

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
**SECRETARIA DA INDÚSTRIA, COMÉRCIO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**  
**AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**MAXIMIZAÇÃO DA POTÊNCIA DE UM REATOR ESFÉRICO  
REFLETIDO COM DISTRIBUIÇÃO DE  
COMBUSTÍVEL OTIMIZADA**

**JOAMAR RODRIGUES VINCENT READE**

Dissertação apresentada ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares como parte dos requisitos para obtenção do grau de "Mestre - Área Reactores Nucleares de Potência e Tecnologia do Combustível Nuclear".

**Orientador: Dra. Wilma Sonia Hahl de Syllos Cintra**

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES  
SECRETARIA DA INDÚSTRIA, COMÉRCIO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

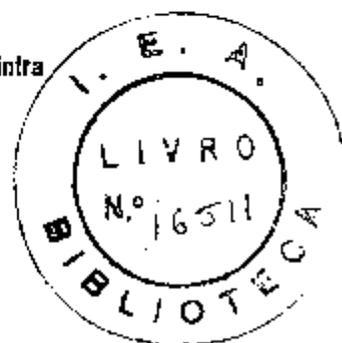
# MAXIMIZAÇÃO DA POTÊNCIA DE UM REATOR ESFÉRICO REFLETIDO COM DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTÍVEL OTIMIZADA

JOAMAR RODRIGUES VINCENT READE

Dissertação apresentada ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares como parte dos requisitos para obtenção do grau de "Mestre - Área Reactores Nucleares de Potência e Tecnologia do Combustível Nuclear".

Orientadora:

Dra. Wilma Sonia Hehl de Sylos Cintra



SÃO PAULO  
1979

## AGRADECIMENTOS

### *Agradeço:*

- *Profa. Dra. Wilma Hehl de Sylos Cintra pela orientação e amizade*
- *Prof. Dr. Yuji Ishiguro pela valiosa colaboração e principalmente pelas sugestões e discussões*
- *Prof. Dr. Atair Rios Neto pela colaboração e esclarecimentos*
- *Aos colegas Cesar Antonio Cinci, Maria Clara F. Ierardi e José Roberto M. Monteiro pelas sugestões, discussões e pelo coleguismo*
- *Ao PRONUCLEAR pelo auxílio financeiro*
- *Ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares pelos meios materiais*
- *Srta. Creusa Moreira Diniz pelo trabalho de datilografia.*

*E a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, na execução deste trabalho, meus agradecimentos.*

## RESUMO

Neste trabalho aplicando a teoria de controle ótimo foi determinada a potência máxima de um reator esférico refletido utilizando como controle a distribuição de combustível e respeitando vínculos impostos, na densidade de potência e na concentração de combustível. Foi considerado um reator térmico de raio fixo, que utiliza como combustível físsil o U-235 e como moderador água leve.

O reator foi descrito pelo método da teoria de difusão de nêutrons. A solução analítica foi obtida para dois e quatro grupos de energia e foi desenvolvido um programa FORTRAN para a obtenção de resultados numéricos.

### ABSTRACTS

The maximum power of a spheric reflected reactor was determined using the theory of optimal control. The control variable employed was the fuel distribution, in accordance to constraints on the power density and on the concentration fuel. It was considered a thermal reactor with a fixed radius. The reactor was fuelled with U-235 and moderated with light water.

The nuclear reactor was described by a diffusion theory model. The analytical solution was obtained for both two and four groups of energy and a FORTRAN program was developed to obtain the numerical results.

## INDICE

	Pag
1. INTRODUÇÃO	1
1.1- Considerações Gerais	1
1.2- Revisão Histórica	2
1.3- Objetivos	6
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	7
2.1- Teoria de Difusão de Nêutrons	7
2.2- Teoria de Controle Ótimo	12
3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	17
3.1- Equações de Estado	17
3.2- Modelagem do Problema em Controle Ótimo	20
3.3- Formalização do Problema na Teoria de Controle Ótimo	22
3.3.1- Condição de Criticalidade e Continuidade da Hamiltoniana	33
3.3.2- Normalização	35
3.4- Sistema Adjunto	38
3.5- Cálculo da Potência	43
3.6- Cálculo da Massa Crítica	44
4. RESULTADOS	46
5. COMENTÁRIOS E SUGESTÕES	61
APÊNDICE A - SOLUÇÃO PARA DOIS GRUPOS	69
APÊNDICE B - ZONA SINGULAR	84
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1- Considerações Gerais

A otimização de um sistema é de grande importância para a engenharia moderna, da qual a engenharia nuclear faz parte. Melhorar a eficiência de uma central nuclear, economizar combustível gerando energia a menores custos, garantir condições mais seguras de operação são objetivos de grande interesse dentro da problemática energética moderna.

A teoria de controle ótimo, que vem sendo empregada em engenharia nuclear, apenas recentemente, é a técnica mais eficaz para atingir as metas de otimização nesse campo.

As escolhas do índice de performance, que representa a grandeza que se quer otimizar, isto é, maximizar ou minimizar, juntamente com as variáveis de estado, que definem em cada instante o estado do sistema considerado, e com as variáveis de controle, que podem ser dirigidas, são de grande importância no problema de controle.

Para índice de performance pode-se citar como exemplos, potência, quantidade de massa físsil, etc. Para va

riáveis de estado tem-se como exemplos , temperatura do fluido refrigerante, fluxo de nêutrons, produção de veneno, etc., e para as variáveis de controle tem-se enriquecimento do combustível , pressão do fluido refrigerante, nível de veneno, reatividade, entre outras.

Entretanto, em um problema de otimização , podem aparecer restrições físicas e/ou tecnológicas e/ou de segurança , como por exemplo, o controle deve estar vinculado à criticalidade do reator.

Esses vínculos podem ser de igualdade e de desigualdade, restringindo a variável de estado, como por exemplo , a soma dos fluxos deve ser limitada. Podem , também, restringir a variável de controle , como por exemplo, a concentração de combustível deve ser limitada.

## 1.2- Revisão Histórica

A aplicação da teoria de controle ótimo a reatores nucleares é recente, como pode-se notar pelos artigos publicados . Cita-se , a seguir , alguns desses artigos.

Stacey Jr. /22,23/ em 1968 e 1969, estudou o problema de como controlar as oscilações espaciais introduzidas pelo xenônio em reatores de potência térmicos. Para a ob-

tenção da solução desses problemas aplicou os formalismos de programação dinâmica e cálculo variacional. Apresentou resultados numéricos.

R.A. Axford /1/, em 1969, estudando reatores planos e usando modelo de dois grupos, apresentou as soluções analíticas para reatores com diferentes conjuntos de vínculos, tanto na variável de controle como na variável de estado. Combinou vínculos, tais como, limite superior na densidade de potência, limite superior na concentração de combustível, limite no nível de fluxo rápido e limite na soma dos fluxos, tendo sempre como índice de performance a potência máxima. Não apresentou, entretanto, resultados numéricos.

Em 1970, P. Goldschmidt e J. Quenon/12/ utilizando geometria plana e um grupo de energia, minimizaram a massa crítica de um reator rápido, potência total fixa, com vínculos na densidade de potência e na concentração de combustível.

Em 1972, Goldschmidt /10/ encontrou a distribuição ótima da concentração de combustível que minimiza a massa crítica de um reator, sujeito a vínculos na densidade de potência e no enriquecimento de combustível, e conhecida a potência térmica total. O estudo foi feito para reatores intermediários, térmicos e rápidos. Utilizou -

geometria plana em dois grupos de energia . Não apresentou resultados numéricos.

Outra vez Goldschmidt /11/ , em 1973, apresentando resultados numéricos , encontrou a distribuição ótima do enriquecimento do combustível que minimiza o custo do ciclo do combustível de um reator rápido, tipo placa , usando o modelo da teoria de difusão em um grupo de energia , sujeito aos vínculos na concentração, na potência e na densidade de potência.

Em um artigo composto de duas partes, V. Bartosek e K. Zalesky /2/ e /3/, em 1974, encontraram a distribuição ótima de enriquecimento de combustível, que maximiza a potência de um reator tipo placa, usando a teoria de difusão em um grupo de energia, considerando vínculos na densidade de potência e no nível de fluxo. Apresentaram resultados numéricos.

Em 1975, N. Tsouri, J. Rootenberg e L.J. Lidofsky /24/, encontraram a trajetória otimizada da mudança de reatividade necessária para acompanhar a mudança do nível de potência, enquanto minimiza os desvios do nível de potência e das concentrações de xenônio e iodo. Aplicando técnicas de controle ótimo minimizaram as oscilações de xenônio. Apresentaram resultados numéricos.

