com Espalhamento Isotrópico

Para o estado estacionário, geometria plana, meio uniforme (as secções de choque e função transferência não mudam com a posição), o fluxo angular de nêutrons possui simetria azimutal (simetria para rotação em torno do eixo z), a equação de transporte (2.1.2) reduz-se a:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z, \mu, E) + \sigma(E) \Psi(z, \mu, E) = \int_{E'} \int_{\underline{\Omega}'} \sigma(E') f(E', \underline{\Omega}' \rightarrow E, \underline{\Omega}) \Psi(z, \underline{\Omega}', E') dE' d\underline{\Omega}' + Q(z, \mu, E) \quad 2.2.1$$

(*) O produto $v\sigma(r, E, t)$ é probabilidade por unidade de tempo e interação entre nêutron e núcleo.

onde

$$\mu = \underline{k} \cdot \underline{\Omega} = \cos(\theta), \quad \underline{k} \text{ é o versor na direção } z.$$

Uma simplificação imediata pode ser feita na função transferência, supondo que sua dependência angular seja somente do ângulo entre $\underline{\Omega}'$ e $\underline{\Omega}$, isto é sobre $\mu_0 = \underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}$, desta forma pode-se expandir o termo de transferência em polinômios de Legendre.

$$f(E' \rightarrow E, \mu_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(E' \rightarrow E) P_{\ell}(\mu_0) \frac{2\ell+1}{4\pi} \quad 2.2.2$$

Propõe aqui situações onde há espalhamento isotrópico, retendo-se apenas o termo de ordem $\ell=0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z, \mu, E) + \sigma(E) \Psi(z, \mu, E) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{E'} \sigma(E') f_0(E' \rightarrow E) \Psi(z, \mu', E') dE' d\mu' \\ &+ Q(z, \mu, E) \end{aligned} \quad 2.2.3$$

No modelo de um grupo de energia, todos os nêutrons possuem a mesma energia e as seções de choque e função transferência são independentes da energia. Com estas definições a equação 2.2.3 reduz-se a:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z, \mu) + \sigma \Psi(z, \mu) = \frac{\sigma_s + \eta\sigma_f}{2} \int_{-1}^{+1} \Psi(z, \mu') d\mu' + Q(z, \mu) \quad 2.2.4$$

onde:

- σ – seção de choque macroscópica total.
- σ_s – seção de choque macroscópica para espalhamento.
- η – número médio de nêutrons emitidos por fissão.
- σ_f – seção de choque macroscópica de fissão.

Dividindo a equação 2.2.4 por σ e definindo a variável óptica $x = \sigma z$ a equação 2.2.4 será escrita numa forma mais conveniente:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s + \eta\sigma_f}{2\sigma} \int_{-1}^{+1} \Psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad 2.2.5$$

onde:

$\frac{\sigma_s + \eta\sigma_f}{\sigma}$, é o número de nêutrons secundários emitidos por interação.

2.3 – Solução pelo Método de Expansão em Autofunções Singulares (Método de Case)

O método de Case⁽⁹⁾ para solução de equação de transporte (2.2.5) homogênea no modelo de um grupo de energia, com espalhamento isotrópico, tem sido empregado em vários trabalhos, como exposto no capítulo 1. O processo utilizado é o de separação de variáveis, e a solução geral obtida para fluxo angular de nêutrons é constituída de um termo assintótico e um termo contínuo.

Descreve-se o método empregado a seguir: Considere a equação homogênea:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu') d\mu' \quad 2.3.1$$

$$\text{seja } \Psi(x, \mu) = \phi(\nu, \mu) \exp(-x/\nu) \quad 2.3.2$$

onde ν pode ser qualquer número complexo

Substituindo 2.3.2 em 2.3.1, e cancelando a dependência espacial, tem-se:

$$(\nu - \mu)\phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2} \int_{-1}^1 \phi(\nu, \mu') d\mu' \quad 2.3.3$$

Normalizando $\phi(\nu, \mu)$ tal que

$$\int_{-1}^1 \phi(\nu, \mu) d\mu = 1 \quad 2.3.4$$

chega-se a:

$$(\nu - \mu) \phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2} \quad 2.3.5$$

As autofunções $\phi(\nu, \mu)$ serão determinadas de forma que satisfaçam 2.3.4 e 2.3.5

Se $\nu \in (-1, 1)$, obtém-se o modo discreto

$$\phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{\nu - \mu} ,$$

e com a condição 2.3.4 tem-se:

$$1 - \frac{c\nu}{2} \ln\left\{\frac{\nu+1}{\nu-1}\right\} = 0 \quad 2.3.6$$

Equação 2.3.6 determina os autovalores ν , e para este propósito define-se a função de dispersão:

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{cz}{2} \ln\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\} , \quad 2.3.7$$

a qual possui as seguintes propriedades:

- 1) $\Lambda(-z) = \Lambda(z) \rightarrow$ se $\Lambda(\nu_0) = 0$ então $\Lambda(-\nu_0) = 0$
- 2) $\Lambda(z^*) = \Lambda^*(z) \rightarrow$ se $\Lambda^*(\nu_0) = 0$ então $\Lambda(\nu_0^*) = 0$
- 3) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Lambda(z) = 1 - c$
- 4) $\Lambda(z)$ é analítica em todo o plano complexo, exceto no intervalo sobre o eixo real $(-1, 1)$. Quanto ao número de zeros de $\Lambda(z)$, aplica-se o teorema do argumento⁽⁶⁾:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\Lambda'(z)}{\Lambda(z)} dz = \text{número de zeros de } \Lambda(z) - \text{número de polos de } \Lambda(z),$$

e desta condição conclui-se⁽⁶⁾ que $\Lambda(z)$ possui 1 par de autovalores, e serão reais se $c < 1$, e imaginários puros se $c > 1$.

Se $\nu \in (-1, 1)$ tem-se o modo contínuo, e as autofunções serão escritas simbolicamente como:

$$\phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{P}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \quad 2.3.8$$

onde:

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \ln\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \quad 2.3.9$$

P – denota o valor principal de Cauchy-Riemann⁽¹⁴⁾

δ – é o delta de Dirac

Nota-se que as autofunções contínuas são distribuições no sentido de Schwartz, mas a quantidade física fundamental $\Psi(x, \mu)$ possui um significado claro, desde que as autofunções contínuas sempre aparecem sob o sinal de integração como na equação 2.3.10.

A solução geral da equação 2.3.1 será escrita pela seguinte expansão:

$$\Psi(x, \mu) = A(\nu_0) \phi(\nu_0, \mu) \exp(-x/\nu_0) + A(-\nu_0) \phi(-\nu_0, \mu) \exp(x/\nu_0) + \int_{-1}^1 A(\nu) \phi(\nu, \mu) \exp(-x/\nu) d\nu \quad \mu \in (-1, 1) \quad 2.3.10$$

os coeficientes, $A(\nu_0)$, $A(-\nu_0)$ e $A(\nu)$, da expansão em autofunções, podem ser determinados a partir das condições de contorno do problema específico. Os termos que compõe a expansão em autofunções discretas corresponde ao fluxo angular assintótico.

2.4 – Relações de Ortogonalidade das Autofunções e o Princípio da Invariância

As condições de contorno, as quais dependem do tipo de problema, podem ser classificadas como:

- De intervalo completo.

Que são expansões do tipo:

$$f(\mu) = A(\nu_0) \phi(\nu_0, \mu) + A(-\nu_0) \phi(-\nu_0, \mu) + \int_{-1}^1 A(\nu) \phi(\nu, \mu) d\nu, \quad \mu \in (-1, 1) \quad 2.4.1$$

- De meio intervalo

Que são expansões do tipo:

$$g(\mu) = A(\nu_0) \phi(\nu_0, \mu) + A(-\nu_0) \phi(-\nu_0, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \phi(\nu, \mu) d\nu, \quad \mu \in (0, 1) \quad 2.4.2$$

onde $f(\mu)$ e $g(\mu)$ são funções contínuas conhecidas.

Para expansões do tipo 2.4.1 foi provado que é válida para qualquer função $f(\mu)$ satisfazendo a condição de Holder⁽¹⁴⁾, e deduz-se também propriedades de ortogonalidade e normalização^(3,11) as quais são sumarizadas a seguir:

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(\nu, \mu) \phi(\nu', \mu) d\mu = 0 \quad \text{para } \nu \neq \nu' \quad 2.4.3$$

ν, ν' pode ser qualquer autovalor, discreto ou contínuo

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(\pm\nu_0, \mu) \phi(\pm\nu_0, \mu) d\mu = \pm N(\nu_0) \quad 2.4.4$$

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(\nu, \mu) \phi(\nu', \mu) d\mu = N(\nu) \delta(\nu - \nu'), \quad \nu, \nu' \in (-1, 1) \quad 2.4.5$$

onde:

$$N(\nu_0) = \frac{c \nu_0^3}{2} \left\{ \frac{c}{\nu_0^2 - 1} - \frac{1}{\nu_0} \right\} e \quad 2.4.6$$

$$N(\nu) = \nu \left\{ \lambda(\nu)^2 + \left(\frac{\pi c \nu}{2} \right)^2 \right\} \quad 2.4.7$$

Entretanto, a aplicação das relações de ortogonalidade de intervalo completo, revelou-se ser muito limitada⁽²¹⁾, e exceto para problemas de meio infinito, condições de contorno de intervalo completo, podem ser divididas em duas condições de meio intervalo. Assim torna-se possível aplicar unicamente as relações de ortogonalidade e normalização de meio intervalo.

Por outro lado, foi provado que expansões do tipo (2.4.2), são completas para quaisquer funções contínuas $g(\mu)$ satisfazendo a condição de Holder⁽²⁰⁾. Para derivar a função H, adota-se aqui uma técnica mais direta através do princípio de invariância⁽¹²⁾, entretanto pode-se introduzi-la através da solução de problemas de valores de contorno de Riemann-Hilbert na prova de completividade das autofunções em meio intervalo⁽²⁰⁾.

O método da invariância foi introduzido pelo astrofísico Ambarzumian⁽²⁾ na solução de problemas de reflexão difusa da luz por uma atmosfera estelar. Este princípio foi generalizado e formulado sistematicamente por Chandrasekhar⁽¹²⁾ em uma teoria geral para transferência radiativa. Este princípio pode ser aplicado, não só para problemas de transferência radiativa, como também para raios gama e nêutrons.

O princípio estabelece uma relação entre o fluxo angular incidente e o emergente, através da função de espalhamento, num semi-espaco homogêneo como:

$$\Psi(0, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') \Psi(0, \mu') d\mu' \quad , \quad \mu \in (0,1), \quad 2.4.8$$

e assegura ainda que a função espalhamento é invariante com respeito a adição ou subtração de camadas de espessura arbitrária do mesmo material. Portanto a relação entre o fluxo angular incidente e o refletido é válida para qualquer posição x do material:

$$\Psi(x, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') \Psi(x, \mu') d\mu' \quad , \quad \mu \in (0,1) \quad 2.4.9$$

$\Psi(x, \pm \mu)$ são distribuições angulares, portanto deve satisfazer a equação de Boltzmann (2.3.1); substituindo 2.4.9 em 2.3.1, e usando o teorema da reciprocidade para a função espalhamento $S(\mu, \mu') = S(\mu', \mu)$, obtém-se:

$$S(\mu, \mu') = \frac{c\mu\mu'}{\mu + \mu'} H(\mu') H(\mu), \quad 2.4.10$$

onde a função H é definida como:

$$H(\mu) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 S(\mu, \mu') d\mu' \quad 2.4.11$$

Inserindo-se 2.4.10 e, 2.4.11, obtém-se uma equação integral para a função H:

$$H(\mu) = 1 + \frac{c\mu}{2} H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{\mu + \mu'} \quad 2.4.12$$

A função H possui as seguintes propriedades⁽¹⁶⁾.

$$\int_{-1}^1 \phi(\xi, \mu) d\mu = \int_0^1 \phi(\xi, \mu) H(\mu) d\mu, \quad 2.4.13$$

para $\xi = \nu_0$

$$\frac{c\nu_0}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu) d\mu}{\nu_0 - \mu} = 1 \quad 2.4.14$$

e para $\xi = \nu$

$$\frac{c\nu}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu) P}{\nu - \mu} d\mu + H(\nu) \lambda(\nu) = 1 \quad \nu \in (0,1), \quad 2.4.15$$

e pode-se também estender a função H ao plano complexo, limitado ao longo do eixo real de -1 a 0:

$$H(z) = 1 + \frac{cz}{2} H(z) \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{\mu' + z} \quad z \notin (-1,0) \quad 2.4.16$$

Estas equações são usadas extensivamente neste trabalho, para resolver as várias integrais e as relações de ortogonalidade como por exemplo:

Considere autofunções pertencentes ao mesmo meio:

$$\int_0^1 \mu H(\mu) \phi(\nu_0, \mu) \phi(\nu, \mu) d\mu = 0 \quad 2.4.17$$

$$\int_0^1 \mu H(\mu) \phi(\nu_0, \mu) \phi(\nu_0, \mu) d\mu = H(\nu_0) N(\nu_0) \quad 2.4.18$$

$$\int_0^1 \mu H(\mu) \phi(\nu, \mu) \phi(\nu', \mu) d\mu = H(\nu) N(\nu) \delta(\nu - \nu'), \quad \nu, \nu' \in (0,1) \quad 2.4.19$$

Os demais tipos de integrais que envolvem produtos de autofunções pertencentes a meios diferentes estão listadas no apêndice A.

3 – O PROBLEMA DO REATOR CRÍTICO DE 3 REGIÕES

Seja um sistema, consistindo de um meio multiplicativo ($c_1 > 1$) entre $-a_1 < x < a_1$ (em livres caminhos médios), um "blanket" ($c_2 < 1$) de espessura a_2 e envolto por um refletor ($c_3 < 1$) infinito (Figura 3.1). Considera-se que todas as propriedades físicas dos meios (c 's) e a espessura do "blanket" sejam conhecidas, e além disso, todos os meios envolvidos no problema sejam homogêneos.

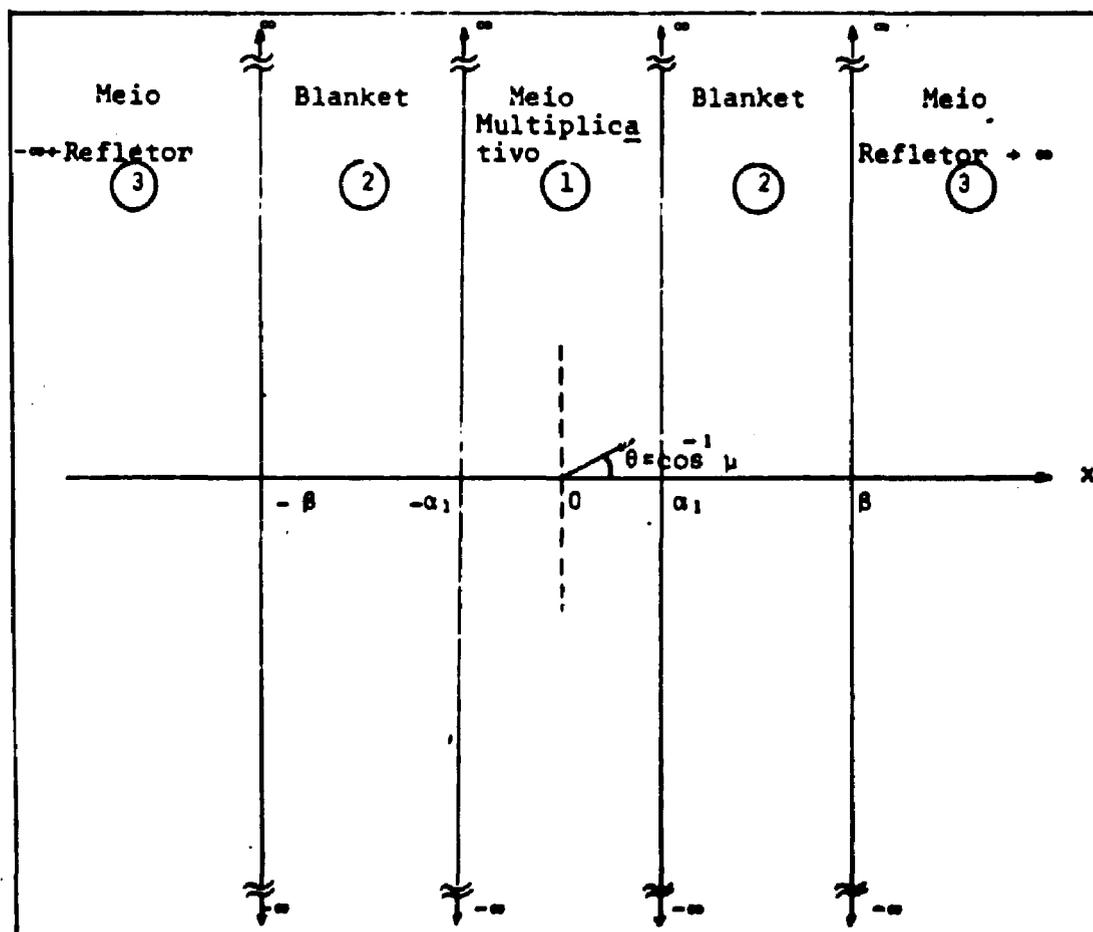


Figura 3.1 – Geometria do Problema.

O objetivo é, utilizando-se do método de Case (expansão em autofunções singulares), e com auxílio das relações de ortogonalidade de meio intervalo, reduzir este problema de três regiões a um conjunto de equações regulares para os coeficientes de expansão no modelo de um grupo de energia. Por outro lado, determina-se a meia espessura crítica, tal que, o sistema considerado no estado estacionário, tenha solução diferente da trivial, e a distribuição angular de nêutrons em todo o espaço.

A origem do sistema cartesiano de coordenadas está localizada no plano de simetria do problema.