W.N. dos Santos /20/, em 1977, na sua recente dissertação de mestrado, encontrou a distribuição ótima de combustível que maximiza a potência, sujeita aos vínculos na densidade de potência e na concentração de combustível. O reator foi discutido pelo método da teoria de difusão em quatro grupos de energia e geometria plana. Apresentou resultados numéricos.

C.A. Cinci /6/, em 1979, na sua dissertação de mestrado a ser apresentada, encontrou a distribuição ótima de combustível que maximiza a retirada de potência, com vínculos impostos na concentração de combustível e na densidade de potência. O reator foi descrito pelo método da teoria de difusão em quatro grupos de energia e geometria cilíndrica. Apresentou resultados numéricos.

Neste trabalho, maximizou-se a potência, controlando a concentração de combustível de um reator esférico, com refletor, de raio total conhecido. Os vínculos foram impostos na densidade de potência e na concentração de combustível. A interface cerne-refletor foi determinada através dos vínculos impostos. Foi encontrada a solução analítica e foram obtidos resultados numéricos, usando-se o modelo da teoria de difusão em quatro grupos de energia.

### 1.3- Objetivos

Os reatores nucleares, geralmente, são refletidos visando a economia de material físsil.

O objetivo deste estudo é determinar, com a aplicação da técnica de controle ótimo, a distribuição de combustível, no cerne do reator, que maximiza a retirada de potência de um reator esférico, com refletor de espessura a ser calculada em função da economia, de considerações tecnológicas e do índice de performance almejado.

Na obtenção da solução desse problema de reator crítico, o índice de performance é a potência e os vínculos são impostos na densidade de potência e na concentração de combustível. A espessura do refletor deve ser determinada.

Os resultados são obtidos em dois e quatro grupos de energia de nêutrons.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1- Teoria de Difusão de Nêutrons

Para nêutrons monoenergéticos, a variação com o tempo, do número de nêutrons num volume qualquer é dada pela equação da continuidade /8/, /17/:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = S(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) - \text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) \quad 2.1.1$$

onde:

$n(\vec{r}, t)$  - densidade de nêutrons no ponto  $\vec{r}$ , no tempo  $t$ , dada em nêutrons por  $\text{cm}^3$ .

$S(\vec{r}, t)$  - função distribuição de fontes de nêutrons. Representa o número de nêutrons emitidos, por  $\text{cm}^3$ , e por segundo, no tempo  $t$ , por fontes no ponto  $\vec{r}$ .  
Termo fonte.

$\Sigma_a(\vec{r}, t)$  - secção de choque macroscópica de absorção de nêutrons. É a probabilidade de um nêutron ser absorvido pelo meio no ponto  $\vec{r}$ , por unidade de deslocamento do nêutron.

$\phi(\vec{r}, t)$  - fluxo de nêutrons, no ponto  $\vec{r}$ , e no tempo  $t$ , dado em nêutrons por  $\text{cm}^2$  por segundo.

$\Sigma_a(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) dV$  - número de nêutrons absorvidos por segundo num elemento de volume  $dV$ , no ponto  $\vec{r}$ , no tempo  $t$ . Termo de perda.

$\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) dV$  - número de nêutrons que escapam por segundo do elemento de volume  $dV$ , em  $\vec{r}$ , no tempo  $t$ . Termo de perda de nêutrons por fuga física. Se  $\vec{J}$  é o vetor densidade de corrente de nêutrons, então  $\vec{J} \cdot \vec{n}$  representa o escoamento líquido de nêutrons numa área unitária, perpendicular a  $\vec{n}$ , por segundo.

O reator está em estado estacionário, se o número de nêutrons em um elemento de volume arbitrário, é constante no tempo. Então, a equação da continuidade no estado estacionário é dada por:

$$\text{div } \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}) - S(\vec{r}) = 0 \quad 2.1.2$$

Supondo as seguintes hipóteses:

- o meio é infinito
- o meio é uniforme, o que implica em secções de choque constantes e independentes da posição
- não há fontes de nêutrons no meio
- o espalhamento é isotrópico no sistema de coordenadas de laboratório
- o fluxo de nêutrons é uma função que varia lentamente com a posição
- o fluxo de nêutrons é uma função independente do tempo,

pode-se usar a lei de Fick, que relaciona  $\phi$  e  $\vec{J}$ , para resolver a equação da continuidade. A lei de Fick - que, anteriormente só foi usada para descrever fenômenos

de difusão em líquidos e gases, representa o ponto central da teoria de difusão em reatores.

Apesar dessas condições não serem, rigorosamente, obedecidas em todo o reator, a lei de Fick vale a partir de uma distância de dois a três livres caminhos médios de fontes, interfaces e fronteiras.

O coeficiente de difusão de nêutrons,  $D(\vec{r})$ , que representa a difusividade do nêutron no meio, pode ser considerado constante no meio, visto que ele, praticamente, só depende da natureza do moderador.

Supondo todos os nêutrons, com a mesma energia  $E$  (ou velocidade  $V$ ), pode-se escrever o fluxo como:

$$\phi = n V \quad 2.1.3$$

Usando-se a lei de Fick e as observações feitas, escreve-se a equação da continuidade como:

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + S = 0 \quad 2.1.4$$

Esta é a chamada equação da difusão de nêutrons para o estado estacionário.

Como num reator os nêutrons de fissão nascem com energias que variam desde, aproximadamente zero e  $V$  até energias da ordem de 15 MeV, usa-se o modelo de multi-gru

po, no qual o espectro de energia dos nêutrons é dividido em um número arbitrário de grupos de energia.

No modelo de multigrupo, quanto maior o número de grupos considerados mais realísticos são os resultados para o cálculo de um reator. Tomando-se  $N$  grupos, as equações de difusão neste modelo, podem ser escritas como:

$$D_g \nabla^2 \phi_g(\vec{r}) - \Sigma_{ag} \phi_g(\vec{r}) - \left[ \sum_{h=g}^N \Sigma_{(g \rightarrow h)} \right] \phi_g(\vec{r}) + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{(h \rightarrow g)} \phi_h(\vec{r}) + \chi_g \sum_{h=1}^N \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h(\vec{r}) = 0 \quad 2.1.5$$

$$g = 1, 2, \dots, N$$

e a corrente líquida de nêutrons como:

$$\vec{J}_g(\vec{r}) = - D_g \text{grad } \phi_g(\vec{r}) \quad 2.1.6$$

Em cada grupo, a fuga, o espalhamento e a absorção são tomados como médias de grupo, e os coeficientes de difusão são considerados independentes da posição.

Nesse sistema não se considerou o espalhamento de nêutrons de energias mais baixas para grupos de energias mais altas e nem foram consideradas fontes de nêutrons externas.

Nas equações acima, os parâmetros para cada grupo de energias  $g$ , são:

- $D_g$  - coeficiente de difusão do grupo  $g$   
 $\phi_g$  - fluxo de nêutrons do grupo  $g$   
 $\Sigma_{ag}$  - secção de choque macroscópica de absorção do grupo  $g$   
 $\Sigma_{(g \rightarrow h)}$  - secção de choque macroscópica de espalhamento do grupo  $g$  para o  $h$  ( $g < h \leq N$ )  
 $\chi_g$  - fração de nêutrons de fissão que aparece no grupo  $g$   
 $\nu_h$  - número médio de nêutrons emitidos por fissão no grupo  $h$   
 $\Sigma_{(h \rightarrow g)}$  - secção de choque macroscópica de espalhamento do grupo  $h$  para o grupo  $g$  ( $1 \leq h \leq g$ ).

Os termos são:

- $D_g \nabla^2 \phi_g(\vec{r})$  - fuga de nêutrons do grupo  $g$   
 $\Sigma_{ag} \phi_g(\vec{r})$  - perda de nêutrons por absorção no grupo  $g$   
 $\left[ \sum_{h=g}^N \Sigma_{(g \rightarrow h)} \right] \phi_g(\vec{r})$  - perda de nêutrons que são espalhados no grupo  $g$  para os outros grupos de energia mais baixa  $h$   
 $\left[ \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{(h \rightarrow g)} \right] \phi_h(\vec{r})$  - número de nêutrons espalhados de grupo de energia mais alta  $h$  para o grupo  $g$ ; é um termo fonte para o grupo  $g$   
 $\chi_g \left[ \sum_{h=1}^N \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h(\vec{r}) \right]$  - número de nêutrons de fissão que nascem no grupo  $g$ .