As condições físicas impostas ao problema são:

a) Condição de simetria em relação ao plano $x = 0$.

$$\Psi_1(x, \mu) = \Psi_1(-x, -\mu), \quad \mu \in (-1, 1) \quad 3.1.1$$

onde:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad -\alpha_1 < x < \alpha_1 \\ i = 2 & \quad -\beta < x < -\alpha_1 \quad \text{ou} \quad \alpha_1 < x < \beta \\ & \quad \text{onde } \beta = r_1 + \alpha_2 \\ i = 3 & \quad |x| > \beta \end{aligned}$$

b) Como não há fontes no infinito o fluxo angular de nêutrons na região 3 deve ir a zero para $|x| \rightarrow \infty$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi_3(x, \mu) = 0 \quad \mu \in (-1, 1) \quad 3.1.2$$

c) Condição de continuidade do fluxo angular de nêutrons nas interfaces:

$$\Psi_1(\alpha_1, \mu) = \Psi_2(\alpha_1, \mu) \quad \mu \in (-1, 1) \quad 3.1.3$$

$$\Psi_2(\beta, \mu) = \Psi_3(\beta, \mu) \quad \mu \in (-1, 1) \quad 3.1.4$$

Da condição 3.1.1, é possível concluir que é suficiente considerar somente a região $x > 0$, a extensão para a região $x < 0$ é direta.

Pode-se então escrever as soluções gerais nos 3 meios, utilizando 3.1.1 e 3.1.2 como:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, \mu) = & B_1(\nu_1) \phi_1(\nu_1, \mu) \exp\{-(x+\alpha_1)/\nu_1\} + B_2(\nu_1) \phi_1(\nu_1, \mu) \exp\{-(\alpha_1-x)/\nu_1\} \\ & + \int_0^1 B_3(\nu) \phi_1(\nu, \mu) \exp\{-(x+\alpha_1)/\nu\} d\nu + \int_0^1 B_4(\nu) \phi_1(-\nu, \mu) \exp\{-(\alpha_1-x)/\nu\} d\nu, \\ & 0 < x < \alpha_1 \end{aligned} \quad 3.1.5$$

$$\Psi_2(x, \mu) = A_2(\nu_2) \phi_2(\nu_2, \mu) \exp\{-(x-\alpha_1)/\nu_2\} +$$

$$A_3(-\nu_2) \phi_2(-\nu_2, \mu) \exp\{-(\beta-x)/\nu_2\} +$$

$$\int_0^1 A_4(\nu) \phi_2(\nu, \mu) \exp\{-(x-\alpha_1)/\nu\} d\nu +$$

$$\int_0^1 A_2(-\nu)\phi_2(-\nu,\mu) \exp\{-(\beta-x)/\nu\} d\nu \quad 3.1.6$$

$$\alpha_1 < x < \beta$$

$$\Psi_3(x,\mu) = A_3(\nu_3)\phi_3(\nu_3,\mu) \exp\{-(x-\beta)/\nu_3\} +$$

$$\int_0^1 A_3(\nu)\phi_3(\nu,\mu) \exp\{-(x-\beta)/\nu\} d\nu \quad 3.1.7$$

$$x > \beta$$

A condição de simetria no meio multiplicativo, $\Psi_1(x,\mu) = \Psi_1(-x,-\mu)$, $\mu \in (-1,1)$, já foi incorporada.

As relações 3.1.3 e 3.1.4 são condições de continuidade de intervalo completo, que podem então ser divididas em condições de meio intervalo:

$$\Psi_1(\alpha_1, -\mu) = \Psi_2(\alpha_1, -\mu) \quad \mu \in (0,1) \quad 3.1.8$$

$$\dot{\Psi}_1(\alpha_1, \mu) = \dot{\Psi}_2(\alpha_1, \mu) \quad \mu \in (0,1) \quad 3.1.9$$

$$\Psi_2(\beta, -\mu) = \Psi_3(\beta, -\mu) \quad \mu \in (0,1) \quad 3.1.10$$

$$\dot{\Psi}_2(\beta, \mu) = \dot{\Psi}_3(\beta, \mu) \quad \mu \in (0,1) \quad 3.1.11$$

Substituindo as expressões 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7 nas relações acima, e após manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned} & A_2(\nu_2)\phi_2(\nu_2,\mu) + \int_0^1 A_2(\nu)\phi_2(\nu,\mu) d\nu = -A_2(-\nu_2)\phi_2(-\nu_2,\mu) E_2(\nu_2) - \\ & \int_0^1 A_2(-\nu)\phi_2(-\nu,\mu) E_2(\nu) d\nu + B_1(\nu_1)\phi_1(\nu_1,\mu) E_1(\nu_1) + \\ & B_1(\nu_1)\phi_1(-\nu_1,\mu) + \int_0^1 B_1(\nu)\phi_1(\nu,\mu) E_1(\nu) d\nu + \\ & \int_0^1 B_1(\nu)\phi_1(-\nu,\mu) d\nu \quad \mu \in (0,1) \quad 3.1.12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_1(\nu_1)\phi_1(\nu_1,\mu) + \int_0^1 B_1(\nu)\phi_1(\nu,\mu) d\nu = -B_1(\nu_1)\phi_1(-\nu_1,\mu) E_1(\nu_1) - \\ & \int_0^1 B_1(\nu)\phi_1(-\nu,\mu) E_1(\nu) d\nu + A_2(\nu_2)\phi_2(-\nu_2,\mu) + A_2(-\nu_2)\phi_2(\nu_2,\mu) E_2(\nu_2) + \end{aligned}$$

$$\int_0^1 A_2(\nu) \phi_2(-\nu, \mu) d\nu + \int_0^1 A_2(-\nu) \phi_2(\nu, \mu) E_2(\nu) d\nu \quad \mu \in (0,1) \quad 3.1.13$$

$$\begin{aligned} A_2(\nu_2) \phi_2(\nu_2, \mu) + \int_0^1 A_2(\nu) \phi_2(\nu, \mu) d\nu &= A_2(\nu_2) \phi_2(\nu_2, \mu) E_2(\nu_2) + \\ A_2(-\nu_2) \phi_2(-\nu_2, \mu) + \int_0^1 A_2(\nu) \phi_2(\nu, \mu) E_2(\nu) d\nu + \int_0^1 A_2(-\nu) \phi_2(-\nu, \mu) d\nu \\ \mu \in (0,1) \end{aligned} \quad 3.1.14$$

$$\begin{aligned} A_2(-\nu_2) \phi_2(\nu_2, \mu) + \int_0^1 A_2(-\nu) \phi_2(\nu, \mu) d\nu &= A_2(\nu_2) \phi_2(-\nu_2, \mu) + \\ \int_0^1 A_2(\nu) \phi_2(-\nu, \mu) d\nu - A_2(\nu_2) \phi_2(-\nu_2, \mu) E_2(\nu_2) - \\ \int_0^1 A_2(\nu) \phi_2(-\nu, \mu) E_2(\nu) d\nu \quad \mu \in (0,1) \end{aligned} \quad 3.1.15$$

onde:

$$E_1(\xi) = e^{-2\alpha_1/\xi} \quad \xi = \nu_1 \quad \text{ou} \quad \nu \in (0,1) \quad 3.1.16$$

$$E_2(\xi) = e^{-\alpha_2/\xi} \quad \xi = \nu_2 \quad \text{ou} \quad \nu \in (0,1) \quad 3.1.17$$

Nota-se que o lado esquerdo das equações 3.1.12, 3.1.13, 3.1.14, 3.1.15 são expansões típicas de meio intervalo para os coeficientes. Pode-se então aplicar as propriedades de ortogonalidade de meio-intervalo das autofunções, para isolar os coeficientes. Todos os tipos de integrais envolvidas, neste processo são apresentadas no apêndice A; mostra-se aqui apenas os resultados finais:

$$\begin{aligned} A_2(\nu_2) N_2(\nu_2) H_2(\nu_2) &= -A_2(-\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2}{4} H_2^{-1}(\nu_2) - \\ \int_0^1 A_2(-\nu) E_2(\nu) \frac{c_2 \nu \nu_2}{2(\nu + \nu_2)} H_2^{-1}(\nu) d\nu + B_2(\nu_1) E_1(\nu_1) \frac{c_1 \nu_1 \nu_2}{2(\nu_1 - \nu_2)} H_2^{-1}(-\nu_1) + \\ \int_0^1 B_1(\nu) E_1(\nu) \frac{(c_1 - c_2) \nu \nu_2}{2(\nu - \nu_2)} H_2(\nu) d\nu + \int_0^1 B_1(\nu) \frac{c_1 \nu \nu_2}{2(\nu_2 + \nu)} H_2^{-1}(\nu) d\nu + \\ B_1(\nu_1) \frac{c_2 \nu_1 \nu_2}{2(\nu_1 + \nu_2)} H_2^{-1}(\nu_1) \end{aligned} \quad 3.1.18$$

$$\begin{aligned} A_2(\nu) N_2(\nu) H_2(\nu) &= -A_2(-\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu \nu_2}{2(\nu + \nu_2)} H_2^{-1}(\nu_2) - \\ \int_0^1 A_2(-\nu') E_2(\nu') \frac{c_2 \nu \nu'}{2(\nu + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' + B_1(\nu_1) E_1(\nu_1) \frac{c_1 \nu_1 \nu}{2(\nu_1 - \nu)} H_2^{-1}(-\nu_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 B_1(\nu') E_1(\nu') H_2(\nu') \frac{(c_2 - c_1)\nu\nu'}{2(\nu - \nu')} d\nu' + \\
& \nu \left[\lambda_2(\nu) \lambda_1(\nu) + \frac{c_1 \cdot c_2}{4} \nu^2 \pi^2 \right] B_1(\nu) E_1(\nu) H_2(\nu) \\
& + \int_0^1 B_1(\nu') \frac{c_1 \nu \nu'}{2(\nu + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' + B_1(\nu_1) \frac{c_1 \nu \nu_1}{2(\nu_1 + \nu)} H_2^{-1}(\nu_1) \quad \nu \in (0,1)
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Multiplicando a equação 3.1.13 por $\mu H_1(\mu) \phi_1(\xi, \mu)$, $\xi = \nu_1$ ou $\nu \in (0,1)$ e integrando sobre μ de 0 a 1, obtém-se

$$\begin{aligned}
& B_1(\nu_1) N_1(\nu_1) H_1(\nu_1) = -B_1(\nu_1) E_1(\nu_1) \frac{c_1 \nu_1}{4} H_1^{-1}(\nu_1) - \\
& \int_0^1 B_1(\nu') E_1(\nu') \frac{c_1 \nu_1 \nu'}{2(\nu_1 + \nu)} H_1^{-1}(\nu') d\nu' + A_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \nu_1}{2(\nu_1 + \nu_2)} H_1^{-1}(\nu_2) + \\
& A_2(-\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \nu_1}{2(\nu_2 - \nu_1)} H_1^{-1}(-\nu_2) + \int_0^1 A_2(\nu) \frac{c_2 \nu_1 \nu'}{2(\nu_1 + \nu')} H_1^{-1}(\nu') d\nu' + \\
& \int_0^1 A_2(-\nu') E_2(\nu') \frac{(c_2 - c_1)\nu' \nu_1}{2(\nu' - \nu_1)} H_1(\nu') d\nu'
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

$$\begin{aligned}
& B_1(\nu) N_1(\nu) H_1(\nu) = -B_1(\nu_1) E_1(\nu_1) \frac{c_1 \nu \nu_1}{2(\nu + \nu_1)} H_1^{-1}(\nu_1) - \\
& \int_0^1 B_1(\nu') E_1(\nu') \frac{c_1 \nu \nu'}{2(\nu + \nu')} H_1^{-1}(\nu') d\nu' + A_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \nu}{2(\nu_2 + \nu)} H_1^{-1}(\nu_2) + \\
& A_2(-\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \nu'}{2(\nu_2 - \nu)} H_1^{-1}(-\nu_2) + \int_0^1 A_2(\nu) \frac{(\nu') c_2 \nu \nu'}{2(\nu' + \nu)} H_1^{-1}(\nu') d\nu' + \\
& \int_0^1 A_2(-\nu') E_2(\nu') \frac{(c_2 - c_1)\nu \nu'}{2(\nu' - \nu)} H_1(\nu') d\nu' + \\
& \nu \left[\lambda_1(\nu) \lambda_2(\nu) + \frac{c_1 c_2 \nu^2 \pi^2}{4} \right] A_2(-\nu) E_2(\nu) H_1(\nu) \quad \nu \in (0,1)
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Multiplicando a equação 3.1.14 por $\mu H_3(\mu) \phi_3(\xi, \mu)$, $\xi = \nu_3$ ou $\nu \in (0,1)$ e integrando sobre μ de 0 a 1 obtém-se:

$$\begin{aligned}
& A_3(\nu_3) N_3(\nu_3) H_3(\nu_3) = A_2(\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \nu_3}{2(\nu_2 - \nu_3)} H_3^{-1}(-\nu_2) + \\
& A_2(-\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \nu_3}{2(\nu_2 + \nu_3)} H_3^{-1}(\nu_2) + \int_0^1 A_2(\nu) \frac{E_2(\nu) (c_2 - c_3)\nu \nu_3}{2(\nu - \nu_3)} H_3(\nu) d\nu + \\
& \int_0^1 A_2(-\nu) \frac{c_3 \nu \nu_3}{2(\nu_3 + \nu)} H_3^{-1}(\nu) d\nu
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

$$\begin{aligned}
A_3(\nu) N_3(\nu) H_3(\nu) &= A_2(\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \nu}{2(\nu_2 - \nu)} H_2^{-1}(-\nu_2) + \\
A_2(-\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \nu}{2(\nu_2 + \nu)} H_2^{-1}(\nu_2) &+ \int_0^1 A_2(\nu') E_2(\nu') \frac{(c_2 - c_3) \nu \nu' \rho}{2(\nu' - \nu)} H_2(\nu') d\nu' + \\
\nu \left\{ \lambda_3(\nu) \lambda_2(\nu) + \frac{c_2 c_3 \nu^2 \pi^2}{4} \right\} &A_2(\nu) E_2(\nu) H_3(\nu) \\
\int_0^1 A_2(-\nu') \frac{c_2 \nu \nu'}{2(\nu' + \nu)} H_2^{-1}(\nu') d\nu' &\quad \nu \in (0,1) \quad 3.1.23
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação 3.1.15 por $\mu H_2(\nu) \phi_2(\xi, \mu)$, $\xi = \nu_2$ ou $\nu \in (0,1)$ e integrando sobre μ de 0 a 1, obtém-se

$$\begin{aligned}
A_2(-\nu_2) N_2(\nu_2) H_2(\nu_2) &= A_3(\nu_3) \frac{c_2 \nu_2 \nu_3}{2(\nu_2 + \nu_3)} H_2^{-1}(\nu_3) + \\
\int_0^1 A_2(\nu') \frac{c_2 \nu' \nu_2}{2(\nu_2 + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' &- A_2(\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2}{4} H_2^{-1}(\nu_2) - \\
\int_0^1 A_2(\nu') E_2(\nu') \frac{c_2 \nu_2 \nu'}{2(\nu_2 + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' &\quad 3.1.24
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(-\nu) N_2(\nu) H_2(\nu) &= A_3(\nu_3) \frac{c_3 \nu_3 \nu}{2(\nu_3 + \nu)} H_2^{-1}(\nu_3) + \\
\int_0^1 A_2(\nu') \frac{c_3 \nu \nu'}{2(\nu + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' &- A_2(\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu \nu_2}{2(\nu_2 + \nu)} H_2^{-1}(\nu_2) - \\
\int_0^1 A_2(\nu') E_2(\nu') \frac{c_2 \nu \nu'}{2(\nu + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' &\quad \nu \in (0,1) \quad 3.1.25
\end{aligned}$$

Nota-se que as equações para os coeficientes $A_2(\nu)$, $B_1(\nu)$, $A_3(\nu)$ envolvem termos singulares, sendo as singularidades do tipo $\frac{\rho}{\nu' - \nu} E(\nu')$. Para regularizar estas equações procede-se como exposto na referência⁽¹⁶⁾. O mesmo procedimento será aplicado aos coeficientes discretos, porque além de forma semelhante, a experiência mostrou que, em termos numéricos iterativos, essa forma é mais favorável.

Regularização do coeficiente $A_2(\nu)$:

Multiplicando a equação 3.1.13 por $\mu H_2(\mu) \phi_2(\xi, \mu) E_1(\xi)$, $\xi = \nu_2$ ou $\nu \in (0,1)$, integrando sobre μ de 0 a 1, e somando com a equação 3.1.18 para $\xi = \nu_2$, e equação 3.1.19 para $\xi = \nu$, obtém-se

$$A_2(\xi) N_2(\xi) H_2(\xi) = A_3(\nu_3) \frac{c_3 \xi \nu_3}{2(\xi + \nu_3)} E_1(\xi) H_2^{-1}(\nu_3) -$$

$$\begin{aligned}
& A_2(-\nu_2) \frac{c_2 \xi \nu_2}{2(\xi + \nu_2)} H_2^{-1}(\nu_2) E_2(\nu_2) + A_2(-\xi) N_2(\xi) H_2(\xi) E_1(\xi) E_2(\xi) - \\
& \int_0^1 A_2(-\nu') E_2(\nu') \frac{c_2 \xi \nu'}{2(\xi + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' + B_1(\nu_1) \frac{c_1 \nu_1 \xi}{2(\nu_1 - \xi)} H_2^{-1}(-\nu_1) \{E_1(\nu_1) - E_1(\xi)\} \\
& + \int_0^1 B_1(\nu') \nu' \xi H_2(\nu') \frac{(c_1 - c_2)}{2(\nu' - \xi)} \{E_1(\nu') - E_1(\xi)\} d\nu' + \\
& \int_0^1 B_1(\nu') \frac{c_1 \nu' \xi}{2(\nu' + \xi)} H_2^{-1}(\nu') \{1 - E_1(\nu') E_1(\xi)\} d\nu' + \\
& E_1(\xi) \int_0^1 A_2(\nu') \frac{c_2 \xi \nu'}{2(\xi + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' + B_1(\nu_1) \frac{c_1 \xi \nu_1}{2(\xi + \nu_1)} H_2^{-1}(\nu_1) \{1 - E_1(\nu_1) E_1(\xi)\}
\end{aligned}$$

$\xi = \nu_2$ ou $\nu \in (0,1)$ 3.1.26

Analogamente para a equação do coeficiente $B_1(\nu)$, multiplicando a equação 3.1.15 por $\mu H_1(\mu) \phi_1(\xi, \mu) E_2(\xi)$ integrando sobre μ de 0 a 1 e somando com a equação 3.1.20 para $\xi = \nu_1$ e equação 3.1.21 para $\xi = \nu$, obtém-se a seguinte equação para o coeficiente $B_1(\xi)$.

$$B_1(\xi) N_1(\xi) H_1(\xi) = -B_1(\nu_1) E_1(\nu_1) \frac{c_1 \xi \nu_1}{2(\xi + \nu_1)} H_1^{-1}(\nu_1) + R(\xi) \quad 3.1.27$$

onde:

$$\begin{aligned}
R(\xi) = & - \int_0^1 B_1(\nu') E_1(\nu') \frac{c_1 \nu' \xi}{2(\xi + \nu')} H_1^{-1}(\nu') d\nu' + A_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 + \xi)} H_1^{-1}(\nu_2) \{1 - \\
& E_2(\nu_2) E_2(\xi)\} + A_2(-\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 - \xi)} H_1^{-1}(-\nu_2) \{E_2(\nu_2) - E_2(\xi)\} + \\
& \int_0^1 A_2(\nu') \frac{c_2 \nu' \xi}{2(\nu' + \xi)} H_1^{-1}(\nu') \{1 - E_2(\xi) E_2(\nu')\} d\nu' + \\
& \int_0^1 A_2(-\nu') \frac{(c_2 - c_1) \nu' \xi H_1(\nu')}{2(\nu' - \xi)} \{E_2(\nu') - E_2(\xi)\} d\nu' + \\
& A_2(\nu_2) E_2(\xi) \frac{c_2 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 + \xi)} H_1^{-1}(\nu_2) + E_2(\xi) \int_0^1 A_2(\nu') \frac{c_2 \nu' \xi}{2(\nu' + \xi)} H_1^{-1}(\nu') d\nu'
\end{aligned}$$

$\xi = \nu_1$ ou $\nu \in (0,1)$ 3.1.28

A equação para o coeficiente $A_2(-\nu)$ não apresentou termos singulares, pode-se escrever as equações 3.1.24 e 3.1.25 numa forma mais conveniente:

$$\begin{aligned}
A_2(-\xi) N_2(\xi) H_2(\xi) &= A_2(\nu_2) \frac{c_3 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 + \xi)} H_2^{-1}(\nu_2) + \int_0^1 A_2(\nu') \frac{c_3 \nu' \xi H_2^{-1}(\nu')}{2(\nu' + \xi)} d\nu' \\
A_2(\nu_2) E_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 + \xi)} H_2^{-1}(\nu_2) &- \int_0^1 A_2(\nu') E_2(\nu') \frac{c_2 \xi \nu'}{2(\xi + \nu')} H_2^{-1}(\nu') d\nu' \\
&\xi = \nu_2 \quad \text{ou} \quad \nu \in (0,1) \qquad 3.1.29
\end{aligned}$$

Para a regularização do coeficiente $A_3(\nu)$, foi necessário repetir-se o processo 3 vezes. Multiplicando-se simultaneamente a equação 3.1.12 por $\mu H_3(\mu) \phi_3(\xi, \mu) E_2(\xi)$, equação 3.1.13 por $\mu H(\mu) \phi_3(\xi, \mu) E_2(\xi) E_1(\xi)$, equação 3.1.15 por $\mu H_3(\mu) \phi_3(\nu, \mu) E_2(\xi) E_2(\xi) E_1(\xi)$, integrando sobre μ de 0 a 1 e somando com a equação 3.1.22 para $\xi = \nu_3$ e equação 3.1.23 para $\xi = \nu$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
A_3(\xi) N_3(\xi) H_3(\xi) &= A_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 - \xi)} H_2^{-1}(-\nu_2) \{ E_2(\nu_2) - E_2(\xi) \} + \\
&A_2(\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 + \xi)} H_2^{-1}(\nu_2) E_1(\xi) E_2(\xi) \{ 1 - E_1(\xi) E_2(\nu_2) \} + \\
&A(-\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 + \xi)} H_2^{-1}(\nu_2) \{ 1 - E_2(\nu_2) E_2(\xi) \} + \\
&A_2(-\nu_2) \frac{c_2 \nu_2 \xi}{2(\nu_2 - \xi)} H_2^{-1}(-\nu_2) E_1(\xi) E_2(\xi) \{ E_2(\nu_2) - E_2(\xi) \} + \\
&\int_0^1 A_2(\nu') \frac{c_2 \nu' \xi}{2(\nu' + \xi)} H_2^{-1}(\nu') E_1(\xi) E_2(\xi) \{ 1 - E_2(\xi) E_2(\nu') \} d\nu' + \\
&\int_0^1 A_2(\nu') \frac{(c_2 - c_3) \nu' \xi}{2(\nu' + \xi)} H_2(\nu') \{ E_2(\nu') - E_2(\xi) \} d\nu' + \\
&\int_0^1 A_2(-\nu') \frac{c_2 \nu' \xi}{2(\nu' + \xi)} \{ 1 - E_2(\xi) E_2(\nu') H_2^{-1}(\nu') \} d\nu' + \\
&\int_0^1 A_2(-\nu') \frac{(c_2 - c_3) \xi \nu' H_2(\nu')}{2(\nu' - \xi)} E_1(\xi) E_2(\xi) \{ E_2(\nu') - E_2(\xi) \} d\nu' \\
&+ B_1(\nu_1) \frac{c_1 \nu_1 \xi}{2(\nu_1 + \xi)} H_2^{-1}(\nu_1) E_2(\xi) \{ 1 - E_1(\nu_1) E_1(\xi) \} + \\
&E_2(\xi) \int_0^1 B_1(\nu') \frac{(c_3 - c_1) \xi \nu' H_2(\nu')}{2(\xi - \nu')} \{ E_1(\nu') - E_1(\xi) \} d\nu' + \\
&E_2(\xi) \int_0^1 B_1(\nu') \frac{c_1 \nu' \xi}{2(\nu' + \xi)} H_2^{-1}(\nu') \{ 1 - E_1(\xi) E_1(\nu') \} d\nu' + \\
&A_2(\nu_2) \frac{c_2 \xi \nu_2}{2(\xi + \nu_2)} H_2^{-1}(\nu_2) E_1(\xi) E_2(\xi) E_2(\xi) +
\end{aligned}$$

$$E_2(\xi) E_2(\xi) E_1(\xi) \int_0^1 A_2(\nu) \frac{c_2 \xi \nu}{2(\xi + \nu)} H_2^{-1}(\nu) d\nu +$$

$$B_1(\nu_1) \frac{c_1 \nu_1 \xi}{2(\nu_1 - \xi)} H_2^{-1}(-\nu_1) E_2(\xi) \{E_1(\nu_1) - E_1(\xi)\}$$

$$\xi = \nu_2 \quad \text{ou } \nu \in (0,1) \quad 3.1.30$$

As equações 3.1.26, 3.1.27, 3.1.29, 3.1.30 formam um sistema homogêneo acoplado de equações regulares para os coeficientes, e uma vez que a magnitude do fluxo depende da potência do reator, pode-se normalizar uma das incógnitas do problema:

Seja $B_1(\nu_1) = \exp(\alpha_1/\nu_1)$, e com auxílio da equação 3.1.27 para $\xi = \nu_1$, pode-se explicar α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} |\nu_1| + \frac{\nu_1}{2} \ln\left(\frac{x}{z}\right), \quad 3.1.31$$

onde:

$$x = c_1 \nu_1 H_1^{-1}(\nu_1) H_1^{-1}(\nu_1) N_1^{-1}(\nu_1)$$

$$z = 1 - \nu_1 N_1^{-1}(\nu_1) \exp(-\alpha_1/\nu_1) R(\nu_1)$$

A solução da equação de transporte (2.3.1) para o problema do reator crítico de três regiões, foi reduzido ao sistema acoplado de equações integrais regulares, 3.1.26, 3.1.29, 3.1.30, 3.1.31 e 3.1.27 para $\xi = \nu$, o qual será resolvido por um processo numérico iterativo. Há que se salientar que destas equações obtém-se a distribuição angular de nêutrons nas 3 regiões, como proporcional a uma constante arbitrária.

O fluxo total ou escalar é definido como:

$$\phi(x) = \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu') d\mu' \quad 3.1.32$$

Inserindo-se as equações 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7 na definição 3.1.32, obtém-se:

$$\phi_1(x) = \exp(-x/\nu_1) + \exp(x/\nu_1) +$$

$$\int_0^1 B_1(\nu) \exp\{-(x + \alpha_1)/\nu\} d\nu +$$

$$\int_0^1 B_1(\nu) \exp\{-(\alpha_1 - x)/\nu\} d\nu \quad 3.1.33$$

$$\phi_2(x) = A_2(\nu_2) \exp\{-(x - \alpha_1)/\nu_2\} +$$

$$A_2(-\nu_2) \exp\{-(\beta - x)/\nu_2\} +$$

$$\int_0^1 A_2(\nu) \exp\{-(x - \alpha_1)/\nu\} d\nu +$$

$$\int_0^1 A_2(-\nu) \exp\{-(\beta - x)/\nu\} d\nu \quad 3.1.34$$

$$\phi_3(x) = A_3(\nu_3) \exp\{-(x-\beta)/\nu_3\} + \int_0^1 A_3(\nu) \exp\{-(x-\beta)/\nu\} d\nu \quad 3.1.35$$

Com a normalização exposta, as unidades do fluxo total de nêutrons, serão nêutrons por unidades de comprimento ao quadrado por unidade de tempo.

4 – RESULTADOS NUMÉRICOS E COMPARAÇÕES

O propósito deste capítulo é apresentar os resultados numéricos obtidos para a meia distância crítica, fluxo total e angular, calculados pelo método de Case. Além disso, são comparados estes resultados com a solução aproximada (método P_N), cujo desenvolvimento analítico está exposto no apêndice B.

Os cálculos foram feitos em dupla precisão no computador IBM 370/155 do Instituto de Energia Atômica, sendo os programas escritos na linguagem FORTRAN IV-H. O fluxograma e o procedimento computacional estão apresentados no apêndice C.

Definiu-se 51 casos diferentes de parâmetros (c_1, c_2, c_3, α_2) que definem o problema do reator crítico de 3 regiões. Resolvendo-se o sistema acoplado de equações integrais, referido no fim do capítulo 3, obtêm-se os coeficientes de expansão e a meia distância crítica. Na Tabela IV.1 apresenta-se os resultados obtidos para a meia distância crítica, calculados pelos métodos, de Case e P_N , com os respectivos desvios percentuais. A comparação foi feita até $N = 5$.

As integrais envolvidas na determinação dos coeficientes pelo método de Case foram calculadas numericamente pelo método de quadratura de Gauss⁽¹⁹⁾. Neste método, as integrais são expressas como somatórias da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i) + R_N$$

$$\omega_i = \frac{b-a}{2} W_i$$

$$x_i = \frac{1}{2} \{ (b-a)y_i + (b+a) \}$$

W_i – pesos de quadratura

y_i – nós, ou pontos de quadratura

A precisão numérica obtida nesta representação aumenta com N , o número de pontos de quadratura, e para uma escolha conveniente de nós (y_i) e pesos (W_i), tem-se uma expressão exata ($R_N = 0$), se $f(x)$ puder ser expressa por um polinômio de ordem até $(2N - 1)$. Os nós ou pontos de quadratura, e os pesos podem ser encontrados em manuais de tabelas matemáticas⁽¹⁾.

Para todos os casos, dividiu-se o intervalo de integração, (0,1) em dois subintervalos, (0,0.99) e (0.99,1) e em cada subintervalo utilizou-se 32 pontos de quadratura. Isto é devido ao fato da função de normalização $N(\nu)$ e os coeficientes contínuos não serem funções suaves (mostram gradientes altos) perto de $\nu = 1$. O refinamento da meia distância crítica e consequentemente dos coeficientes da expansão foi feita até a sexta casa decimal. Nestas condições, o tempo de computação (C.P.U) variou entre 11 e 19,5 minutos e o número de iterações entre 13 e 25.

Como foi exposto, a solução geral de equação de transporte de nêutrons (2.3.1) é composta de termos discretos, que formam a parte assintótica, e de termos contínuos. Como um dos propósitos da teoria de transporte de nêutrons é fornecer resultados que possam servir de padrão, nas Tabelas IV.2 e IV.3 são apresentados os fluxos totais para os casos 44 e 3 respectivamente. Ao mesmo tempo faz-se uma comparação destes resultados com o método P_N ; inicialmente observa-se que a concordância dos resultados pelo método P_N , aumenta com N . Além disso, são apresentados os fluxos totais assintóticos. Nota-se que a aproximação P_1 tem a tendência de acompanhar o fluxo total assintótico quando os parâmetros físicos dos meios (c 's) são próximos de 1 quando a influência dos termos contínuos são pequenas (caso 3).

Nas Tabelas IV.4, IV.5 e IV.6 são apresentados os coeficientes contínuos para seis casos, enquanto que os discretos correspondentes são apresentados na Tabela IV.7. Nota-se quando o sistema torna-se mais multiplicativo, há um aumento dos coeficientes contínuos. Para os casos onde $c_2 > c_3$, sempre houve a mesma tendência de comportamento para os coeficientes contínuos; portanto apresentou-se somente 4 casos com essa característica. Nota-se que fixando os parâmetros físicos dos meios e aumentando a espessura do "blanket" $B_1(\nu)$ e $A_2(\nu)$ em módulo, aumentam de valor, enquanto que $A_2(-\nu)$ e $A_3(\nu)$ diminuem. Mas comparativamente $A_2(-\nu)$ e $A_3(\nu)$ sofrem mudanças mais bruscas do que $B_1(\nu)$ e $A_2(\nu)$. Para os casos onde $c_2 < c_3$, houve uma mudança no comportamento dos coeficientes contínuos $A_3(\nu)$ e $A_2(-\nu)$, como pode ser visto na Tabela IV.6. Isto é devido a reflexão de nêutrons na interface 2, e para uma escolha conveniente de c_2 , c_3 e α_2 será bem pronunciada.

A aproximação P_1 , que pode ser considerada equivalente a teoria da difusão em geometria plana^(3,11), corresponde a parte assintótica de solução (2.3.10) para situações onde os meios são pouco absorventes ou pouco multiplicativos, e nos pontos x onde os termos contínuos não são relevantes, como será visto a seguir:

Considere o fluxo angular assintótico de solução exata (método de Case):

$$\Psi_{\text{ass}}(x,\mu) = A(\nu_0) \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\nu_0 - \mu} \exp(-x/\nu_0) + A(-\nu_0) \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\nu_0 + \mu} \exp(x/\nu_0) \quad 4.1.1$$

sabe-se que:

$$\lim_{c \rightarrow 1} \nu_0 = \infty \quad 4.1.2$$

Expandindo em série de Taylor até a primeira ordem, as autofunções discretas, para $c \sim 1$:

$$\frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\nu_0 \pm \mu} = \frac{c}{2} \left\{ 1 \mp \frac{\mu}{\nu_0} \right\} \quad 4.1.3$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ass}}(x,\mu) = & \frac{c}{2} \{ A(\nu_0) \exp(-x/\nu_0) + A(-\nu_0) \exp(x/\nu_0) \} + \\ & \frac{c\mu}{2\nu_0} \{ A(\nu_0) \exp(-x/\nu_0) - A(-\nu_0) \exp(x/\nu_0) \} \quad 4.1.4 \end{aligned}$$

$$\Psi_{\text{ass}}(x, \mu) = \frac{1}{2} \phi_{\text{ass}} - \frac{\mu}{2} \frac{d\phi_{\text{ass}}}{dx} \quad (c \sim 1) \quad 4.1.5$$

onde:

$$\phi_{\text{ass}}(x) = \int_{-1}^{+1} \Psi_{\text{ass}}(x, \mu) d\mu$$

Utilizando-se da definição da corrente total:

$$J_{\text{ass}}(x, \mu) = \int_{-1}^{+1} \mu \Psi_{\text{ass}}(x, \mu) d\mu \quad 3.1.7$$

Obtém-se

$$J_{\text{ass}}(x) = -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \phi_{\text{ass}}(x) .$$

que é a lei de Fick, hipótese fundamental para a teoria da difusão. A mesma relação entre corrente e fluxo total de nêutrons é obtida pela aproximação P_1 ^(3.11). Portanto tem-se uma relação $J(x) = -D \frac{d\phi}{dx}$ para os pontos x , onde os termos contínuos não são relevantes e quando $c \sim 1$. Nota-se pela Tabela IV.1 que a meia distância crítica calculada pela aproximação P_1 é bem próxima da exata quando $(c_1, c_2 \text{ e } c_3)$ são próximos de 1 e se afasta de meia distância crítica exata, a medida que esses parâmetros se afastam de 1. Como já foi dito, ao fixar-se c_1, c_2, c_3 e aumentar-se α_2 , para os casos onde $c_2 > c_3$, há uma diminuição brusca, em módulos, dos coeficientes contínuos $A_2(-\nu)$ e $A_3(\nu)$, o que justifica a diminuição do desvio percentual da meia distância crítica da aproximação P_1 , neste sentido.

Como mostra S. Gallone et al ⁽¹⁵⁾, há uma forte correlação entre a solução proposta pelo método P_N e a solução exata (método de Case). O método P_N é a expansão da solução exata em polinômios de Legendre. A contribuição do maior autovalor ν_{0N} , corresponde a expansão da parte assintótica em polinômio de Legendre até a ordem N , enquanto que a contribuição das raízes remanescentes corresponde a expansão do termo contínuo da solução geral em polinômios de Legendre.

Nota-se que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_{0N} = \nu_0 \quad (\text{raiz da função de dispersão})$$

onde ν_{0N} é o maior auto valor obtido pela aproximação P_N .

Diante disso, três fatores interferem decisivamente no desvio padrão percentual da meia distância entre os métodos, de Case e P_N :

- 1) A ordem N de aproximação. Quando maior N , tem-se mais precisão no autovalor discreto calculado pelo método P_N (vide Tabela IV.8). O termo contínuo da solução exata é aproximado pelo método P_N , através de uma somatória com os autovalores menores que ν_{0N} . Quanto maior N , mais próximo será a identidade entre esta somatória e o termo contínuo.
- 2) O valor de c . Quando $c \rightarrow 1$, para uma ordem N fixa, a precisão do autovalor discreto aumenta neste sentido (vide Tabela IV.8).

- 3) A espessura do "blanket". Quando se aumenta esta espessura, em geral, em módulo $B_1(\nu)$ e $A_2(\nu)$ diminuem enquanto que $A_2(-\nu)$ e $A_3(\nu)$ aumentam.