## 2.2- Teoria de Controle Ótimo

Em técnicas de controle ótimo, /4/, /5/, /7/, /20/, a otimização de um dado sistema visa maximizar ou minimizar uma determinada função, denominada índice de performance, IP, usando-se uma variável de controle escolhida de modo a atingir objetivos pré-fixados.

O problema de controle ótimo pode ser resumido por:

$$\text{Otimizar } IP = g + \int_{t_i}^{t_f} f_0 dt \quad 2.2.1$$

onde:

$$g = g(t_i, x(t_i), t_f, x(t_f))$$

$$f_0 = f_0(x, u, t)$$

$t_i$  e  $t_f$  - são os valores iniciais e finais das variáveis independentes do sistema

$x$  - é a variável de estado que descreve o sistema

$u$  - é a variável de controle.

No caso geral  $x$  e  $u$  são vetores.

Sujeito aos vínculos: 2.2.2

- dinâmicos:

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad 2.2.2$$

- de contorno:

$$\psi_j = \psi_j(t_i, x(t_i), t_f, x(t_f)) \quad j=1, 2, \dots, m \quad 2.2.3$$

- de desigualdade na variável de controle:

$$C_k(x, u, t) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, l \quad 2.2.4$$

O vínculo de desigualdade na variável de controle significa que existem condições que restringem o controle.

Define-se a Hamiltoniana do sistema como:

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \sum_{k=1}^l \mu_k C_k \quad 2.2.5$$

onde  $\lambda_i$  e  $\mu_k$  são multiplicadores de Lagrange e funções de  $t$ , e  $\mu_k$  são tais que:

$$\begin{aligned} \mu_k &= 0 && \text{se } C_k < 0 \\ \mu_k &\neq 0 && \text{se } C_k = 0 \end{aligned} \quad 2.2.6$$

Pelo princípio de Máximo de Pontryagin /18/, se  $u^*$  é o controle ótimo que maximiza o IP, então :

$$H(x, u^*, \lambda, t) \geq H(x, u, \lambda, t) \quad 2.2.7$$

O Princípio de Pontryagin mostra que se o controle é ótimo, a Hamiltoniana é máxima em todo e qualquer ponto do sistema. Para se resolver um problema de otimização pela teoria de controle ótimo deve-se ter:

- as equações de controle:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad 2.2.8$$

número de equações igual ao número de componentes  $\bar{u}$ .

- as equações dinâmicas:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \quad 2.2.9$$

n equações

- as equações adjuntas:

$$\dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad 2.2.10$$

n equações

E, ainda deve-se definir uma função G dada por:

$$G = g + \sum_{j=1}^m v_j \psi_j \quad 2.2.11$$

que engloba as funções iniciais e finais do sistema, mais os vínculos de contorno acoplados através de multiplicadores de Lagrange,  $v$ , introduzidos.

Com este procedimento, tem-se as equações de contorno através da condição de transversalidade:

$$\left[ H(t_i) + \frac{\partial G}{\partial t_i} \right] dt_i = 0 \quad 2.2.12a$$

$$\left[ \lambda_j(t_i) - \frac{\partial G}{\partial x_j(t_i)} \right] dx_j(t_i) = 0 \quad j=1,2,\dots,n. \quad 2.2.12b$$

$$\left[ H(t_f) + \frac{\partial G}{\partial t_f} \right] dt_f = 0 \quad 2.2.12c$$

$$\left[ \lambda_j(t_f) - \frac{\partial G}{\partial x_j(t_f)} \right] dx_j(t_f) = 0 \quad j=1,2,\dots,n \quad 2.2.12d$$

O controle só pode estar dentro ou sobre as fronteiras  $C_k$  no caso de existirem vínculos de desigualdade na variável de controle. Nos pontos de entrada e saída, o controle exige que a Hamiltoniana e os multiplicadores sejam contínuos.

No caso do controle não estar sobre nenhuma fronteira, diz-se que a zona é singular.

Se a Hamiltoniana é linear em relação ao controle, então, a equação (2.2.8) não apresenta a variável explicitamente, isto é, independe de  $u$ , obtendo-se somente relações entre  $x_i$ ,  $\lambda_i$ , e  $t$ . Nesse caso pode ser que exista a zona singular. Esta existirá se, na seguinte sequência de condições, aparecer explicitamente a variável de controle, e esta for diferente de zero:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) = \dots = \frac{d^M}{dt^M} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0 \quad 2.2.13$$

Para que o controle seja ótimo, nessa zona, deve obedecer a condição de Legendre - Clebsch generalizada:

$$(-1)^K \frac{\partial}{\partial u} \left| \left( \frac{d}{dt} \right)^{2K} \frac{\partial H}{\partial u} \right| \leq 0 \quad K = 0, 1, 2, \dots \quad 2.2.14$$

conhecida também como critério de Robbins /19/.

Se  $K$  é o menor valor para o qual a desigualdade acima é verificada, então, a ordem da singularidade da trajetória é  $2K$ .

Se não existe zona singular, o controle  $u$  está sempre sobre uma das fronteiras dos vínculos.

### 3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

#### 3.1- Equações de Estado

O sistema considerado foi um reator esférico de raio  $R$ , descrito em coordenadas esféricas. É um reator de urânio enriquecido, moderado a água leve. Usou-se a teoria de difusão em quatro grupos de energia de nêutrons, sendo que o grupo de energia mais baixa é o grupo térmico. O grupo de energia mais alta foi indicado pelo índice  $i = 1$  e de energia mais baixa por  $i = 4$ .

Foram feitas algumas considerações e aproximações que - facilitam o problema matemático, não implicando em alterações significativas do problema físico. São elas:

- os nêutrons de fissão nascem dentro do grupo de energia mais alta, assim:  $\chi_1 = 1$  e  $\chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0$
- as fissões são induzidas somente por nêutrons do grupo térmico. Portanto,  $\Sigma_{f1} = \Sigma_{f2} = \Sigma_{f3} = 0$  e  $\Sigma_{f4} \neq 0$ . Fazendo  $\Sigma_{f4} = \Sigma_f$  e  $\nu_4 = \nu$ , tem-se, apenas  $\nu\Sigma_f \neq 0$
- a absorção de nêutrons ocorre somente no grupo térmico, isto é:  $\Sigma_{a1} = \Sigma_{a2} = \Sigma_{a3} = 0$  e  $\Sigma_{a4} \neq 0$ . Assim,  $\Sigma_{a4} = \Sigma_a$
- não há espalhamento (elástico ou inelástico) de nêutrons de um grupo de energia mais baixa para outro grupo de energia mais alta. Assim, a secção de choque macroscópica de remoção do grupo térmico é nula:  $\Sigma_{R4} = 0$

- a secção de choque macroscópica de remoção do grupo  $g$  é dada por:

$$\Sigma_{Rg} = \sum_{h>g}^4 \Sigma_{(g+h)}$$

- os coeficientes de difusão,  $D_g$ , podem ser considerados constantes no meio.

Com estas considerações as equações de difusão para quatro grupos podem ser escritas:

$$D_1 \nabla^2 \phi_1(r) - \Sigma_{R1} \phi_1(r) + \nu \Sigma_f \phi_4(r) = 0 \quad 3.1.1$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_2(r) - \Sigma_{R2} \phi_2(r) + \Sigma_{(1+2)} \phi_1(r) = 0 \quad 3.1.2$$

$$D_3 \nabla^2 \phi_3(r) - \Sigma_{R3} \phi_3(r) + \Sigma_{(1+3)} \phi_1(r) + \Sigma_{(2+3)} \phi_2(r) = 0 \quad 3.1.3$$

$$D_4 \nabla^2 \phi_4(r) - \Sigma_a \phi_4(r) + \Sigma_{(1+4)} \phi_1(r) + \Sigma_{(2+4)} \phi_2(r) + \Sigma_{(3+4)} \phi_3(r) = 0 \quad 3.1.4$$

Devido a simetria do problema, o laplaciano em geometria esférica se reduz a :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}$$

A corrente de nêutrons para cada grupo é dada por:

$$J_1(r) = - D_1 \frac{d}{dr} \phi_1(r) \quad 3.1.5$$

$$J_2(r) = -D_2 \frac{d}{dr} \phi_2(r) \quad 3.1.6$$

$$J_3(r) = -D_3 \frac{d}{dr} \phi_3(r) \quad 3.1.7$$

$$J_4(r) = -D_4 \frac{d}{dr} \phi_4(r) \quad 3.1.8$$

As secções de choque macroscópicas de fissão e de absorção podem ser escritas em função da distribuição de combustível. Assim:

$$\Sigma_f(r) = N(r) \sigma_f \quad 3.1.9$$

$$\Sigma_a(r) = \Sigma_a^M + \Sigma_a^F = \Sigma_a^M + N(r) \sigma_a^F \quad 3.1.10$$

onde:

$\sigma_f$  : secção de choque macroscópica de fissão

$\Sigma_a^M$  : secção de choque macroscópica de absorção do moderador

$\sigma_a^F$  : secção de choque microscópica de absorção do combustível.