Pela análise dos 51 casos, nota-se em geral que o desvio percentual da meia distância crítica calculada pela aproximação P_1 , segue o comportamento de $A_2(-\nu)$ e $A_3(\nu)$. Para os casos onde $c_2 < c_3$, como já foi dito, esses coeficientes mudaram de comportamento, e escolheu-se c_2 , c_3 e α_2 convenientemente, nota-se uma subida do fluxo total no refletor, devido a reflexão dos nêutrons. Isto pode ser visto na Figura 4.5, onde é apresentado o fluxo total para o caso 50. O desvio percentual da meia distância crítica calculada pelas aproximações P_3 e P_5 seguem o comportamento de $B_1(\nu)$ e $A_2(\nu)$, porque em módulo, eles são maiores que $A_2(-\nu)$ e $A_3(\nu)$.

Uma comparação gráfica do método de Case, é feita nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, onde são apresentados os fluxos totais para os casos 1, 3, 43, 44 e 50 respectivamente. Em todos esses casos comparou-se somente a aproximação P_1 , uma vez que, P_3 e P_5 são muito próximos de solução exata. Quanto ao fluxo angular de nêutrons a comparação em alguns casos, pôde ser feita até P_3 , como mostra as Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 para os casos 3, 40, 21 e 24 respectivamente. Nota-se que embora o fluxo total calculado pela aproximação P_3 e P_5 sejam próximos do exato, o mesmo não ocorre com o fluxo angular. Devido a descontinuidade física dos meios, pode-se notar a descontinuidade dos fluxos angulares exatos nas interfaces^(3,11). Comportamento diverso ocorre com o método P_N , uma vez que, o fluxo angular de nêutrons por este método, é dado por uma soma de funções contínuas.

Nas Tabelas IV.9 e IV.10 são apresentadas as distribuições angulares de nêutrons nas interfaces para o caso 3 enquanto que para o caso 40 são apresentados nas Tabelas IV.11 e IV.12.

5 – CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

No presente trabalho, considerou-se um problema de multi-regiões, anteriormente sem solução exata na teoria de transporte de nêutrons. Mostrou-se que, partindo do método de Case, expansão em autofunções singulares, e com auxílio das relações de ortogonalidade de meio intervalo, a regularização dos coeficientes para o problema do reator crítico de 3 regiões pôde ser efetuada, utilizando-se do método exposto na referência⁽¹⁶⁾. O método em si, é aplicável tanto a problemas de um grupo, como de dois grupos de energia⁽¹⁷⁾, e pode em princípio ser aplicado a qualquer problema de multi-regiões. A precisão numérica foi satisfatória, e obteve-se em todos os casos, um mínimo de 7 dígitos de precisão. Quanto ao método P_N , observou-se que as aproximações P_3 e P_5 são boas aproximações para o fluxo total de nêutrons, embora isto não aconteça para a distribuição angular.

Como sugestão para estudo posterior, propõe-se um estudo para o modelo de espalhamento linearmente anisotrópico, utilizando-se esta técnica.