A potência do reator é dada pela integral da densidade de potência em todo volume do reator:

$$P_{OT} = \int_V q(r) dV \quad 3.1.11$$

$$\text{onde, } q(r) = \epsilon \sigma_f N(r) \phi_4(r) \quad 3.1.12$$

Em coordenadas esféricas, tem-se:

$$POT = \int_0^R 4 \pi \epsilon \sigma_f N(r) \phi_*(r) r^2 dr \quad 3.1.13$$

onde  $\sigma_f$  é dada em  $\text{cm}^2$ ,  $N(r)$  em átomos por  $\text{cm}^3$ , e  $\epsilon$  é um fator de conversão de fissões em  $\text{cm}^3$  por segundo em watts por  $\text{cm}^3$ , considerando uma liberação de energia, por fissão, de 200 MeV. A potência é dada em watts.

### 3.2- Modelagem do Problema em Controle Ótimo

As equações dinâmicas são equações diferenciais de segunda ordem, e para serem tratadas pela teoria de controle ótimo, devem ser transformadas em equações diferenciais de primeira ordem. Combinando-se as equações (3.1.1) a (3.1.4) com as equações (3.1.5) a (3.1.8) obtém-se:

$$\dot{Y}_1(r) = - \frac{1}{D_1} Y_2(r) \quad 3.2.1$$

$$\dot{Y}_2(r) = - \frac{2}{r} Y_2(r) - \Sigma_{R1} Y_1(r) + v \sigma_f N(r) Y_7(r) \quad 3.2.2$$

$$\dot{Y}_3(r) = - \frac{1}{D_2} Y_4(r) \quad 3.2.3$$

$$\dot{Y}_4(r) = - \frac{2}{r} Y_4(r) + \Sigma_{(1+2)} Y_1(r) - \Sigma_{R2} Y_3(r) \quad 3.2.4$$

$$\dot{Y}_5(r) = - \frac{1}{D_3} Y_6(r) \quad 3.2.5$$

$$\dot{Y}_6(r) = - \frac{2}{r} Y_6(r) + \Sigma_{(1+3)} Y_1(r) + \Sigma_{(2+3)} Y_3(r) - \Sigma_{R3} Y_5(r) \quad 3.2.6$$

$$\dot{Y}_7(r) = - \frac{1}{D_4} Y_8(r) \quad 3.2.7$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_8(r) = & -\frac{2}{r} Y_8(r) + \Sigma_{(1+4)} Y_1(r) + \Sigma_{(2+4)} Y_3(r) + \\ & + \Sigma_{(3+4)} Y_5(r) - [\epsilon_a^M + \sigma_a^F N(r)] Y_7(r) \end{aligned} \quad 3.2.8$$

onde os índices pares e ímpares dos Y's são, respectivamente, as correntes e os fluxos. Fazendo

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \dot{Y}(r) \quad \text{e} \quad \frac{d^2\phi(r)}{dr^2} = \ddot{Y}(r) .$$

As condições de contorno são:

- os fluxos devem ser nulos na fronteira do reator:

$$Y_1(R) = Y_3(R) = Y_5(R) = Y_7(R) = 0$$

- as correntes são nulas no centro do reator, devido a simetria do sistema:

$$Y_2(0) = Y_4(0) = Y_6(0) = Y_8(0) = 0 .$$

A variável de controle é a concentração de combustível.

Os vínculos de desigualdade impostos são:

- a densidade de potência não deve exceder a um valor limite  $q_{\max}$ , isto é:

$$q(r) \leq q_{\max}$$

- a concentração de combustível, no cerne do reator, deve ter um valor positivo e deve ser nula no refletor, isto é,

$$- N(r) \leq 0 \quad 3.2.10$$

Este vínculo introduz o refletor, não pela maneira clássica da teoria de difusão, mas através de um vínculo em teoria de controle ótimo. Este vínculo de desigualdade é imposto na variável de controle,  $N(r)$ .

A potência é o Índice de Performance que se deseja maximizar:

$$IP = POT = \int_0^R 4\pi \epsilon \sigma_f N(r) Y_7(r) r^2 dr \quad 3.2.11$$

### 3.3- Formalização do Problema na Teoria de Controle Ótimo

Maximizar:

$$IP = \int_0^R 4\pi \epsilon \sigma_f r^2 N(r) Y_7(r) dr \quad 3.3.1$$

sujeito aos vínculos:

- dinâmicos:

$$\dot{Y}_1(r) = - \frac{1}{D_1} Y_2(r) \quad 3.3.2$$

$$\dot{Y}_2(r) = - \frac{2}{r} Y_2(r) - \Sigma_{R1} Y_1(r) + \nu \sigma_f N(r) Y_7(r) \quad 3.3.3$$

$$\dot{Y}_3(r) = - \frac{1}{D_2} Y_4(r) \quad 3.3.4$$

$$\dot{Y}_4(r) = -\frac{2}{r} Y_4(r) + \varepsilon_{(1+2)} Y_1(r) - \varepsilon_{R2} Y_3(r) \quad 3.3.5$$

$$\dot{Y}_5(r) = -\frac{1}{D_3} Y_6(r) \quad 3.3.6$$

$$\dot{Y}_6(r) = -\frac{2}{r} Y_6(r) + \varepsilon_{(1+3)} Y_1(r) + \varepsilon_{(2+3)} Y_3(r) - \varepsilon_{R3} Y_5(r) \quad 3.3.7$$

$$\dot{Y}_7(r) = -\frac{1}{D_4} Y_8(r) \quad 3.3.8$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_8(r) = & -\frac{2}{r} Y_8(r) + \varepsilon_{(1+4)} Y_1(r) + \varepsilon_{(2+4)} Y_3(r) \\ & + \varepsilon_{(3+4)} Y_5(r) - |\Sigma_a^M + \sigma_a^F N(r)| Y_7(r) \end{aligned} \quad 3.3.9$$

- de contorno:

$$\psi_1 = Y_1(R) = 0 \quad 3.3.10$$

$$\psi_2 = Y_2(0) = 0 \quad 3.3.11$$

$$\psi_3 = Y_3(R) = 0 \quad 3.3.12$$

$$\psi_4 = Y_4(0) = 0 \quad 3.3.13$$

$$\psi_5 = Y_5(R) = 0 \quad 3.3.14$$

$$\psi_6 = Y_6(0) = 0 \quad 3.3.15$$

$$\psi_7 = Y_7(R) = 0 \quad 3.3.16$$

$$\psi_8 = Y_8(0) = 0 \quad 3.3.17$$

- de desigualdade na variável de controle :

$$C_1(N, Y_3) = q(r) - q_{\max} = 0 \quad 3.3.18$$

$$C_2(N) = -N(r) \leq 0 \quad 3.3.19$$

A Hamiltoniana , para este problema é dada por:

$$H = 4 \pi \epsilon \alpha_T Y_7(r) N(r) r^2 + \sum_{i=1}^8 \lambda_i(r) \dot{Y}_i(r) + \sum_{k=1}^2 \mu_k C_k(Y, N, r) \quad 3.3.20$$

Os multiplicadores de Lagrange  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são tais que:

$$\mu_k(r) = 0 \quad \text{se } C_k < 0 \quad 3.3.21$$

$$k = 1, 2$$

$$\mu_k(r) \neq 0 \quad \text{se } C_k = 0$$

A solução ótima da distribuição de combustível,  $N(r)$ , está compreendida por duas fronteiras de acordo com:

$$\text{Caso 1: } C_1 = 0 \quad \text{para } 0 \leq r \leq r_1$$

$$C_2 = 0 \quad \text{para } r_1 \leq r \leq R$$

$$\text{Caso 2: } C_2 = 0 \quad \text{para } 0 \leq r \leq r_1$$

$$C_1 = 0 \quad \text{para } r_1 \leq r \leq R$$

$$\text{Caso 3: } C_1 < 0 \quad \text{para } 0 \leq r \leq r_1$$

$$C_2 < 0 \quad \text{para } r_1 \leq r \leq R$$

onde  $r_1$  é o ponto de interface das duas regiões, a ser determinado.