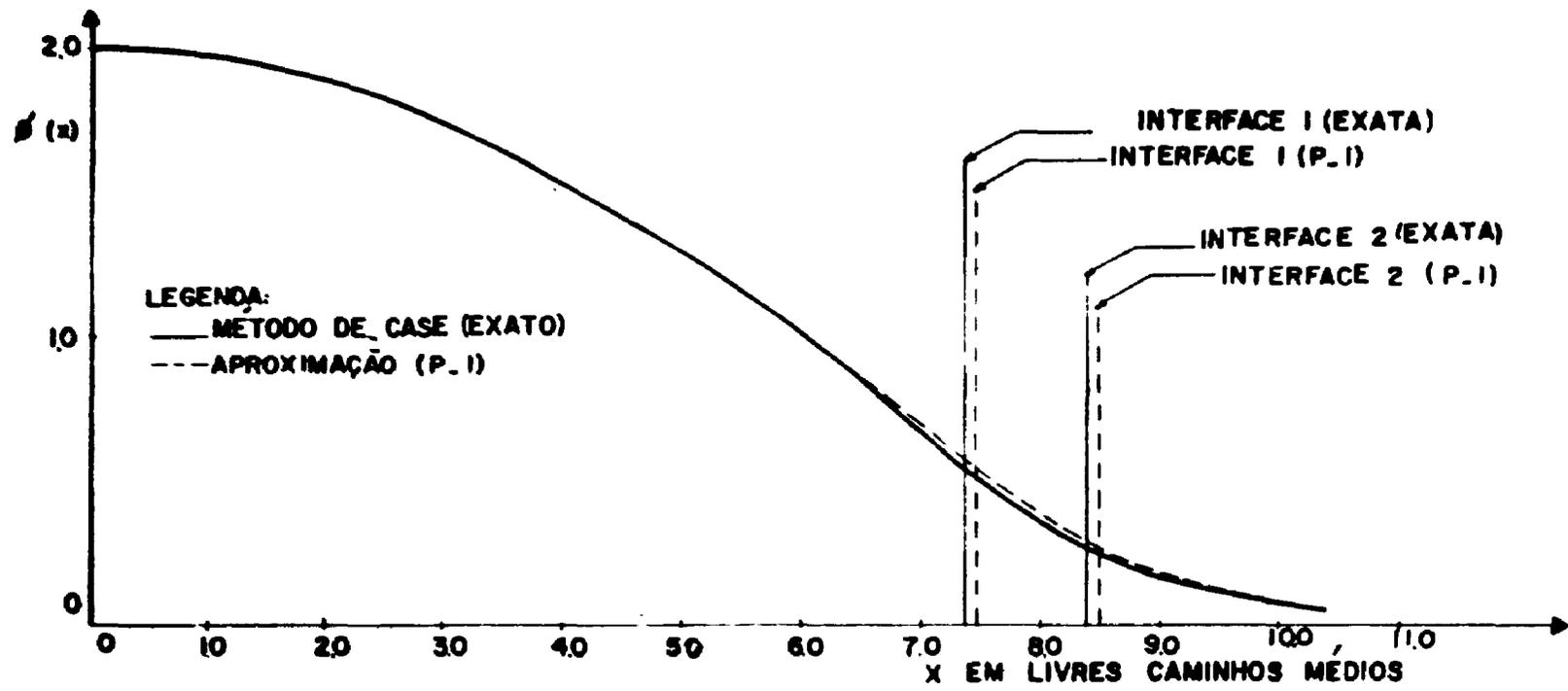


Figura 4.1 - Fluxo Escalar para o CASO 1

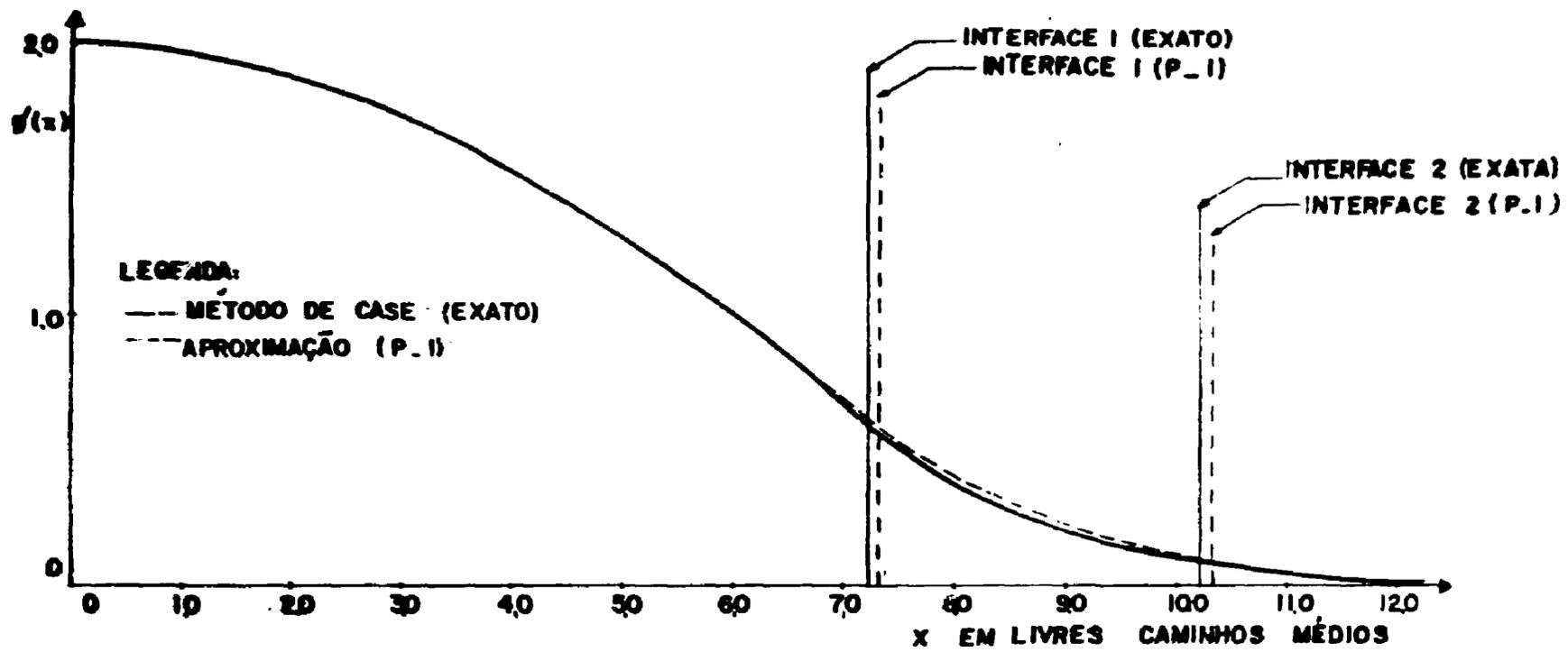


Figura 4.2 - Fluxo Escalar para o CASO 3

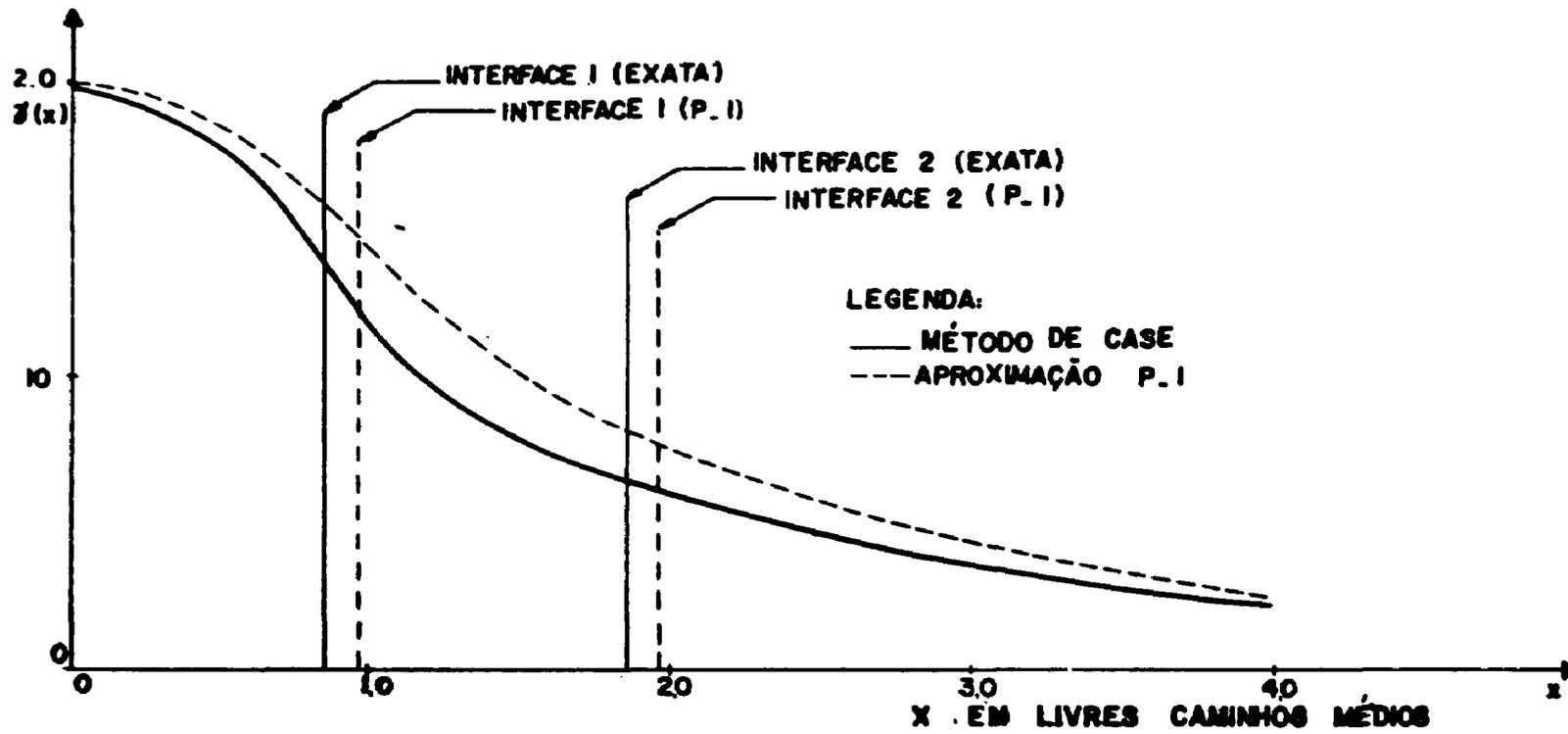


Figure 4.3 - Fluxo Escalar para o CASO 43

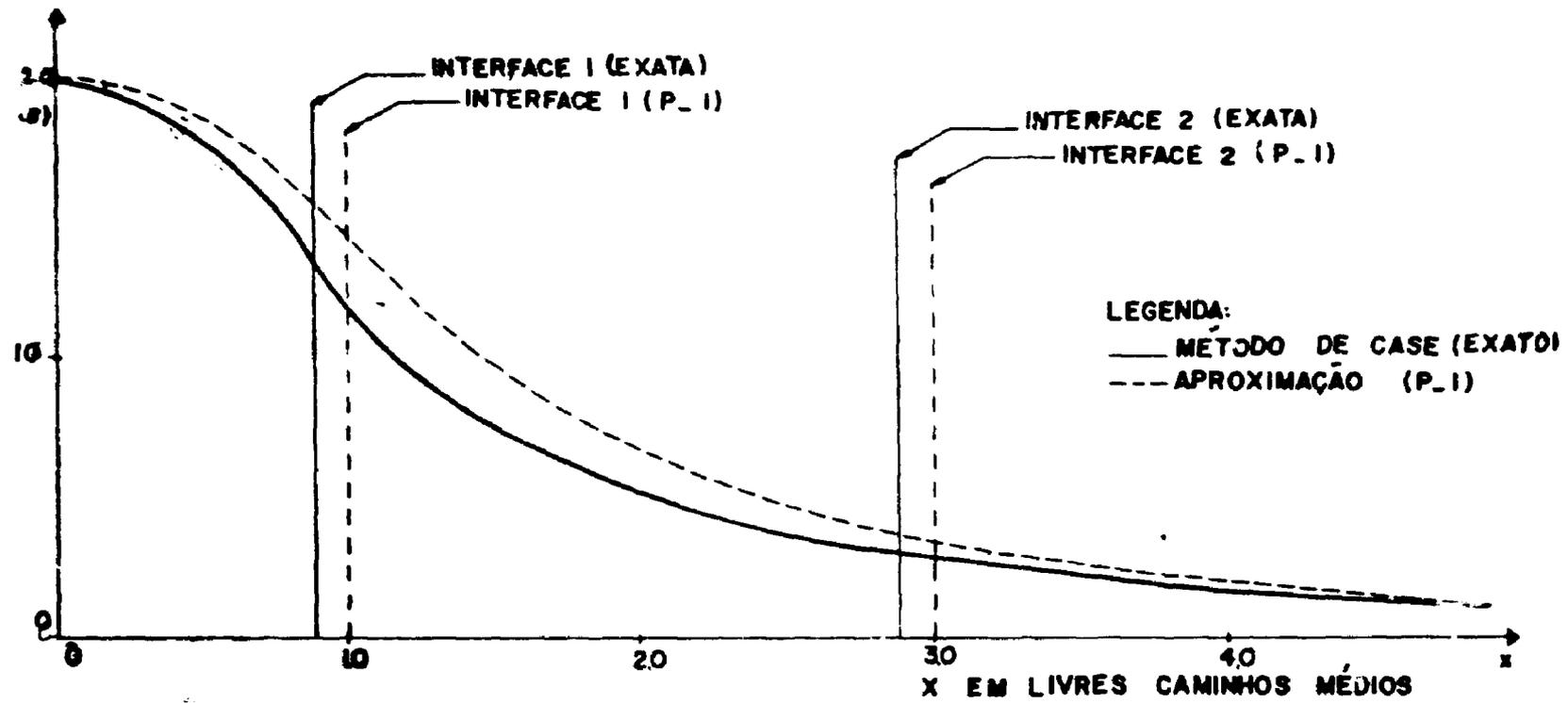


Figura 4.4 — Fluxo Escalar para o CASO 44

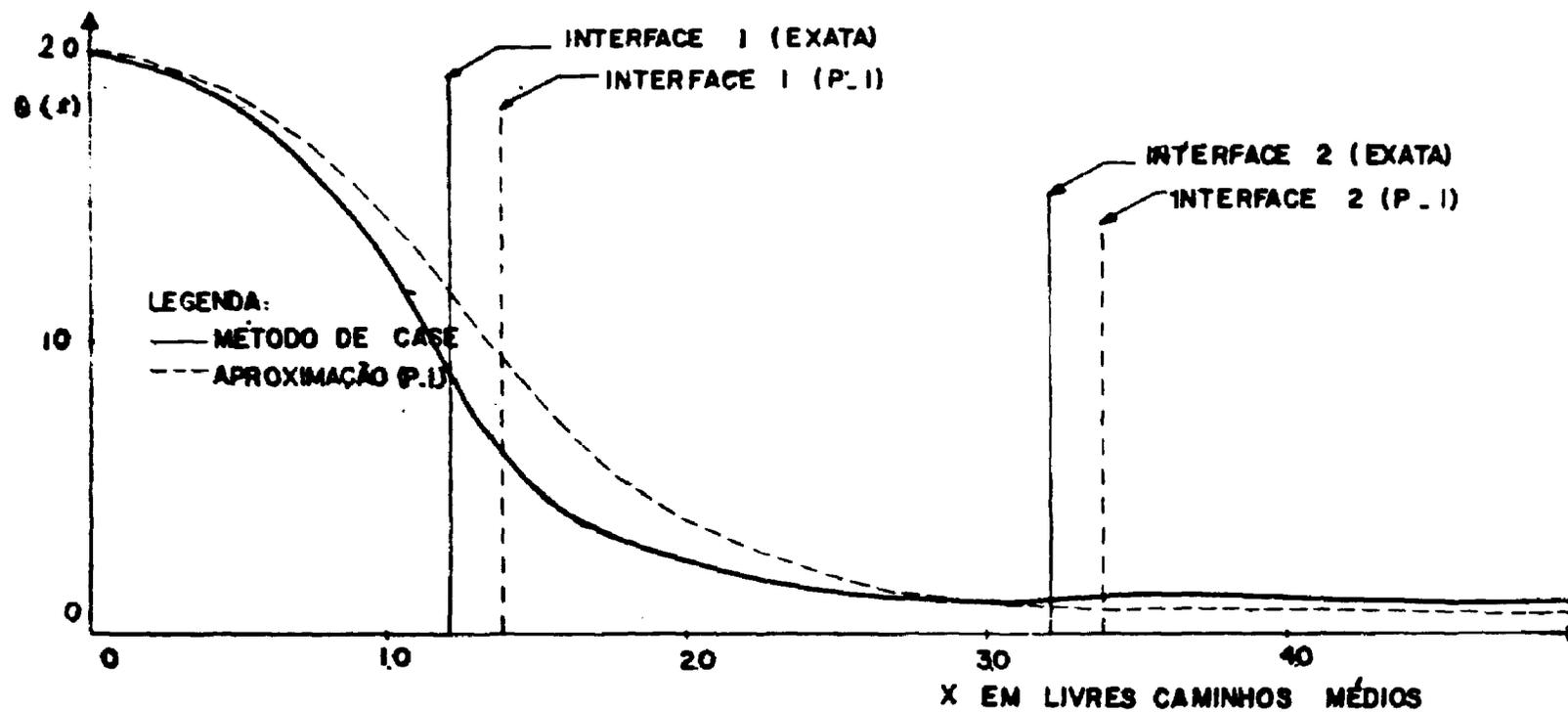


Figura 4.5 - Fluxo Escalar para o CASO 50

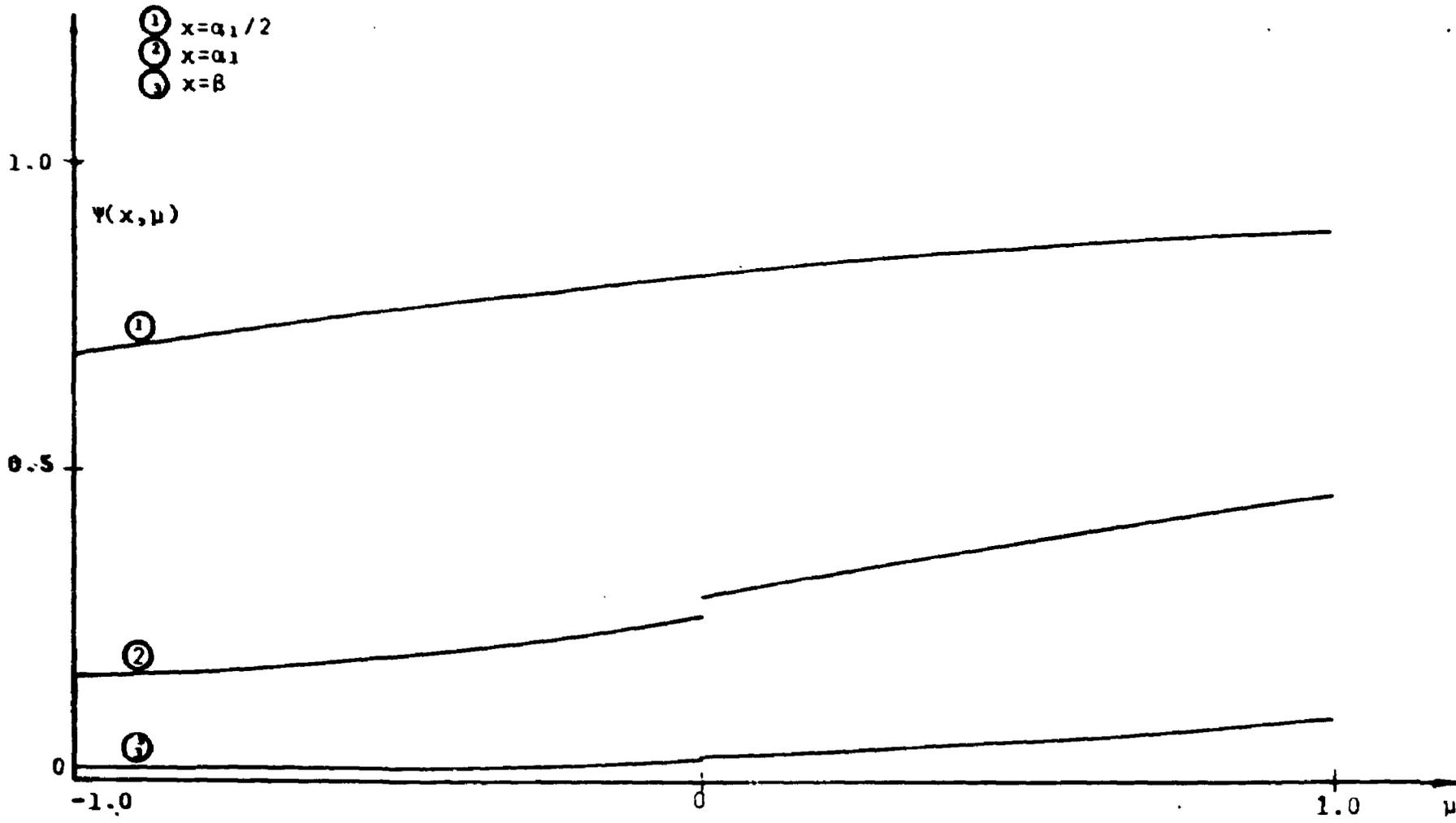


Figura 4.6 - Fluxo Angular para o CASO 3 (EXATO)

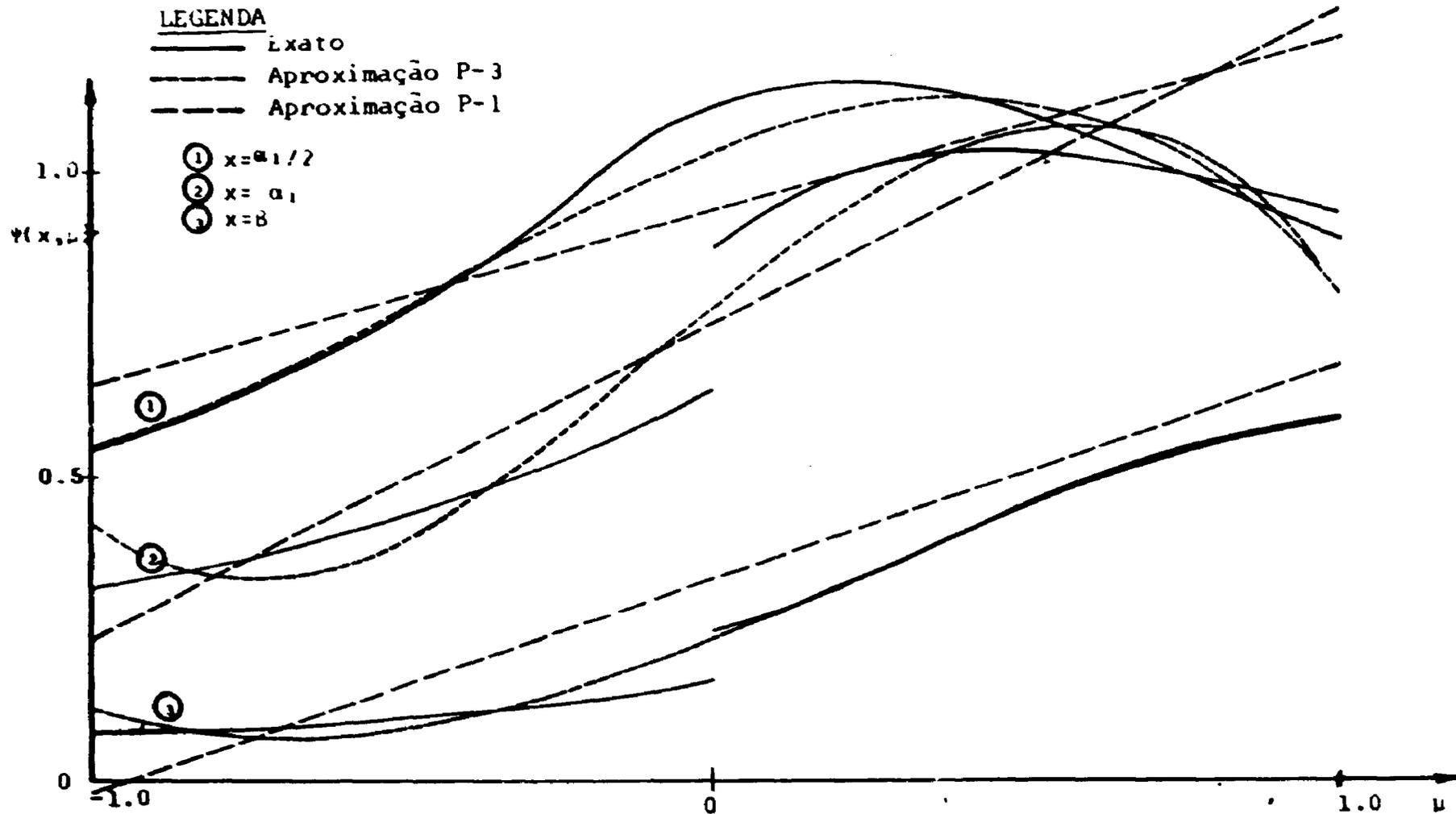


Figura 4.7 - Fluxo Angular para o CASO 40

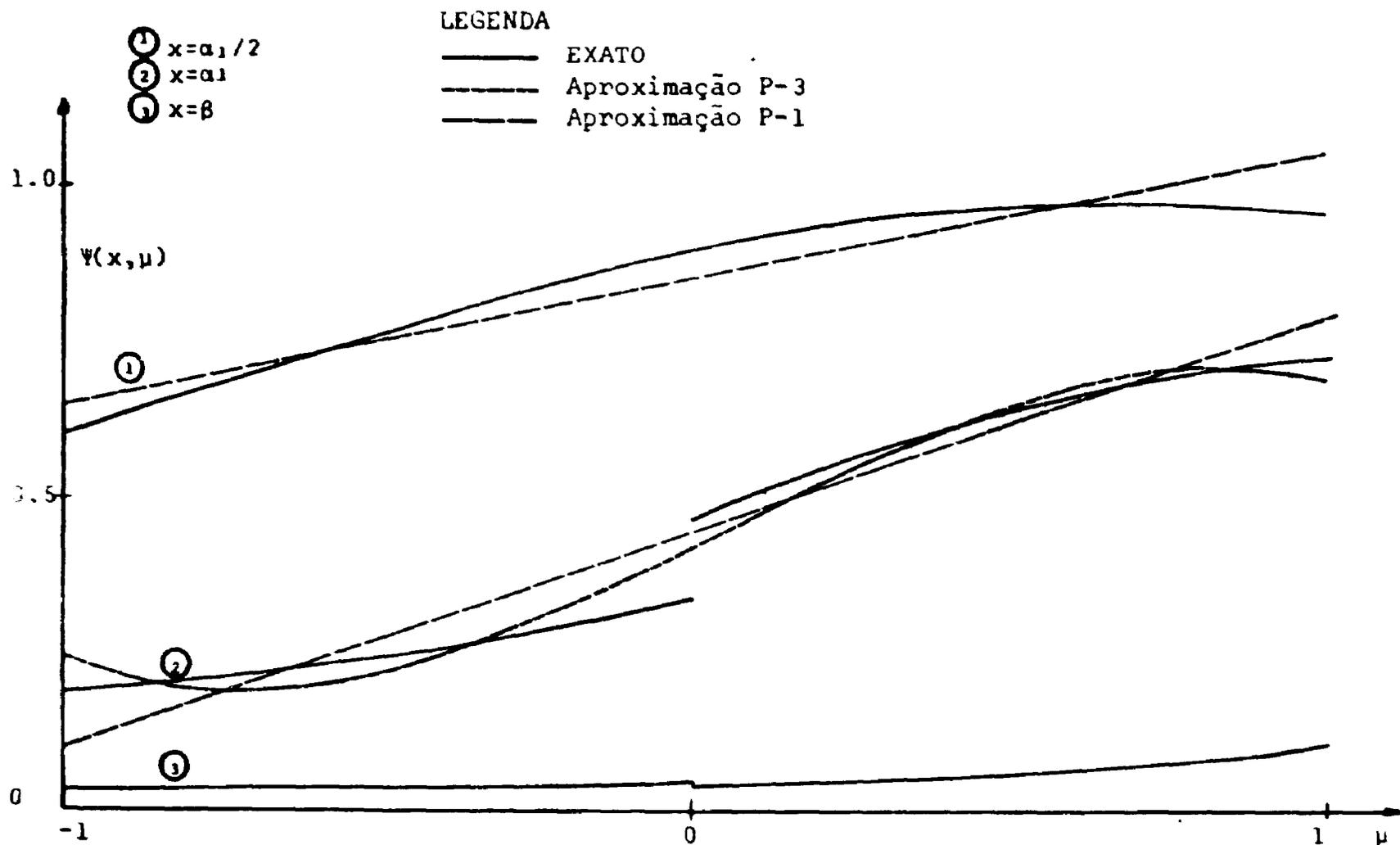


Figura 4.8 - Fluxo Angular para o CASO 21

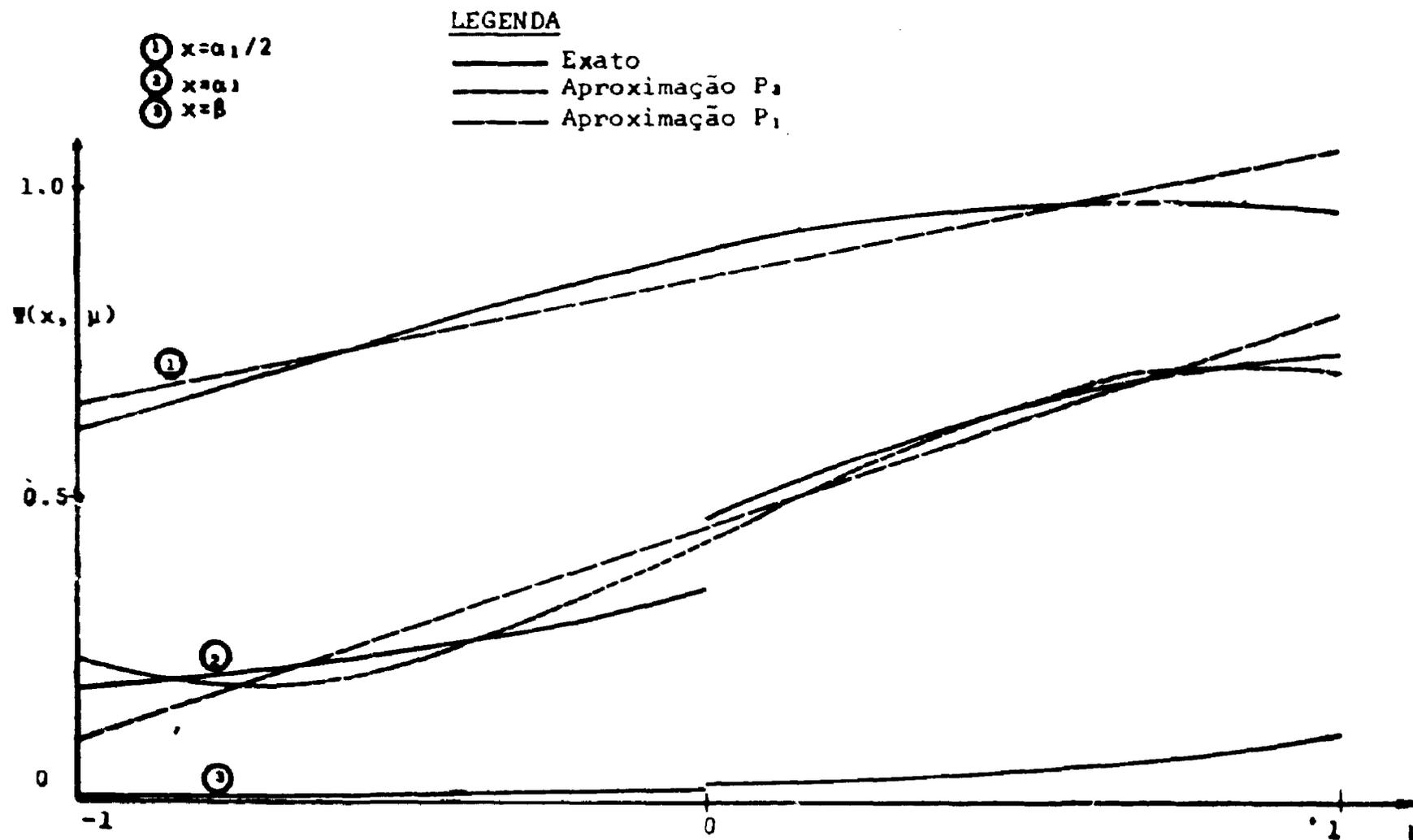


Figura 4.9 - Fluxo Angular para o CASO 24

Tabela IV.1

Casos Estudados e Valores Obtidos para a Meia Distância Crítica

CASO	c_1	c_2	c_3	α_2
1	1.010	0.900	0.800	1.000
2	1.010	0.900	0.800	2.000
3	1.010	0.900	0.800	3.000
4	1.010	0.900	0.600	1.000
5	1.010	0.900	0.600	2.000
6	1.010	0.900	0.600	3.000
7	1.010	0.800	0.900	1.000
8	1.010	0.800	0.900	2.000
9	1.010	0.800	0.900	3.000
10	1.010	0.800	0.600	1.000
11	1.010	0.800	0.600	2.000
12	1.010	0.800	0.600	3.000
13	1.050	0.900	0.800	1.000
14	1.050	0.900	0.800	2.000
15	1.050	0.900	0.800	3.000
16	1.050	0.900	0.600	1.000
17	1.050	0.900	0.600	2.000
18	1.050	0.900	0.600	3.000
19	1.050	0.800	0.900	1.000
20	1.050	0.800	0.900	2.000
21	1.050	0.800	0.900	3.000
22	1.050	0.800	0.600	1.000
23	1.050	0.800	0.600	2.000
24	1.050	0.800	0.600	3.000
25	1.100	0.900	0.800	1.000
26	1.100	0.900	0.800	2.000
27	1.100	0.900	0.800	3.000
28	1.100	0.900	0.600	1.000
29	1.100	0.900	0.600	2.000
30	1.100	0.900	0.600	3.000
31	1.100	0.800	0.900	1.000
32	1.100	0.800	0.900	2.000
33	1.100	0.800	0.900	3.000
34	1.100	0.800	0.600	1.000
35	1.100	0.800	0.600	2.000
36	1.100	0.800	0.600	3.000
37	1.200	0.900	0.800	1.000
38	1.200	0.900	0.800	2.000
39	1.200	0.900	0.800	3.000
40	1.200	0.900	0.600	1.000
41	1.200	0.900	0.600	2.000
42	1.200	0.900	0.600	3.000
43	1.200	0.800	0.900	1.000
44	1.200	0.800	0.900	2.000
45	1.200	0.800	0.900	3.000
46	1.200	0.800	0.600	1.000
47	1.200	0.800	0.600	2.000
48	1.200	0.800	0.600	3.000
49	1.200	0.300	0.990	1.000
50	1.200	0.300	0.990	2.000
51	1.200	0.300	0.990	3.000