Mostra-se no Apêndice B, que a zona singular , caso 3, não existe. Não existindo zona singular, então, a trajetória ótima deve estar sempre em uma das fronteiras.

A sequência ótima é dada pelo Caso 1, visto que, fisicamente o refletor só pode estar circundando o cerne do reator, para evitar fuga de nêutrons provenientes do cerne. Esta conclusão, também pode ser tirada através da condição de contorno, que requer  $Y_7(R) = 0$  na fronteira externa do reator, e com  $C_1 = 0$  para a região externa, implica em um valor infinito para  $N(r)$  em  $r = R$ . Tem-se, então, definida a sequência de zonas do reator: a zona central com densidade de potência limitada e a zona externa sem combustível, ou seja, o refletor.

Tem-se, então, a Hamiltoniana para as duas regiões do reator:

$$\text{Para } 0 \leq r \leq r_1$$

$$H_c = 4 \pi \epsilon \sigma_f N Y_7 r^2 + \sum_{i=1}^8 \lambda_i \dot{Y}_i + \mu_1(r) (\epsilon \sigma_f N Y_7 - q_{\max}) \quad 3.3.22$$

$$\text{Para } r_1 \leq r \leq R$$

$$H_e = 4 \pi \epsilon \sigma_f N Y_7 r^2 + \sum_{i=1}^8 \lambda_i \dot{Y}_i - \mu_2(r) N(r) \quad 3.3.23$$

indicando-se com o índice  $c$  para a região interna e com o índice  $e$  para a região externa.

Introduzindo nessas equações a equação de controle (2.2.8) obtém-se os multiplicadores de Lagrange  $\mu_1(r)$  e  $\mu_2(r)$ . Da condição (3.3.21) obtém-se as concentrações de combustível para cada zona.

$$\mu_1(r) = \frac{\lambda_8(r)\sigma_a^F - \lambda_2(r)v\sigma_f - 4\pi\epsilon\sigma_f r^2}{\epsilon\sigma_f} \quad 3.3.24$$

Como  $C_1 = 0$ , tem-se:

$$N_c(r) = \frac{q_{\max}}{\epsilon\sigma_f Y_7(r)} \quad 3.3.25$$

Para  $r_1 \leq r \leq R$

$$\mu_2(r) = 4\pi\epsilon\sigma_f r^2 + \lambda_2(r)v\sigma_f - \lambda_8(r)\sigma_a^F \quad 3.3.26$$

Como  $C_2 = 0$ , tem-se:

$$N_e(r) = 0 \quad 3.3.27$$

Conhecida a distribuição de combustível para cada uma das zonas do reator, pode-se escrever o sistema de estado para cada região, onde, na região central, foi introduzida a normalização  $N_c(r)Y_7(r) = 1$ , a ser explicada no item - (3.3.2). Na região externa  $N_e(r) = 0$ .

Para  $0 \leq r \leq r_1$

$$\dot{Y}_{1c}(r) = -\frac{1}{D_1} Y_{2c}(r) \quad 3.3.28$$

$$\dot{Y}_{2c}(r) = -\frac{2}{r} Y_{2c}(r) - \Sigma_{R1} Y_{1c}(r) + v\sigma_f \quad 3.3.29$$

$$\dot{Y}_{3c}(r) = -\frac{1}{D_2} Y_{4c}(r) \quad 3.3.30$$

$$\dot{Y}_{4c}(r) = -\frac{2}{r} Y_{4c}(r) + \Sigma_{(1+2)} Y_{1c}(r) - \Sigma_{R2} Y_{3c}(r) \quad 3.3.31$$

$$\dot{Y}_{5c}(r) = -\frac{1}{D_3} Y_{6c}(r) \quad 3.3.32$$

$$\dot{Y}_{6c}(r) = -\frac{2}{r} Y_{6c}(r) + \Sigma_{(1+3)} Y_{1c}(r) + \Sigma_{(2+3)} Y_{3c}(r) - \Sigma_{R3} Y_{5c}(r) \quad 3.3.33$$

$$\dot{Y}_{7c}(r) = -\frac{1}{D_4} Y_{8c}(r) \quad 3.3.34$$

$$\dot{Y}_{8c}(r) = -\frac{2}{r} Y_{8c}(r) + \Sigma_{(1+4)} Y_{1c}(r) + \Sigma_{(2+4)} Y_{3c}(r) + \Sigma_{(3+4)} Y_{5c}(r) - \Sigma_a^M Y_{7c}(r) - \sigma_a^F \quad 3.3.35$$

Para  $r_1 \leq r \leq R$

$$\dot{Y}_{1e}(r) = -\frac{1}{D_1} Y_{2e}(r) \quad 3.3.36$$

$$\dot{Y}_{2e}(r) = -\frac{2}{r} Y_{2e}(r) - \Sigma_{R1} Y_{1e}(r) \quad 3.3.37$$

$$\dot{Y}_{3e}(r) = -\frac{1}{D_2} Y_{4e}(r) \quad 3.3.38$$

$$\dot{Y}_{4e}(r) = -\frac{2}{r} Y_{4e}(r) + \Sigma_{(1+2)} Y_{1e}(r) - \Sigma_{R2} Y_{3e}(r) \quad 3.3.39$$

$$\dot{Y}_{5e}(r) = -\frac{1}{D_3} Y_{6e}(r) \quad 3.3.40$$

$$\dot{Y}_{6e}(r) = -\frac{2}{r} Y_{6e}(r) + \Sigma_{(1+3)} Y_{1e}(r) + \Sigma_{(2+3)} Y_{3e}(r) - \Sigma_{R3} Y_{5e}(r) \quad 3.3.41$$

$$\dot{Y}_{7e}(r) = -\frac{1}{D_4} Y_{8e}(r) \quad 3.3.42$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{8e}(r) = & -\frac{2}{r} Y_{8e}(r) + \Sigma_{(1+4)} Y_{1e}(r) + \Sigma_{(2+4)} Y_{3e}(r) \\ & + \Sigma_{(3+4)} Y_{5e}(r) - \Sigma_a^M Y_{7e}(r) \end{aligned} \quad 3.3.43$$

No caso em que é possível a normalização, o problema pode ser resolvido mais facilmente. Reagrupando as equações diferenciais duas a duas, em cada zona, obtém-se dois sistemas de quatro equações diferenciais.

Assim, para a região interna:

$$D_1[\ddot{Y}_{1c}(r) + \frac{2}{r} \dot{Y}_{1c}(r)] - \Sigma_{R1} Y_{1c}(r) + v \sigma_f = 0 \quad 3.3.44$$

$$D_2[\ddot{Y}_{3c}(r) + \frac{2}{r} \dot{Y}_{3c}(r)] - \Sigma_{R2} Y_{3c}(r) + \Sigma_{(1+2)} Y_{1c}(r) = 0 \quad 3.3.45$$

$$\begin{aligned} D_3[\ddot{Y}_{5c}(r) + \frac{2}{r} \dot{Y}_{5c}(r)] - \Sigma_{R3} Y_{5c}(r) + \Sigma_{(1+3)} Y_{1c}(r) + \\ + \Sigma_{(2+3)} Y_{3c}(r) = 0 \end{aligned} \quad 3.3.46$$

$$\begin{aligned} D_4[\ddot{Y}_{7c}(r) + \frac{2}{r} \dot{Y}_{7c}(r)] - \Sigma_a^M Y_{7c}(r) + \Sigma_{(1+4)} Y_{1c}(r) + \\ + \Sigma_{(2+4)} Y_{3c}(r) + \Sigma_{(3+4)} Y_{5c}(r) - \sigma_a^F = 0 \end{aligned} \quad 3.3.47$$

e para a região externa,  $N_e(r) = 0$  :

$$D_1 \left[ \ddot{Y}_{1e}(r) + \frac{2}{r} \dot{Y}_{1e}(r) \right] - \Sigma_{R1} Y_{1e}(r) = 0 \quad 3.3.48$$

$$D_2 \left[ \ddot{Y}_{3e}(r) + \frac{2}{r} \dot{Y}_{3e}(r) \right] - \Sigma_{R2} Y_{3e}(r) + \Sigma_{(1 \rightarrow 2)} Y_{1e}(r) = 0 \quad 3.3.49$$

$$D_3 \left[ \ddot{Y}_{5e}(r) + \frac{2}{r} \dot{Y}_{5e}(r) \right] - \Sigma_{R3} Y_{5e}(r) + \Sigma_{(1 \rightarrow 3)} Y_{1e}(r) + \\ + \Sigma_{(2 \rightarrow 3)} Y_{3e}(r) = 0 \quad 3.3.50$$

$$D_5 \left[ \ddot{Y}_{7e}(r) + \frac{2}{r} \dot{Y}_{7e}(r) \right] - \Sigma_a^M Y_{7e}(r) + \Sigma_{(1 \rightarrow 4)} Y_{1e}(r) + \\ + \Sigma_{(2 \rightarrow 4)} Y_{3e}(r) + \Sigma_{(3 \rightarrow 4)} Y_{5e}(r) = 0 \quad 3.3.51$$