Tabela IV.1

(Continuação)

CASO	EXATO	P ₁	P ₃	P ₅	P ₁ %	P ₃ %	P ₅ %
1	7.389977	7.482554	7.392527	7.390804	1.25	0.03	0.01
2	7.277128	7.363402	7.279972	7.278085	1.19	0.04	0.01
3	7.236686	7.321888	7.239681	7.237649	1.18	0.04	0.01
4	7.535023	7.639398	7.538327	7.536171	1.39	0.04	0.02
5	7.331448	7.420752	7.334537	7.332567	1.22	0.04	0.02
6	7.256127	7.341659	7.259240	7.257151	1.18	0.04	0.01
7	7.598778	7.706227	7.605627	7.601037	1.41	0.09	0.03
8	7.671173	7.779724	7.676754	7.673006	1.42	0.07	0.02
9	7.687589	7.794846	7.692902	7.689369	1.40	0.07	-0.02
10	7.775765	7.885649	7.780329	7.777343	1.41	0.06	0.02
11	7.712550	7.817800	7.717659	7.714313	1.36	0.07	0.02
12	7.697433	7.802933	7.702687	7.699197	1.37	0.07	0.02
13	2.497244	2.603531	2.501370	2.498418	4.26	0.7	0.05
14	2.414391	2.513018	2.418882	2.415728	4.08	0.19	0.06
15	2.385493	2.482201	2.390167	2.386846	4.05	0.20	0.06
16	2.607760	2.727346	2.612265	2.609104	4.59	0.17	0.05
17	2.453753	2.556201	2.458328	2.455193	4.18	0.19	0.06
18	2.399317	2.496831	2.404047	2.400709	4.06	0.20	0.06
19	2.661908	2.781705	2.670431	2.664534	4.50	0.32	0.10
20	2.719504	2.842581	2.726858	2.721733	4.53	0.27	0.08
21	2.732655	2.855246	2.739748	2.734836	4.49	0.26	0.08
22	2.804608	2.932297	2.810875	2.806556	4.55	0.22	0.07
23	2.752752	2.874563	2.759614	2.754910	4.43	0.25	0.08
24	2.740549	2.862040	2.747575	2.742716	4.43	0.26	0.08
25	1.432929	1.538567	1.439628	1.434610	7.37	0.47	0.12
26	1.371800	1.468957	1.378894	1.373670	7.08	0.52	0.14
27	1.350919	1.445647	1.358213	1.352813	7.01	0.54	0.14
28	1.516725	1.636602	1.523524	1.518453	7.90	0.45	0.11
29	1.400517	1.510953	1.407579	1.402447	7.24	0.50	0.14
30	1.360868	1.456689	1.368175	1.362785	7.04	0.54	0.14
31	1.562631	1.680682	1.573830	1.565780	7.55	0.72	0.20
32	1.607859	1.730802	1.617988	1.610637	7.65	0.63	0.17
33	1.618230	1.741330	1.628103	1.620963	7.61	0.61	0.17

Tabela IV.1

(Continuação)

CASO	EXATO	P ₁	P ₃	P ₅	P ₁ %	P ₃ %	P ₅ %
34	1.675950	1.806120	1.684947	1.678421	7.77	0.54	0.15
35	1.634143	1.757453	1.643760	1.636847	7.55	0.59	0.17
36	1.624457	1.746991	1.634253	1.627174	7.54	0.60	0.17
37	0.769307	0.865702	0.781204	0.772414	12.53	1.55	0.40
38	0.730527	0.818080	0.742636	0.733875	11.98	1.66	0.46
39	0.717581	0.802406	0.729833	0.720972	11.82	1.71	0.47
40	0.823954	0.934930	0.835897	0.826935	13.47	1.45	0.36
41	0.748492	0.840499	0.760549	0.751839	12.29	1.61	0.45
42	0.723720	0.809814	0.735973	0.727114	11.90	1.69	0.47
43	0.859394	0.966915	0.875999	0.864009	12.51	1.93	0.54
44	0.890114	1.003951	0.905923	0.894363	12.79	1.78	0.48
45	0.897172	1.011822	0.912763	0.901375	12.78	1.74	0.47
46	0.937343	1.060975	0.952178	0.941225	13.19	1.58	0.41
47	0.908049	1.023939	0.923398	0.912208	12.76	1.69	0.46
48	0.901407	1.016068	0.916922	0.905590	12.72	1.72	0.46
49	1.158922	1.346504	1.190997	1.168526	16.19	2.77	0.83
50	1.211302	1.391594	1.238956	1.218970	14.88	2.12	0.63
51	1.216177	1.394021	1.241431	1.223763	14.62	2.08	0.62

Tabela IV.2

Fluxo Escalar para o CASO 44

x	EXATO	$\phi_{\text{BSS}}(x)$	P-1	P-3	P-5
0.0 α_1	1.970846	2.000000	2.000000	1.955710	1.970488
0.1 α_1	1.964893	1.994485	1.993956	1.949403	1.964286
0.2 α_1	1.947033	1.977968	1.975859	1.930496	1.945668
0.3 α_1	1.917266	1.950543	1.945819	1.899037	1.914600
0.4 α_1	1.875574	1.912360	1.904018	1.855099	1.871014
0.5 α_1	1.821885	1.863628	1.850708	1.798781	1.814789
0.6 α_1	1.756005	1.804617	1.786211	1.730203	1.745731
0.7 α_1	1.677466	1.735653	1.710918	1.649500	1.663530
0.8 α_1	1.585151	1.657117	1.625283	1.556810	1.567720
0.9 α_1	1.476001	1.569440	1.529825	1.452271	1.457608
α_1^+	1.331184	1.473107	1.425119	1.336003	1.332193
α_1^-	1.331184	1.037062	1.425119	1.336003	1.332193
$\alpha_1 + 0.1\alpha_2$	1.069168	0.902227	1.223998	1.099550	1.081444
$\alpha_1 + 0.2\alpha_2$	0.896974	0.785636	1.052311	0.916477	0.899550
$\alpha_1 + 0.3\alpha_2$	0.762870	0.684932	0.905931	0.772263	0.760724
$\alpha_1 + 0.4\alpha_2$	0.654121	0.598078	0.781336	0.656965	0.650732
$\alpha_1 + 0.5\alpha_2$	0.564921	0.523318	0.675531	0.563703	0.561404
$\alpha_1 + 0.6\alpha_2$	0.490748	0.459140	0.585971	0.487670	0.487830
$\alpha_1 + 0.7\alpha_2$	0.429117	0.404247	0.510503	0.425490	0.426936
$\alpha_1 + 0.8\alpha_2$	0.378179	0.357528	0.447311	0.374807	0.376783
$\alpha_1 + 0.9\alpha_2$	0.336832	0.318038	0.394876	0.334033	0.336280
β^-	0.306304	0.284980	0.351937	0.302213	0.305192
β^+	0.306304	0.317214	0.351937	0.302213	0.305192
$\beta + 0.2$	0.280438	0.285571	0.315421	0.275356	0.278829
$\beta + 0.4$	0.254074	0.257085	0.282694	0.250067	0.253151
$\beta + 0.6$	0.229566	0.231440	0.253382	0.226564	0.229024
$\beta + 0.8$	0.207148	0.208353	0.227074	0.204919	0.206776
$\beta + 1.0$	0.186777	0.187569	0.203513	0.185110	0.186471

Tabela IV.3

Fluxo Escalar para o CASO 3

x	EXATO	$\phi_{955}(x)$	P-1	P-3	P-5
0.0 α_1	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000
0.1 α_1	1.984182	1.984184	1.983939	1.984171	1.984178
0.2 α_1	1.936983	1.936987	1.936012	1.936935	1.936966
0.3 α_1	1.859146	1.859155	1.859990	1.859039	1.859108
0.4 α_1	1.751898	1.751920	1.748143	1.751715	1.751831
0.5 α_1	1.616921	1.616976	1.611217	1.616653	1.616820
0.6 α_1	1.456319	1.456459	1.448414	1.455963	1.456180
0.7 α_1	1.272533	1.272907	1.262346	1.272065	1.272371
0.8 α_1	1.068152	1.069222	1.056003	1.067360	1.068019
0.9 α_1	0.845124	0.848628	0.832700	0.842978	0.844800
α_1^-	0.593699	0.614611	0.596022	0.593719	0.593699
α_1^+	0.593699	0.558242	0.596022	0.593719	0.593693
$\alpha_1 + 0.1\alpha_2$	0.492050	0.475663	0.504437	0.494805	0.492972
$\alpha_1 + 0.2\alpha_2$	0.414350	0.404927	0.426505	0.415238	0.414166
$\alpha_1 + 0.3\alpha_2$	0.349998	0.344273	0.360113	0.349798	0.349595
$\alpha_1 + 0.4\alpha_2$	0.295751	0.292191	0.303467	0.295104	0.295414
$\alpha_1 + 0.5\alpha_2$	0.249592	0.247384	0.255032	0.248840	0.249365
$\alpha_1 + 0.6\alpha_2$	0.210040	0.208736	0.213499	0.209321	0.209898
$\alpha_1 + 0.7\alpha_2$	0.175913	0.175286	0.177743	0.175247	0.175819
$\alpha_1 + 0.8\alpha_2$	0.146208	0.146200	0.146797	0.145542	0.146104
$\alpha_1 + 0.9\alpha_2$	0.119972	0.120754	0.119824	0.119242	0.119750
β^-	0.095509	0.098314	0.096093	0.095380	0.095510
β^+	0.095509	0.088351	0.096093	0.095380	0.095510
$\beta + 0.2$	0.081070	0.076649	0.082302	0.081404	0.081276
$\beta + 0.4$	0.069580	0.066497	0.074907	0.069743	0.069174
$\beta + 0.6$	0.059915	0.057689	0.060374	0.059928	0.059873
$\beta + 0.8$	0.051686	0.050048	0.051710	0.051612	0.051623
$\beta + 1.0$	0.044641	0.043419	0.044288	0.044526	0.044581

Tabela IV.4

Coeficientes Contínuos da Expansão

CASO 1

ν	$B_1(\nu)$	$A_2(\nu)$	$A_2(-\nu)$	$A_3(\nu)$
0.05	-0.028812	0.031035	-0.012759	0.013923
0.10	-0.027772	0.032002	-0.012259	0.014510
0.20	-0.025778	0.033726	-0.011351	0.015976
0.30	-0.023959	0.035179	-0.010519	0.018381
0.40	-0.022195	0.036307	-0.009729	0.021622
0.50	-0.020337	0.036999	-0.008950	0.025274
0.60	-0.018283	0.037065	-0.008145	0.028933
0.70	-0.015947	0.036166	-0.007260	0.032130
0.80	-0.013193	0.033637	-0.006200	0.034010
0.90	-0.009663	0.027830	-0.004732	0.032206
0.95	-0.007207	0.022060	-0.003608	0.027390

CASO 3

ν	$B_1(\nu)$	$A_2(\nu)$	$A_2(-\nu)$	$A_3(\nu)$
0.05	-0.031521	0.033764	-0.004575	0.004986
0.10	-0.030477	0.034728	-0.004398	0.005190
0.20	-0.028404	0.036428	-0.004076	0.005616
0.30	-0.026285	0.037839	-0.003780	0.006079
0.40	-0.024085	0.038905	-0.003498	0.006604
0.50	-0.021778	0.039511	-0.003219	0.007231
0.60	-0.019327	0.039457	-0.002930	0.007980
0.70	-0.016863	0.038389	-0.002613	0.008797
0.80	-0.013648	0.035610	-0.002232	0.009464
0.90	-0.009912	0.029390	-0.001704	0.009256
0.95	-0.007365	0.023270	-0.001299	0.008032

Tabela IV.5

Coeficientes Contínuos da Expansão
CASO 40

ν	$B_1(\nu)$	$A_2(\nu)$	$A_2(-\nu)$	$A_3(\nu)$
0.05	-0.202493	0.225019	-0.076380	0.087881
0.10	-0.192272	0.233060	-0.072035	0.093586
0.20	-0.172111	0.244001	-0.064775	0.107639
0.30	-0.152445	0.248222	-0.058656	0.129495
0.40	-0.133114	0.245525	-0.053221	0.157772
0.50	-0.113992	0.236553	-0.048168	0.189067
0.60	-0.095196	0.222027	-0.043222	0.221511
0.70	-0.076825	0.201913	-0.038056	0.254734
0.80	-0.058670	0.174576	-0.032147	0.288463
0.90	-0.039774	0.134170	-0.0242296	0.314765
0.95	-0.028646	0.102514	-0.018143	0.303900

CASO 42

ν	$B_1(\nu)$	$A_2(\nu)$	$A_2(-\nu)$	$A_3(\nu)$
0.05	-0.216347	0.237757	-0.025097	0.028772
0.10	-0.206705	0.244996	-0.023701	0.030559
0.20	-0.187214	0.253984	-0.021358	0.034323
0.30	-0.166836	0.255506	-0.019372	0.038618
0.40	-0.145863	0.249678	-0.017600	0.043828
0.50	-0.124808	0.237839	-0.015946	0.050490
0.60	-0.104098	0.221098	-0.014321	0.059105
0.70	-0.083926	0.199520	-0.012619	0.070028
0.80	-0.064092	0.171475	-0.010666	0.083302
0.90	-0.043426	0.131186	-0.008066	0.096447
0.95	-0.031281	0.100050	-0.006125	0.096080

Tabela IV.6

Coeficientes Contínuos da Expansão
CASO 19

ν	$B_1(\nu)$	$A_2(\nu)$	$A_2(-\nu)$	$A_3(\nu)$
0.05	-0.109870	0.121617	0.022760	-0.023738
0.10	-0.104992	0.126622	0.022251	-0.024364
0.20	-0.095868	0.135699	0.021264	-0.024996
0.30	-0.086752	0.143786	0.020339	-0.022712
0.40	-0.077507	0.150958	0.010462	-0.017711
0.50	-0.068207	0.156920	0.018598	-0.011347
0.60	-0.058842	0.161072	0.017687	-0.004711
0.70	-0.049284	0.162139	0.016614	-0.001413
0.80	-0.031199	0.157149	0.015124	-0.006298
0.90	-0.027652	0.137436	0.012498	-0.008804
0.95	-0.020268	0.112632	0.009976	-0.008250

CASO 21

ν	$B_1(\nu)$	$A_2(\nu)$	$A_2(-\nu)$	$A_3(\nu)$
0.05	-0.104228	0.115931	0.005209	--0.005415
0.10	-0.099328	0.120963	0.005099	-0.005546
0.20	-0.090245	0.130110	0.004883	-0.005852
0.30	-0.081556	0.138363	0.004677	-0.006205
0.40	-0.073017	0.145704	0.004481	-0.006549
0.50	-0.064496	0.151867	0.004287	-0.006738
0.60	-0.055876	0.156264	0.004080	-0.006604
0.70	-0.046991	0.157647	0.003836	-0.006031
0.80	-0.037514	0.153104	0.003494	-0.004975
0.90	-0.026550	0.134146	0.002889	-0.003413
0.95	-0.019488	0.110030	0.002306	-0.002384

Tabela IV.7

Coeficientes Discretos da Expansão

$B_1(\nu_1)$	$A_2(\nu_2)$	$A_2(-\nu_2)$	$A_3(\nu_3)$	
0.281833 - i0.959464	0.541317	-0.049548	0.242554	caso 1
0.307306 - i0.951611	0.561935	-0.017861	0.088351	caso 3
0.772757 - i0.634702	0.136523	-0.239341	0.353713	caso 40
0.823085 - i0.567917	0.132105	-0.079712	0.123066	caso 42
0.496359 - i0.868117	0.753175	0.055217	0.474384	caso 19
0.471910 - i0.881647	0.740379	0.012787	0.111702	caso-21

Tabela IV.8

Autovalores Discretos

C	EXATO	P_1	P_3	P_5
1.01	i5.750840	i5.773502	i5.750541	i5.750540
1.05	i2.531782	i2.581989	i2.531854	i2.531782
1.10	i1.756652	i1.825742	i1.757035	i1.756654
1.20	i1.198265	i1.290995	i1.200164	i1.198298
0.99	5.796729	5.773502	5.796728	5.796728
0.90	1.903205	1.825742	1.902732	1.903202
0.80	1.407634	1.290994	1.404738	1.407546
0.60	1.102132	0.912871	1.083850	1.099430
0.30	1.002593	0.690068	0.925820	0.971737