Os sistemas podem ser escritos na forma matricial, da seguinte maneira:

$$\underline{D} \nabla^2 \underline{\phi} - \underline{\Sigma} \underline{\phi} + \underline{Q} = \underline{0} \quad 3.3.52$$

onde:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix}; \quad \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{R1} & 0 & 0 & 0 \\ -\Sigma_{(1 \rightarrow 2)} & \Sigma_{R2} & 0 & 0 \\ -\Sigma_{(1 \rightarrow 3)} & -\Sigma_{(2 \rightarrow 3)} & \Sigma_{R3} & 0 \\ -\Sigma_{(1 \rightarrow 4)} & -\Sigma_{(2 \rightarrow 4)} & -\Sigma_{(3 \rightarrow 4)} & \Sigma_a^M \end{bmatrix};$$

$$\underline{\phi}(r) = \begin{bmatrix} Y_1(r) \\ Y_3(r) \\ Y_5(r) \\ Y_7(r) \end{bmatrix} ; \quad \underline{J}(r) = \begin{bmatrix} Y_2(r) \\ Y_4(r) \\ Y_6(r) \\ Y_7(r) \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{Q}_c = \begin{bmatrix} v \sigma_f \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_R^F \end{bmatrix}, \text{ para a região central (cerne);}$$

$$\underline{Q}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ para a região externa (refletor)}$$

As soluções são:

$$\underline{\phi}_c(r) = \sum_{i=1}^4 A_i \frac{\sinh(w_i r)}{r} \underline{G}(w_i) + \underline{\phi}_p \quad 3.3.53$$

$$\underline{\phi}_e(r) = \sum_{i=1}^4 C_i \frac{\sinh(w_i (R-r))}{r} \underline{G}(w_i) \quad 3.3.54$$

$$\underline{J}_c(r) = \sum_{i=1}^4 -D_i \left\{ A_i \left[ \frac{w_i \cosh(w_i r)}{r} - \frac{\sinh(w_i r)}{r} \right] \right\} \underline{G}(w_i) \quad 3.3.55$$

$$\underline{J}_e(r) = \sum_{i=1}^4 D_i \left\{ C_i \left[ \frac{w_i \cosh(w_i (R-r))}{r} + \frac{\sinh(w_i (R-r))}{r} \right] \right\} \underline{G}(w_i)$$

3.3.56

onde:

$$A_i = F_i W_i(r_1) \frac{r_1}{\sinh(w_i r_1)} \quad 3.3.57$$

$$C_i = -A_i \left[ \frac{r_1 w_i \cosh(w_i r_1) - \sinh(w_i r_1)}{r_1 w_i \cosh(w_i (R-r_1)) + \sinh(w_i (R-r_1))} \right] \quad 3.3.58$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

onde  $r_1$  é a interface, a ser determinada.

Os autovalores são determinados pela equação:

$$\det \left[ w_i^2 \quad \underline{D} \quad \underline{\Sigma} \right] = 0$$

$$w_i^2 = \frac{\Sigma(i,i)}{D(i,i)} \quad 3.3.59$$

A solução particular é determinada pela equação:

$$-\underline{\Sigma} \phi_p + Q = 0$$

$$\phi_p = \begin{bmatrix} \frac{v \sigma_f}{\epsilon R_1} \\ 0 \\ 0 \\ v \sigma_f - \sigma_e \\ \frac{M}{\epsilon a} \end{bmatrix} \quad 3.3.60$$

Os vetores de acoplamento são determinados pela equação:

$$\left[ \begin{matrix} \underline{2} \\ \underline{w}_i \underline{D} - \underline{\Sigma} \end{matrix} \right] \underline{G}(w_i) = \underline{0}$$

$$\underline{G}(w_i) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(w_i) \\ \varepsilon_2(w_i) \\ \varepsilon_3(w_i) \\ \varepsilon_4(w_i) \end{bmatrix}$$

3.3.61

$E, F_i$  são tais que:

$$F_1 = \phi_{p1}$$

$$F_2 = -\varepsilon_2(w_1)F_1 + \phi_{p2}$$

$$F_3 = -\varepsilon_3(w_1)F_1 - \varepsilon_3(w_2)F_2 + \phi_{p3}$$

$$F_4 = -\varepsilon_4(w_1)F_1 - \varepsilon_4(w_2)F_2 - \varepsilon_4(w_3)F_3 + \phi_{p4}$$

e a quantidade:

$$w_i(r_1) = \frac{r_1 w_i \cosh(w_i(R-r_1)) + \sinh(w_i(R-r_1))}{w_i \sinh(w_i R)} \cdot \frac{\sinh(w_i r_1)}{r_1}$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

3.3.62

As condições de contorno são:

$$Y_{1e}(R) = Y_{3e}(R) = Y_{5e}(R) = Y_{7e}(R) = 0$$

$$Y_{2c}(0) = Y_{4c}(0) = Y_{6c}(0) = Y_{8c}(0) = 0$$

Os fluxos e as correntes devem ser contínuos na interface  $r_1$ , que separa as duas regiões, isto é:

$$Y_{ic}(r_1) = Y_{ie}(r_1) \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

A interface,  $r_1$ , é determinada pela condição de criticalidade, que será mostrada no item (3.3.1) e também pela continuidade da Hamiltoniana na interface.

### 3.3.1- Condição de Criticalidade e Continuidade da Hamiltoniana

A equação da criticalidade é:

$$N_c(r_1) = \frac{q_{\max}}{\epsilon \sigma_f Y_7(r_1)} = N_0 \quad 3.3.1.1$$

Em particular na interface,  $r = r_1$ , a distribuição de combustível tem um valor,  $N_0$ , onde  $N_0$  é menor do que o valor da concentração de combustível máxima permissível.

Na normalização tem-se:

$$N_c(r_1) \cdot Y_7(r_1) = 1$$

$$N_o \cdot Y_7(r_1) = 1$$

3.3.1.2

$$Y_7(r_1) = \frac{1}{N_o}$$

que pode ser escrito como:

$$M(Y_7) = Y_7(r_1) - \frac{1}{N_o} = 0$$

3.3.1.3

A Hamiltoniana e as equações adjuntas podem ser descontínuas no ponto  $r = r_1$ , interface, de acordo com as relações:

$$H_j(r_1 - \Delta) = H_j(r_1 + \Delta) - \pi \left. \frac{\partial M}{\partial r} \right|_{r=r_1} \quad 3.3.1.4$$

$$\lambda_j(r_1 - \Delta) = \lambda_j(r_1 + \Delta) + \pi \left. \frac{\partial M}{\partial Y_j} \right|_{r=r_1} \quad 3.3.1.5$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

onde  $\Delta$  tende a zero, e  $\Pi$  é um valor escalar a ser determinado. Desde que a quantidade  $M(Y_7)$  não depende explicitamente da variável independente,  $r$ , segue-se da equação (3.3.1.4), que a Hamiltoniana é contínua na interface,  $r = r_1$ . Devido ao fato de  $M(Y_7)$  depender explicitamente do fluxo térmico, ou seja de  $Y_7(r)$ , então pela equação (3.3.1.5), somente o multiplicador de Lagrange,  $\lambda_7(r)$ , é descontínuo na interface, ou seja:

$$\lambda_7(r_1 - \Delta) = \lambda_7(r_1 + \Delta) + \Pi \quad 3.3.1.6$$

e todos os outros são contínuos:

$$\lambda_i(r_1 - \Delta) = \lambda_i(r_1 + \Delta) \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$$

3.3.1.7

A magnitude da descontinuidade,  $\Pi$ , nesse multiplicador é facilmente determinada através do sistema adjunto.

Na equação da criticalidade, (3.3.1.2), substituindo-se a expressão do fluxo térmico dada pela equação (3.3.53), aplicada no ponto  $r = r_1$ , ou seja:

$$\phi_{4c}(r_1) = \sum_{i=1}^4 A_i \frac{\sinh(w_i r_1)}{r_1} \cdot G(w_i) + \phi_{p4} \quad 3.3.1.8$$

e substituindo-se  $A_i$ , equação (3.3.57), a equação da criticalidade pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{F_i}{\phi_{p4}} \right) \epsilon_4(\hat{w}_i) W_i(r_1) = 1 - \frac{1}{N_0 \cdot \phi_{p4}} \quad 3.3.1.9$$

### 3.3.2- Normalização

A distribuição de combustível, na região central do reator (cerne), é descrita pela equação (3.3.25), ou seja:

$$N_c(r) = \frac{q_{max}}{\epsilon \sigma_f \phi_{4c}(r)}$$

Então, nas equações de difusão pode-se normalizar o fluxo térmico fazendo-se  $N_c(r) \phi_{4c}(r) = 1$ . Nesse caso, a normalização é possível, pois:

- 1- as equações de difusão são homogêneas;
- 2- em princípio, a criticalidade de um reator não depende de qual densidade de potência é utilizada nos cálculos. O que limita a densidade de potência são razões tecnológicas, e essa limi-

tação, no caso, é imposta pelo vínculo dado (equação 3.3.18).

Assim, as equações de difusão para a primeira região do reator tomam a seguinte forma:

$$D_1 \nabla^2 \phi_{1c}(r) - \Sigma_{R1} \phi_{1c}(r) + v \sigma_f = 0 \quad 3.3.2.1$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_{2c}(r) - \Sigma_{R2} \phi_{2c}(r) + \Sigma_{(1 \rightarrow 2)} \phi_{1c}(r) = 0 \quad 3.3.2.2$$

$$D_3 \nabla^2 \phi_{3c}(r) - \Sigma_{R3} \phi_{3c}(r) + \Sigma_{(1 \rightarrow 3)} \phi_{1c}(r) + \Sigma_{(2 \rightarrow 3)} \phi_{2c}(r) = 0 \quad 3.3.2.3$$

$$D_4 \nabla^2 \phi_{4c}(r) - \Sigma_a^M \phi_{4c}(r) + \Sigma_{(1 \rightarrow 4)} \phi_{1c}(r) + \Sigma_{(2 \rightarrow 4)} \phi_{2c}(r) + \Sigma_{(3 \rightarrow 4)} \phi_{3c}(r) - \sigma_a^F = 0 \quad 3.3.2.4$$

Indicando por  $\underline{n}$  o índice de normalização e  $\underline{T}$  o índice para o fluxo térmico, a densidade de potência normalização é dada por.

$$q^n = \epsilon \sigma_f,$$

$$\text{onde, } N(r) \phi_{\underline{T}}^n(r) = 1.$$

Se  $q = q_0$ , a densidade de potência dada, onde  $q_0 = \epsilon \sigma_f N \phi_T$ , o fluxo térmico,  $\phi_T$ , pode ser calculado pela relação.

$$\frac{q_0}{q^n} = \frac{\phi_T}{\phi_T^n} \quad 3.3.2.5$$

ou seja:

$$\phi_T(r) = \phi_T^n \frac{q_0}{\epsilon \sigma_f} \quad 3.3.2.6$$

#### 3.4- Sistema Adjunto

As equações adjuntas são dadas por:

$$\lambda_i = - \frac{\partial H}{\partial Y_i} \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

Para cada região do reator tem-se:

para  $0 \leq r \leq r_1$

$$\dot{\lambda}_{1c}(r) = \lambda_{2c}(r) - \Sigma_{(1+2)} \lambda_{4c}(r) - \Sigma_{(1+3)} \lambda_{6c}(r) - \Sigma_{(1+4)} \lambda_{8c}(r)$$

$$\dot{\lambda}_{2c}(r) = \frac{1}{D_1} \dot{\lambda}_{1c}(r) + \frac{2}{r} \lambda_{2c}(r) \quad 3.4.2$$

$$\dot{\lambda}_{3c}(r) = \Sigma_{R2} \lambda_{4c}(r) - \Sigma_{(2+3)} \lambda_{6c}(r) - \Sigma_{(2+4)} \lambda_{8c}(r) \quad 3.4.3$$

$$\dot{\lambda}_{4c}(r) = \frac{1}{D_2} \lambda_{3c}(r) + \frac{2}{r} \lambda_{4c}(r) \quad 3.4.4$$

$$\dot{\lambda}_{5c}(r) = \Sigma_{R3} \lambda_{6c}(r) - \Sigma_{(3+4)} \lambda_{8c}(r) \quad 3.4.5$$

$$\dot{\lambda}_{6c}(r) = \frac{1}{D_3} \lambda_{5c}(r) + \frac{2}{r} \lambda_{6c}(r) \quad 3.4.6$$

$$\dot{\lambda}_{7c}(r) = \Sigma_a^M \lambda_{8c}(r) \quad 3.4.7$$

$$\dot{\lambda}_{8c}(r) = \frac{1}{D_4} \lambda_{7c}(r) + \frac{2}{r} \lambda_{8c}(r) \quad 3.4.8$$

Para  $r_1 \leq r \leq R$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{1e}(r) = \Sigma_{R1} \lambda_{2e}(r) - \Sigma_{(1+2)} \lambda_{4e}(r) - \Sigma_{(1+3)} \lambda_{6e}(r) - \\ - \Sigma_{(1+4)} \lambda_{8e}(r) \end{aligned} \quad 3.4.9$$

$$\dot{\lambda}_{2e}(r) = \frac{1}{D_1} \lambda_{1e}(r) + \frac{2}{r} \lambda_{2e}(r) \quad 3.4.10$$

$$\dot{\lambda}_{3e}(r) = \Sigma_{R2} \lambda_{4e}(r) - \Sigma_{(2+3)} \lambda_{6e}(r) - \Sigma_{(2+4)} \lambda_{8e}(r) \quad 3.4.11$$

$$\dot{\lambda}_{4e}(r) = \frac{1}{D_2} \lambda_{3e}(r) + \frac{2}{r} \lambda_{4e}(r) \quad 3.4.12$$

$$\dot{\lambda}_{5e}(r) = \Sigma_{R3} \lambda_{6e}(r) - \Sigma_{(3+4)} \lambda_{8e}(r) \quad 3.4.13$$

$$\dot{\lambda}_{6e}(r) = \frac{1}{D_3} \lambda_{5e}(r) + \frac{2}{r} \lambda_{6e}(r) \quad 3.4.14$$

$$\dot{\lambda}_{7e}(r) = \Sigma_a^M \lambda_{8e}(r) \quad 3.4.15$$

$$\dot{\lambda}_{8c}(r) = \frac{1}{D_4} \lambda_{7e}(r) + \frac{2}{r} \lambda_{8e}(r) \quad 3.4.16$$

A condição de transversalidade, dada pelas equações (2.2.12b) e (2.2.12d) fornecem as condições de contorno para o sistema adjunto:

$$\left[ \lambda_j(0) - \frac{\partial G}{\partial Y_j(0)} \right] dY_j(0) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad 3.4.17$$

$$\left[ \lambda_j(R) - \frac{\partial G}{\partial Y_j(0)} \right] dY_j(R) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad 3.4.18$$

A partir da equação (2.2.11), pode-se escrever G da seguinte forma.

$$G = v_1 Y_1(R) + v_2 Y_2(0) + v_3 Y_3(R) + v_4 Y_4(0) + \\ v_5 Y_5(R) + v_6 Y_6(0) + v_7 Y_7(R) + v_8 Y_8(0)$$

Aplicando a equação (3.4.17), tem-se:

- Para  $j = 1, 3, 5, 7$

$$[\lambda_j(0) - 0] dY_j(0) = 0$$

Como os fluxos em  $r = 0$  não tem valores especificados, então  $dY_j(0) \neq 0$ ; conclui-se que:

$$\lambda_j(0) = 0 \quad j = 1, 3, 5, 7$$

- Para  $j = 2, 4, 6, 8$

$$[\lambda_j(0) - v_j] dY_j(0) = 0$$

Como as correntes em  $r = 0$  tem valores especificados, então,  $dY_j(0) = 0$ ; portanto, nada se conclui a respeito de  $\lambda_j(0)$ .