Tabela IV.9

Fluxo Angular para o CASO 3
INTERFACE - 1

μ	EXATO	P_1	P_3	P_5
-0.95	0.170402	0.140942	0.179867	0.168449
-0.90	0.173694	0.149209	0.177684	0.176715
-0.80	0.180650	0.165743	0.176877	0.185970
-0.70	0.188150	0.182276	0.180422	0.190210
-0.60	0.196266	0.198810	0.187846	0.193691
-0.50	0.205082	0.215343	0.198676	0.199273
-0.40	0.214715	0.231877	0.212439	0.208616
-0.30	0.225326	0.248410	0.228662	0.222374
-0.20	0.237153	0.264944	0.246873	0.240388
-0.10	0.250605	0.281477	0.266600	0.261882
-0.05	0.258221	0.289744	0.276883	0.273570
0.05	0.310173	0.306277	0.297995	0.297953
0.10	0.319509	0.314544	0.308706	0.310276
0.20	0.337252	0.331078	0.330140	0.334278
0.30	0.354281	0.347611	0.351199	0.356354
0.40	0.370795	0.364145	0.371409	0.375547
0.50	0.386859	0.380678	0.390297	0.391446
0.60	0.402497	0.397212	0.407391	0.404383
0.70	0.417713	0.413745	0.422218	0.415624
0.80	0.432503	0.430279	0.434305	0.427561
0.90	0.446859	0.446812	0.443179	0.443911
0.95	0.453870	0.455079	0.446264	0.456312

Tabela IV.10

Fluxo Angular para o CASO 3
INTERFACE - 2

μ	EXATO	P_1	P_2	P_3
-0.95	0.022083	0.012691	0.022837	0.021827
-0.90	0.022572	0.014551	0.022889	0.022960
-0.80	0.023620	0.018273	0.023284	0.024309
-0.70	0.024773	0.021995	0.024068	0.025038
-0.60	0.026046	0.025717	0.025244	0.025701
-0.50	0.027461	0.029438	0.026816	0.026682
-0.40	0.029452	0.031599	0.028787	0.028219
-0.30	0.030834	0.036882	0.031162	0.030423
-0.20	0.032878	0.040603	0.033943	0.033315
-0.10	0.035257	0.044325	0.037134	0.036838
-0.05	0.036620	0.046186	0.038884	0.038806
-0.05	0.044868	0.049907	0.042697	0.043075
0.10	0.046702	0.051788	0.044760	0.045344
0.20	0.050112	0.055490	0.049202	0.050077
0.30	0.054647	0.059213	0.054069	0.054991
0.40	0.059252	0.062933	0.059363	0.060041
0.50	0.064479	0.066655	0.065088	0.065257
0.60	0.070445	0.070377	0.071248	0.070771
0.70	0.077199	0.074098	0.077846	0.076840
0.80	0.084726	0.077820	0.084886	0.083873
0.90	0.092678	0.081642	0.092371	0.092453
0.95	0.097311	0.083402	0.098281	0.097760

Tabela IV.11

Fluxo Angular para o CASO 40
INTERFACE - 1

μ	EXATO	P_1	P_3	P_5
-0.95	0.322641	0.261499	0.386405	0.308714
-0.90	0.331956	0.287159	0.359532	0.353347
-0.80	0.352231	0.338478	0.329301	0.389695
-0.70	0.357003	0.389798	0.327161	0.389377
-0.60	0.400671	0.441117	0.349196	0.382669
-0.50	0.429655	0.492436	0.391487	0.389337
-0.40	0.462315	0.543756	0.450116	0.420152
-0.30	0.498793	0.595075	0.521166	0.478405
-0.20	0.538921	0.646395	0.600719	0.561422
-0.10	0.583476	0.697714	0.684857	0.662086
-0.05	0.609215	0.723374	0.727422	0.715966
0.05	0.902650	0.774694	0.811093	0.823493
0.10	0.936087	0.800353	0.851220	0.874726
0.20	0.985893	0.851673	0.925609	0.963871
0.30	1.015722	0.902992	0.988913	1.028026
0.40	1.027866	0.954312	1.037215	1.060574
0.50	1.026104	1.005631	1.066595	1.059546
0.60	1.014459	1.066950	1.073138	1.029138
0.70	0.996267	1.108270	1.052925	0.981224
0.80	0.973997	1.159959	1.002039	0.936877
0.90	0.949386	1.210909	0.916562	0.927883
0.95	0.936593	1.236578	0.859827	0.949877

Tabela IV.12

Fluxo Angular para o CASO 40
INTERFACE - 2

μ	EXATO	P_1	P_3	P_5
-0.95	0.078359	-0.013218	0.103072	0.074532
-0.90	0.080465	0.004582	0.095535	0.085763
-0.80	0.085047	0.040182	0.074004	0.094762
-0.70	0.090199	0.075782	0.067936	0.093817
-0.60	0.096041	0.111383	0.071341	0.090516
-0.50	0.102732	0.146983	0.083215	0.090351
-0.40	0.110498	0.182583	0.102552	0.096964
-0.30	0.119625	0.218183	0.128345	0.112381
-0.20	0.130625	0.253784	0.159590	0.137260
-0.10	0.144361	0.289384	0.195279	0.171123
-0.05	0.152839	0.307184	0.214476	0.191025
0.05	0.263439	0.342784	0.254947	0.235588
0.10	0.279862	0.360584	0.275969	0.259683
0.20	0.315558	0.396185	0.318959	0.309931
0.30	0.359405	0.431785	0.362369	0.360748
0.40	0.407393	0.467385	0.405198	0.409804
0.50	0.453348	0.502985	0.446432	0.454278
0.60	0.493591	0.538586	0.486072	0.493102
0.70	0.528796	0.574186	0.520111	0.525198
0.80	0.552989	0.609786	0.550541	0.550741
0.90	0.572837	0.645386	0.575358	0.571079
0.95	0.580663	0.663186	0.585347	0.580181

APÊNDICE A – RELAÇÕES DE ORTOGONALIDADE E TABELA DE INTEGRAIS

Neste apêndice apresentam-se as relações de ortogonalidade de meio intervalo das auto-funções e todos os tipos de integrais necessários à elaboração deste trabalho.

Relações de ortogonalidade de meio intervalo:

$$\int_0^1 \mu H(\mu) \phi(\nu_0, \mu) \phi(\nu, \mu) d\mu = 0 \quad \text{A.1}$$

$$\int_0^1 \mu H(\mu) \phi(\nu_0, \mu) \phi(\nu_0, \mu) d\mu = H(\nu_0) N(\nu_0) \quad \text{A.2}$$

$$\int_0^1 \mu H(\mu) \phi(\nu, \mu) \phi(\nu', \mu) d\mu = H(\nu) N(\nu) \delta(\nu - \nu') \quad \text{A.3}$$

onde:

$$N(\nu_0) = \frac{c}{2} \nu_0^3 \left\{ \frac{c}{\nu_0^2 - 1} - \frac{1}{\nu_0} \right\} \quad \text{A.4}$$

$$N(\nu) = \nu \left\{ \lambda(\nu) \lambda(\nu) + \left(\frac{\pi c \nu}{2} \right)^2 \right\} \quad \text{A.5}$$

Como neste trabalho várias vezes defrontou-se com integrais envolvendo produto de auto-funções, resumiu-se aqui estes tipos de integrais:

Para autofunções pertencentes ao mesmo meio:

$$\int_0^1 \mu H(\mu) \phi(\xi, \mu) \phi(-\xi', \mu) d\mu = \frac{c}{2} \frac{\xi \xi'}{(\xi + \xi')} H^{-1}(\xi) \quad \xi, \xi' = \nu_0 \text{ ou } \nu \in (0,1) \quad \text{A.6}$$

Para autofunções pertencentes a meios distintos:

$$\int_0^1 \mu H_i(\mu) \phi_i(\xi_i, \mu) \phi_j(-\xi_j, \mu) d\mu = \frac{c_j}{2} \frac{\xi_i \xi_j}{(\xi_i + \xi_j)} H_i^{-1}(\xi_i) \quad \text{A.7}$$

$$\int_0^1 \mu H_i(\mu) \phi_i(\xi_i, \mu) \phi_j(\nu_j, \mu) d\nu = \frac{c_j}{2} \frac{\nu_j \xi_i}{(\nu_j - \xi_i)} H_i^{-1}(-\nu_j) \quad \text{A.8}$$

ν_j = auto valor discreto

ξ_i = auto valor discreto ou $\nu \in (0,1)$

$$\int_0^1 \mu H_1(\mu) \phi_i(\nu, \mu) \phi_j(\nu, \mu) d\mu = \frac{c_i - c_j}{2} \left\{ \frac{\nu_i \nu}{\nu_i - \nu} H_1(\nu) \right\} \quad \text{A.9}$$

$$\int_0^1 \mu H_1(\mu) \phi_i(\nu, \mu) \int_0^1 A_1(\nu') \phi_j(\nu', \mu) d\mu' d\mu$$

$$\frac{c_i - c_j}{2} \nu \int_0^1 \nu' A_1(\nu') H_1(\nu') \frac{P}{\nu - \nu'} d\nu' +$$

$$\nu A_1(\nu) H_1(\nu) \left\{ \lambda_1(\nu) \lambda_j(\nu) + \frac{c_i c_j}{4} \pi^2 \nu^2 \right\} \quad \text{A.10}$$

Na expressão A.10 $A_1(\nu)$ é uma função arbitrária satisfazendo a condição de Holder. Integrais deste tipo fornece equações singulares, cuja regularização neste trabalho será feita, utilizando-se a técnica exposta na referência⁽¹⁶⁾.

APÊNDICE B – MÉTODO P_N

Seja a equação de transporte de nêutrons, unidimensional, no modelo de um grupo de energia, com espalhamento isotrópico, no estado estacionário.

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu') d\mu' \quad \text{B.1}$$

O método P_N , consiste na expansão do fluxo angular de nêutrons em polinômio de Legendre, expansão esta que, por motivos computacionais, é truncada numa certa ordem de aproximação.

Seja:

$$\Psi(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) P_n(\mu) \quad \text{B.2}$$

e impondo esta expansão como solução de B.1 tem-se:

$$\sum_{n=0}^N (2n+1) \phi'_n(x) \mu P_n(\mu) + \sum_{n=0}^N (2n+1) \phi_n(x) P_n(\mu) = c \phi_0(x) \quad \text{B.3}$$

Introduzindo a relação de recorrência:

$$\mu P_n(\mu) = \frac{1}{2n+1} \{ (n+1) P_{n+1}(\mu) + n P_{n-1}(\mu) \} \quad \text{B.4}$$

a expressão B.3 fica:

$$\sum_{n=0}^N \phi'_n(x) (n+1) P_{n+1}(\mu) + \sum_{n=0}^N \phi'_n(x) n P_{n-1}(\mu) + \sum_{n=0}^N (2n+1) \phi_n(x) P_n(\mu) = c \phi_0(x) \quad \text{B.5}$$

Os polinômios de Legendre formam um conjunto ortogonal no intervalo $(-1, 1)$ ⁽⁷⁾

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_{n'}(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,n'} \quad \text{B.6}$$

Multiplicando a equação B.5 por $P_n(\mu)$ e integrando no intervalo $(-1,1)$ chega-se a:

$$n\phi'_n(x) + (n+1)\phi'_{n+1}(x) + (2n+1)\phi_n(x) = c\phi_0(x)\delta_{n,0} \quad n=0, 1, \dots, N \quad \text{B.7}$$

Neste sentido, B.7 forma um conjunto de equações lineares acopladas; propondo-se a separação de variáveis:

$$\phi_n(x) = G_n(\nu) \exp(-x/\nu) \quad \text{B.8}$$

e substituindo em B.7:

$$\begin{aligned} nG_{n-1}(\nu) - (n+1)G_{n+1}(\nu) + (2n+1)\nu G_n(\nu) - \\ c\nu G_0(\nu)\delta_{n,0} = 0 \quad n=0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad \text{B.9}$$

A relação B.9 forma um sistema linear de equações homogêneas, cujas incógnitas são os $G_n(\nu)$. Escrevendo este sistema numa forma matricial:

$$\underline{A}(\nu) \underline{G}(\nu) = \underline{0} \quad \text{B.10}$$

Para que este sistema admita solução diferente da trivial é necessário que:

$$\det \underline{A}(\nu) = 0 \quad \text{B.11}$$

O determinante de $\underline{A}(\nu)$ forma um polinômio de ordem $(N+1)/2$ em ν^2 , e análogamente do método de Case, se $c > 1$ tem-se 1 par de auto-valores imaginários puros, e para $\frac{2}{3} < c < 1$, 1 par de auto valores reais maiores que 1. Os demais auto valores estão no intervalo $(-1,1)$.

Os auto valores, então, são determinados pela condição B.11, e para os $G_n(\nu)$ resolve-se o sistema linear B.10 sujeito a normalização $G_n(\nu) = 1/\nu$ para todos os auto valores. Portanto, a solução geral pelo método do P_N da equação de transporte (B.1) é:

$$\Psi(x,\mu) = \sum_{i=1}^{N+1} A_i(\nu_i) \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} G_n(\nu_i) \exp(-x/\nu_i) P_n(\mu) \quad \text{B.12}$$

(*) Neste apêndice δ é o delta de Kronecker.

Solução de placa crítica de 3 regiões pelo método P_N (Figura 3.1).

O fluxo angular nas 3 regiões, já incorporando as condições de simetria, pode ser escrito como:

$$\Psi_1(x,\mu) = \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_i(\nu_{1i}) \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} G_n(\nu_{1i}) \text{En}(\nu_{1i},x) P_n(\mu) \quad \text{B.13}$$

onde:

$$\text{En}(\nu_{1i},x) = \begin{cases} \exp(-x/\nu_{1i}) + (-1)^n \exp(x/\nu_{1i}) & p/i = 1 \\ \exp\{(x + \alpha_1)/\nu_{1i}\} + (-1)^n \exp\{(\alpha_1 - x)/\nu_{1i}\} & p/i > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{B.14a} \\ \text{B.14b} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x,\mu) = & \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(\nu_{2i}) \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} G_n(\nu_{2i}) \exp\{-(x - \alpha_1)/\nu_{2i}\} P_n(\mu) + \\ & + \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(-\nu_{2i}) \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} G_n(-\nu_{2i}) \exp\{-(\beta - x)/\nu_{2i}\} P_n(\mu) \end{aligned} \quad \text{B.15}$$

$$\Psi_3(x,\mu) = \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_3(\nu_{3i}) \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} G_n(\nu_{3i}) \exp\{-(x - \beta)/\nu_{3i}\} P_n(\mu) \quad \text{B.16}$$

Condições de contorno (tipo Marshak⁽¹¹⁾):

$$\int_1^1 \Psi_1(\alpha_1,\mu) P_K(\mu) d\mu = \int_1^1 \Psi_2(\alpha_1,\mu) P_K(\mu) d\mu, \quad K=0, 1, \dots, N \quad \text{B.17}$$

$$\int_1^1 \Psi_2(\beta,\mu) P_K(\mu) d\mu = \int_1^1 \Psi_3(\beta,\mu) P_K(\mu) d\mu, \quad K=0, 1, \dots, N \quad \text{B.18}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_3(x,\mu) = 0 \quad \text{B.19}$$

Na expressão B.16 já foi incorporada a condição de contorno B.19. Substituindo B.13 e B.15 em B.17 e B.15 e B.16 em B.18 obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(\nu_{2i}) G_n(\nu_{2i}) \text{En}(\nu_{1i},\alpha_1) = & \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(\nu_{2i}) G_n(\nu_{2i}) + \\ \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(-\nu_{2i}) G_n(-\nu_{2i}) \exp(-\alpha_2/\nu_{2i}) & \quad n=0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad \text{B.20}$$

$$\sum_{i=1}^{(N+1)/2} A(\nu_{2i}) G_n(\nu_{2i}) \exp(-\alpha_2/\nu_{2i}) + \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(-\nu_{2i}) G_n(-\nu_{2i}) =$$

$$\sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_3(\nu_{3,i}) G_n(\nu_{3,i}) \quad n=0, 1, \dots, N \quad \text{B.21}$$

As equações B.20 e B.21 podem ser melhor escritas da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_1(\nu_{1,i}) G_n(\nu_{1,i}) E_n(\nu_{1,i}, \alpha_1) - \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(-\nu_{2,i}) G_n(-\nu_{2,i}) \exp\{-\alpha_2/\nu_{2,i}\} = 0 \quad \text{B.22}$$

$$\sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(\nu_{2,i}) G_n(\nu_{2,i}) \exp\{-\alpha_2/\nu_{2,i}\} + \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(-\nu_{2,i}) G_n(-\nu_{2,i}) -$$

$$\sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_3(\nu_{3,i}) G_n(\nu_{3,i}) = 0 \quad n=0, 1, \dots, N \quad \text{B.23}$$

$$i=1, \dots, (N+1)/2$$

Foi obtido um sistema linear homogêneo de $2(N+1)$ equações e $2(N+1)$ incógnitas. Escrevendo numa forma matricial:

$$\underline{B}(\alpha_1) C(\nu_{j,i}) = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{B.24}$$

Para que haja solução diferente da trivial é necessário que:

$$\det \underline{B}(\alpha_1) = 0 \quad \text{B.25}$$

Esta é a condição para se determinar a meia distância crítica pelo método P_N .

Uma vez determinada a meia distância crítica, calcula-se os demais coeficientes. Para este fim, foi normalizado o coeficiente do meio multiplicativo, correspondente ao termo de maior autovalor discreto.

A normalização foi feita da seguinte forma $A_2(\nu_{1,1}) = 1/G_0(\nu_{1,1})$, tomando-se $\nu_{1,1}$ como o maior autovalor.

O fluxo angular pelo método P_N é dado pelas expressões B.13, B.15 e B.16 respectivamente nos meios 1, 2, 3 e o fluxo total é definido como:

$$\phi(x) = \int_1^1 \Psi(x, \mu') d\mu' \quad \text{B.26}$$

então:

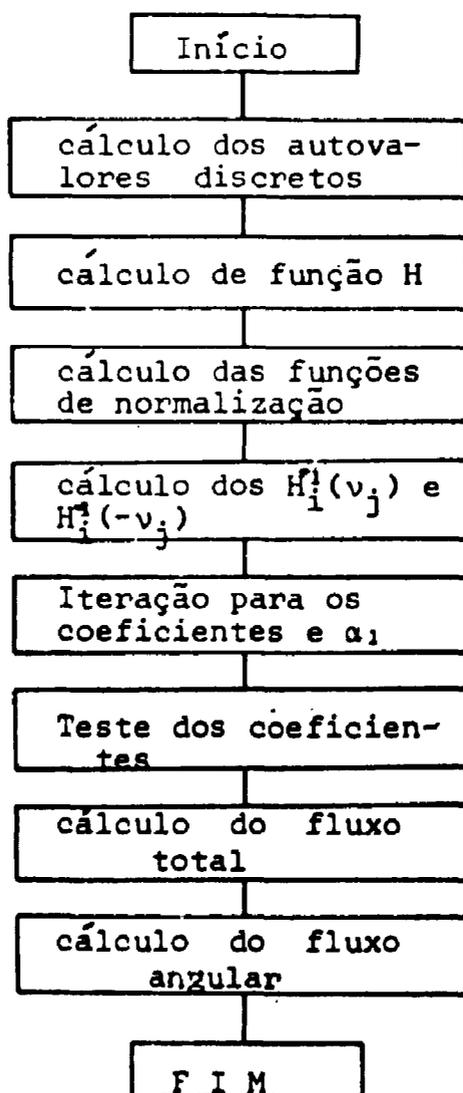
$$\phi_1(x) = \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_i(\nu_{1,i}) E_n(\nu_{1,i}, x) G_0(\nu_{1,i}) \quad \text{B.27}$$

$$\phi_2(x) = \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(\nu_{2i}) G_0(\nu_{2i}) \exp\{(-x - \alpha_1)/\nu_{2i}\} + \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_2(-\nu_{2i}) G_0(-\nu_{2i}) \exp(-\beta - x)/\nu_{2i} \quad \text{B.28}$$

$$\phi_2(x) = \sum_{i=1}^{(N+1)/2} A_3(\nu_{2i}) G_0(\nu_{2i}) \exp\{(-x - \beta)/\nu_{2i}\} \quad \text{B.29}$$

APÊNDICE C – PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

Neste apêndice apresenta-se o fluxograma e o procedimento computacional necessários à elaboração deste trabalho.

c.1) Procedimento Computacional para o Método de CaseFLUXOGRAMA

Para os 51 casos resolvidos pelo método de Case, inicialmente foram calculados os autovalores discretos, que são as raízes de função de dispersão $\Lambda(z)$, onde:

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{cz}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \quad \text{C.1}$$

Como já foi dito, se $c < 1$, há um par de autovalores discretos reais ($\pm \nu_0$) e se $c > 1$, um par de autovalores imaginários puros.

No caso de $c < 1$, foi usada a expressão C.1, e com a técnica iterativa de Newton-Raphson, foram encontradas as raízes de função de dispersão por meio de:

$$\nu_0^{i+1} = \nu_0^i - \frac{\Lambda(\nu_0^i)}{\Lambda'(\nu_0^i)} \quad \text{C.2}$$

onde i é a ordem de iteração e Λ' é a derivada de Λ . O processo é repetido até obter-se a precisão desejada para ν_0 , ou seja, até que a diferença entre duas iterações sucessivas seja menor que uma certa precisão E .

No caso de $c > 1$, a expressão C.1 pode ser escrita em termos do módulo do autovalor imaginário puro como:

$$\Lambda(|\nu_0|) = 1 - c |\nu_0| \arctg |\nu_0| \quad \text{C.3}$$

Analogamente ao caso de $c < 1$, aplicamos a técnica iterativa de Newton-Raphson a $\Lambda(|\nu_0|)$.

Os autovalores apresentados na Tabela IV.8, do capítulo 4, foram calculados com precisão $E = 10^{-12}$.

Após o cálculo dos autovalores, o próximo passo foi a obtenção da função H . Para este propósito usou-se a expressão 2.4.12 do capítulo 2.

$$H^{-1}(\mu) = 1 - \int_0^1 \frac{c\mu}{2} \frac{H(\mu') d\mu'}{\mu + \mu'} \quad \mu \in (0,1) \quad \text{C.4}$$

Esta expressão é de convergência lenta para $c \sim 1$ ⁽³³⁾, o melhor procedimento é combinar esta expressão com o vínculo:

$$\frac{c\nu_0}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{\nu_0 + \mu'} = 1 \quad \text{C.5}$$

Após manipulações algébricas obtém-se:

$$H^{-1}(\mu) = \frac{\nu_0 + \mu}{\nu_0(1 + \mu)} - \frac{c\mu}{2} \frac{\nu_0 + \mu}{1 + \mu} \int_0^1 \frac{H(\mu')}{(\nu_0 - \mu')(\mu + \mu')} d\mu' \quad \mu \in (0,1) \quad \text{C.6}$$

A expressão C.6 foi utilizada tanto para $c < 1$, como para $c > 1$, e o método numérico utilizado foi o de aproximações sucessivas. A integral foi aproximada pelo método de quadratura de Gauss⁽¹⁹⁾, com 32 pontos de quadratura no subintervalo (0,0.99) e 32 no subintervalo (0.99,1). A função H foi calculada nos pontos de quadratura para propósitos computacionais.

Para as funções de normalização, discreta e contínua, usou-se as expressões 2.4.6 e 2.4.7 do capítulo 2:

$$N(\nu_0) = \frac{c\nu_0^3}{2} \left\{ \frac{c}{\nu_0^2 - 1} - \frac{1}{\nu_0^2} \right\} e \quad \text{C.7}$$

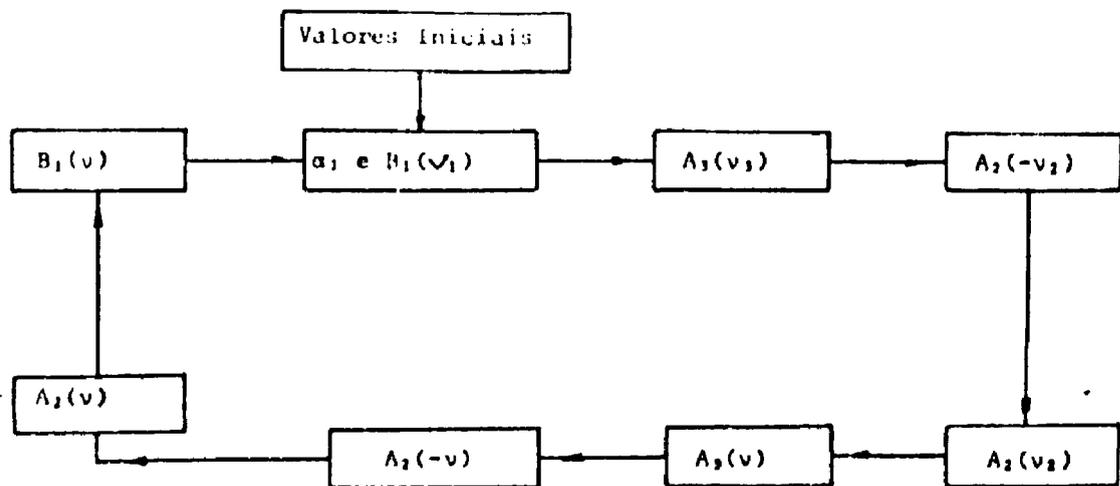
$$N(\nu) = \nu \left\{ (\lambda(\nu))^2 + \left(\frac{\pi c \nu}{2} \right)^2 \right\} \quad \text{C.8}$$

Conhecendo-se a função H nos pontos de quadratura, é possível calcular $H_i^{-1}(\nu_j)$ e $H_i^{-1}(-\nu_j)$, com a expressão 2.4.16 do capítulo 2.

$$H^{-1}(z) = 1 - \frac{cz}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{\mu' + z} \quad \text{C.9}$$

z – pode ser qualquer autovalor de H pertencente a qualquer meio.

A seguir foram calculados a meia distância crítica e os coeficientes. Adotou-se o seguinte esquema iterativo:



Para iniciar o processo iterativo, todos os coeficientes, e a meia distância crítica, foram igualados a zero. O processo foi até que a diferença entre duas iterações sucessivas para todos os coeficientes e a meia distância crítica, fosse menor que uma precisão $E = 10^{-6}$.

Os termos $\frac{\nu}{\xi - \nu} \{ E(\nu) - E(\xi) \}$ no limite quando $\xi = \nu$ foram avaliados pela regra de L'Hopital:

$$\lim_{\xi \rightarrow \nu} \frac{\nu}{\xi - \nu} \{ E(\nu) - E(\xi) \} = -\frac{\alpha}{\xi} E(\xi) \quad \text{C.10}$$

Para se conhecer a precisão dos coeficientes e da meia distância crítica, testou-se a condição de continuidade nas interfaces, equações 3.1.3, 3.1.4 do capítulo 3. Isto pode ser feito em duas formas. A primeira é conhecida como teste dos momentos, e é definida como:

$$\int_{-1}^{+1} \Psi_1(\alpha_1, \mu) \mu^K d\mu = \int_{-1}^{+1} \Psi_2(\alpha_1, \mu) \mu^K d\mu \rightarrow \text{interface 1} \quad \text{C.11}$$

$$\int_{-1}^{+1} \Psi_2(\beta, \mu) \mu^K d\mu = \int_{-1}^{+1} \Psi_3(\beta, \mu) \mu^K d\mu \rightarrow \text{interface 2} \quad \text{C.12}$$

$$K = 0, 1, \dots, N$$

A outra forma é o "teste ponto a ponto", ou seja, a continuidade do fluxo angular nas interfaces:

$$\Psi_1(\alpha_1, \mu) = \Psi_2(\alpha_1, \mu) \quad \mu \in (-1, 1) \quad \text{C.13}$$

$$\Psi_2(\beta, \mu) = \Psi_3(\beta, \mu) \quad \mu \in (-1, 1) \quad \text{C.14}$$

Deve-se notar que, no teste dos momentos, para $K = 0$, obtém-se a continuidade do fluxo total, e para $K = 1$, obtém-se a continuidade da corrente total.

O teste dos momentos foi aplicado até a ordem $K = 10$, fornecendo um mínimo de 7 dígitos para os 51 casos calculados pelo método de Case.

Quanto ao teste ponto a ponto, observou-se que em geral a precisão obtida por este teste é igual à fornecida pelo teste dos momentos, exceto para valores de $|\mu|$ próximos de 1. Isto se deve ao fato dos coeficientes contínuos não serem funções suaves (mostram gradientes altos) perto de $|\mu| = 1$ e das funções matemáticas $\ln\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$ que estão embutidas na expressão final do fluxo angular. O teste dos momentos não apresenta problemas deste tipo, uma vez que mede a precisão média no intervalo angular, e não influências locais como o teste ponto a ponto.

A seguir foi calculado o fluxo total, utilizando-se das expressões 3.1.33, 3.1.34 e 3.1.35 e o fluxo angular com as expressões 3.1.5, 3.1.6 e 3.1.7 do capítulo 3.

c.2) Procedimento Computacional no Método P_N

Para se determinar os autovalores e a meia distância crítica, usou-se as expressões B.11 e B.25 do apêndice B respectivamente. O método numérico utilizado foi o método do passo, que consiste em incrementar convenientemente a variável independente até localizar a raiz do determinante com uma precisão desejada. Para os $G_n(\nu_i)$ utilizou-se a expressão B.9 do apêndice B.

Após se determinar, autovalores, $G_n(\nu_i)$ e a meia distância crítica, procedeu-se o cálculo dos coeficientes, e para este fim normalizou-se o coeficiente do meio multiplicativo, que corresponde ao maior autovalor. O processo numérico utilizado foi o método de Gauss-Seidel⁽¹⁹⁾ para resolver o sistema de equações lineares.

Em todo o processo numérico, a precisão utilizada para a convergência foi igual a 10^{-6} , e analogamente ao método de Case, para se conhecer quão precisos são os resultados, foram testados numericamente as condições de contorno nas interfaces, expressões B-17 e B.18 do apêndice B.

Inicialmente, notou-se que a condição de contorno tipo Marshak implica necessariamente em continuidade do fluxo angular. Neste sentido, os testes aplicados forneceram um mínimo de 7 dígitos.

Para o cálculo dos fluxos, total e angular usou-se as definições do Apêndice B.

ABSTRACT

The criticality of slab reactors consisting of core, blanket, and reflector is studied numerically based on the singular-eigenfunction expansion method in one-group transport theory. The purpose of this work is three-fold: (1) It is shown that the three media problem can be converted, using a recently developed method, to a set of regular integral equations for the expansion coefficients, such that numerical solutions can be obtained for the first time based on an exact theory; (2) highly accurate numerical results that can serve as standards of comparison for various approximate methods are reported for representative sets of parameters; and (3) the accuracy of the P_N approximation, one of the more often used methods, is analyzed compared to the exact results.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A., eds. *Handbook of mathematical functions*. New York, N. Y., Dover, 1965.
2. AMBARZUMIAN, V. A. Diffuse reflection of light by a foggy medium. *C.r. Acad. Sci. USSR*, 38:229-32, 1943.
3. BELL, G. I. & GLASSTONE, S. *Nuclear reactor theory*. New York, N. Y., Van Nostrand Reinhold, 1970.
4. BOND, G. R. & SIEWERT, C. E. The effect of linearly anisotropic neutron scattering on disadvantage factor calculations. *Nucl. Sci. Engng*, 35:277-82, 1969.
5. BURKART, A. R., ISHIGURO, Y.; SIEWERT, C. E. *Neutron transport in two dissimilar media with anisotropic scattering*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, abr. 1976. (IEA-Pub-414; CEN-42).
6. BURNISTON, E. E. *Mathematical foundations of transport theory*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, mar. 1975. (IEA-Inf-47).
7. BUTKOV, E. *Mathematical physics*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1973.
8. CARLSON, B. G. *Solution of transport equation by S_N approximations*. Los Alamos, N. Mex. Los Alamos Scientific Laboratory, 1953 (LA-1599).
9. CASE, K. M. Elementary solutions of the transport equation and their applications. *Ann. Phys.* 9:1-23, 1960.
10. CASE, K. M. & ZWEIFEL, P. F. Existence and uniqueness theorem for the neutron transport equation. *J. math. Phys.*, 4:1376-85, 1963.
11. CASE, K. M. & ZWEIFEL, P. F. *Linear transport theory*, Reading, Mass., Addison wesley, 1967.
12. CHANDRASEKHAR, S. *Radiative transfer*. London, Univ. Press, 1950.
13. ERDMANN, R. C. & SIEWERT, C. E. Green's functions for the one-speed transport equation in spherical geometry. *J. math. Phys.*, 9:81-9, 1968.
14. GAKHOV, F. D. *Boundary value problem*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
15. GALLONE, S. & GHILDOTTI, G. On the use the Case's general solution of the transport equation in neutron transport problems. *Nuovo Cim.*, 31:203-18, 1964.

16. ISHIGURO, Y. On multi-region problems in plane geometry and the use of half-range orthogonality relations. *Nucl. Sci. Engng.*, 65:191-6, 1978.
17. ISHIGURO, Y. & GARCIA, R. D. M. *Numerical solutions of two media problems in two group neutron transport theory*, São Paulo, Instituto de Energia Atômica, jan. 1978. (IEA-Pub-494; CEN-AFR-55).
18. ISHIGURO, Y. & MAIORINO, I. R. *Problema de Milne em dois semiespaços adjacentes na teoria de transporte de nêutrons em dois grupos de energia*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, mai. 1977. (IEA-Pub-476; CEN-AFR-48).
19. KELLY, L. G. *Handbook of numerical methods and applications*. London, Addison – Wesley, 1967.
20. KUSCER, I.; McCORMICK, N. J.; SUMMERFIELD, G. C. Orthogonality of Case's eigenfunctions in one-speed transport theory. *Ann. Phys.*, 30:411-21, 1964.
21. KUSZELL, A. The critical problems for multilayer slab systems. *Acta Physiol. pol.*, 20:567-89, 1961.
22. LAMARSH, J. R. *Introduction to nuclear reactor theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
23. LOYALKA, S. K. A solution of the Milne problem using full range completeness Case's eigenfunction. *Nucl. Sci. Engng.*, 54:353-6, 1973.
24. McCORMICK, N. J. & KUSCER, I. Bi-orthogonality relations for solving half, space transport problems. *J. math. Phys.* 7:2036-45, 1966.
25. McCORMICK, N. J. & KUSCER, I. Half-space neutron transport with linearly anisotropic scattering. *J. math. Phys.*, 6:1939-45, 1965.
26. McCORMICK, N. J. & KUSCER, I. Neutron transport for anisotropic scattering in adjacent half space. I. Theory. *Nucl. Sci. Engng.*, 37:243-51, 1969.
27. McCORMICK, N. J. & MENDELSON, M. R. Transport solution of the one-speed slab albedo problem. *Nucl. Sci. Engng.*, 20:462-7, 1964.
28. MARK, J. C. *The spherical harmonics method, 1*. Chalk River, Ont., National Research Council of Canada, Atomic Energy Project, Division of Research, 1957. (CRT-340).
29. MIKA, J. R. Neutron transport with anisotropic scattering. *Nucl. Sci. Engng.*, 11:415-27, 1962.
30. PAHOR, S. & ZWEIFEL, P. F. Invariant imbedding and Case eigenfunctions. *J. math. Phys.*, 10:581-9, 1969.
31. SHIMIZU, A. & AOKI, K. *Application of invariant imbedding to reactor physics*. New York, N. Y., Academic, 1972.
32. SHURE, F. & NATELSON, M. Anisotropic scattering in half-space transport problems. *Ann. Phys.*, 26:274-91, 1964.
33. SIEWERT, C. E. On a problem of uniqueness regarding H. function calculations. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* 15:385-8, 1975.
34. SIEWERT, C. E. & BURKART, A. R. On the critical reactor problem for a reflected slab. *Nucl. Sci. Engng.*, 58:253-5, 1975.

35. SIEWERT, C. E. & SHIEH, P. S. Two group neutron transport, theory. *J. math. Energy*, 21:382-92, 1967.
36. WESTFALL, R. M. & METCALF, D. R. Singular eigenfunction solution of the monoenergetic neutron, transport equation for finite radially reflected critical cylindus. *Nucl. Sci. Engng.*, 52:1-11, 1973.
37. ZELAZNY, R. Exact solution of a critical problem for a slab. *J. math. Phys.*, 2:538-42, 1961.



INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA
Caixa Postal, 11049 - Pinheiros
CEP 05508
01000 - São Paulo - SP

Telefone: 211-6011
Endereço Telegráfico - IEATOMICA
Telex - 011-23592 IENA BR