Aplicando a equação (3.4.18), tem-se:

- Para  $j = 1, 3, 5, 7$ :

$$[\lambda_j(R) - v_j] dY_j(R) = 0$$

Como os fluxos em  $r = R$  tem valores especificados, então,  $dY_j(R) = 0$  e portanto nada se conclui a respeito de  $\lambda_j(R)$ ;

- para  $j = 2, 4, 6, 8$

$$[\lambda_j(R) + 0] dY_j(R) = 0$$

Como as correntes em  $r = R$  não tem valores especificados,  $dY_j(R) \neq 0$ , concluindo-se que as equações acima são satisfeitas, somente se:

$$\lambda_j(R) = 0$$

Tem-se, então para as equações adjuntas as seguintes condições de contorno:

$$\lambda_{cj}(0) = 0 \quad j = 1, 3, 5, 7$$

$$\lambda_{ej}(R) = 0 \quad j = 2, 4, 6, 8$$

e mais as equações (3.3.1.4), com o valor de  $\Pi$  determinado.

Com o que foi mostrado acima, a solução do sistema adjunto pode ser obtida.

Nesse caso particular, tem-se dezesseis equações

diferenciais, oito para cada região, e 16 condições de contorno.

No presente trabalho a solução dos sistemas adjuntos, em cada zona, não foi obtida, pois o controle ótimo foi completamente determinado somente através dos sistemas dinâmicos. Ficaria, apenas, a dúvida da continuidade das soluções adjuntas na interface. Entretanto, essa dúvida é desfeita pela condição física de criticalidade do reator.

### 3.5 - Cálculo da Potência

A potência total de um reator esférico de raio  $R$  é dado por:

$$POT = \int_0^R 4\pi \epsilon \sigma_f r^2 N(r) Y_7(r) dr \quad 3.5.1$$

Como se tem duas zonas distintas, sendo que na região externa (refletor) a distribuição de combustível é nula, a integral acima se reduz à :

$$POT = \int_0^{R_1} 4\pi \epsilon \sigma_f r^2 N(r) Y_7(r) dr \quad 3.5.2$$

Utilizando a normalização feita na região central,  $N_c(r) Y_7(r) = 1$ , tem-se:

$$POT^n = \int_0^{r_1} 4\pi \epsilon \sigma_f r^2 dr \quad 3.5.3$$

$$POT^n = \frac{4}{3} \pi \epsilon \sigma_f (r_1)^3 \quad \text{watts} \quad 3.5.4$$

### 3.6- Cálculo da Massa Crítica

A massa crítica total de um reator é dada pela integral, no volume, da distribuição de combustível, ou seja:

$$M = \int_V N(r) dV \quad 3.6.1$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$M = \int_0^R 4\pi N(r) r^2 dr \quad 3.6.2$$

Sendo nula a distribuição de combustível na região externa,  $r_1 \leq r \leq R$ , tem-se:

$$M = 4\pi \int_0^{r_1} N(r) r^2 dr \quad 3.6.3$$

Introduzindo a equação (3.3.1.2) na equação acima, tem-se:

$$M = 4\pi \int_0^{r_1} \frac{1}{Y_7(r)} r^2 dr \quad \begin{array}{l} \text{átomos} \\ \text{de U-235} \end{array} \quad 3.6.4$$

A massa crítica, em gramas, é dada por:

$$M_C = \frac{M \times M(\text{U-235})}{N_A}$$

$M(\text{U-235})$  é a massa atômica do U-235 e  $N_A$  é o número de Avogadro.

#### 4. RESULTADOS

Neste trabalho, foi considerado um reator esférico de raio conhecido. A espessura do refletor foi encontrada pela determinação da posição da interface, ou seja de  $r = r_1$ .

Para a obtenção dos resultados numéricos foram utilizadas as respostas normalizadas, o raio do reator e a concentração de combustível na interface,  $N_0$ .

A fim de se fazer um estudo mais profundo, foram usados como dados de entrada várias combinações diferentes de raios e concentrações de combustível, sendo que para cada uma dessas combinações obtém-se uma solução adequada.

Para a determinação da posição da interface, usou-se a condição de criticalidade do reator. Neste trabalho foram obtidas duas respostas como solução do problema de interface.

A interface encontrada mais perto do centro do reator,  $r_2$ , é também uma resposta válida, pois torna o reator crítico; porém, não corresponde à solução do problema de controle ótimo proposto, uma vez que não maximiza a potência. Já a interface mais próxima da fronteira externa do reator,  $r_1$ , corresponde à solução do problema proposto, resultando na distribuição ótima de combustí-

vel que maximiza a potência do reator.

As secções de choque e constantes de grupo, para quatro grupos de energia, foram geradas pelo código de computação XSDRN /13/, considerando-se apenas uma concentração de combustível,  $N_0 = 0,66728 \times 10^{20}$  átomos/cm<sup>3</sup>, dentre os vários valores usados no estudo, para  $N_0$ .

O motivo de se usar as mesmas constantes, para todos os outros valores considerados para  $N_0$ , obtidas para  $N_0 = 0,66728 \times 10^{20}$  átomos/cm<sup>3</sup>, é que elas não variam significativamente e o cálculo das constantes para cada um dos valores de  $N_0$  usados, apenas tornaria o trabalho mais extenso e dispendioso, sem obtenção de resultados mais realísticos.

Como o código XSDRN não gera os coeficientes de difusão estes foram calculados através da expressão que leva em conta o espalhamento anisotrópico:

$$D = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}}$$

Os intervalos de energia para cada grupo são apresentados na Tabela 4.1.

TABELA 4.1- Intervalos de Energia para cada Grupo

Grupo	1	2	3	4
Intervalo	15MeV-87KeV	87KeV-7KeV	7KeV-1eV	1eV-0eV

A Tabela 4.2 apresenta as secções de choque e constantes de grupo, e a Tabela 4.3 apresenta as secções de choque de transferência.

TABELA 4.2- Secções de Choque e Constantes de Grupo

Grupo	1	2	3	4
$\Sigma_R$ (cm <sup>-1</sup> )	0,08626	0,41708	0,15101	0
$\Sigma_a^M$ (cm <sup>2</sup> )	0	0	0	0,01728
$\sigma_f$ (cm <sup>2</sup> )	0	0	0	0,043476x10 <sup>-20</sup>
$\sigma_a^F$ (cm <sup>2</sup> )	0	0	0	0,051115x10 <sup>-20</sup>
$\nu$ ( <u>nêutrons</u> fissão)	-	-	-	2,442
D (cm)	1,467	0,686	0,557	0,115

TABELA 4.3- Secções de Choque de Transferência

Grupo g	$\Sigma_{(g+1)} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{(g+2)} (\text{cm}^{-1})$	$\tilde{\Sigma}_{(g+3)} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{(g+4)} (\text{cm}^{-1})$
1	-	0,07929	0,00697	0
2	0	-	0,41702	0,00006
3	0	0	-	0,15101
4	0	0	0	-

A posição da interface,  $r_1(r_2)$ , com precisão na sétima casa decimal, foi localizada através da equação de criticalidade, equação (3.3.1.9), ou seja:

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{F_i}{\phi_{p4}} \right) g_4(w_i) W_i(r_1) = 1 - \frac{1}{N_0 \phi_{p4}}$$

Para cada interface,  $r_1$  e  $r_2$ , as soluções numéricas das variáveis de estado foram obtidas do computador em intervalos de 0,5cm.

Os cálculos foram feitos em dupla precisão no computador IBM/370 Modelo 155, do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, sendo o programa escrito em Linguagem FORTRAN IV-G.

Para efeito de cálculo, a densidade de potência máxima,  $q_{max}$ , foi considerada ser 60 watts/cm<sup>3</sup>.

Os fluxos, as correntes e a distribuição ótima de combustível estão apresentadas, respectivamente, nas tabelas 4.4, 4.5, e 4.6, para uma concentração de combustível,  $N_0 = 0,8 \times 10^{20}$  átomos/cm<sup>3</sup> e um raio,  $R = 60$  cm.

A Figura 4.1 apresenta os gráficos dos fluxos e da concentração de combustível, obtidos segundo as respostas normalizadas. Para obter o valor real basta multiplicar o valor de tabela por  $q_{max}/\sigma_f \epsilon$ , para os fluxos e correntes. O comportamento da curva, é sempre o mesmo para todos os outros casos, isto é, para qualquer outra combinação da distribuição de combustível e raio, mudando somente os valores iniciais e a interface.

A Tabela 4.7, apresenta a lista de todas as combinações de concentrações de combustível e raios que foram usadas, e que chegaram a convergir, com os respectivos valores de interfaces obtidos, em cm. Apresenta, também, os respectivos valores de potência em watts e a massa em gramas.

Convém notar que somente é válida, como solução do problema de controle ótimo, a segunda resposta, interface  $r_1$ . Isto significa que o reator com zona interna com interface  $r_1$  é um reator otimizado.

A Tabela 4.8 apresenta a relação potência sobre massa para todas as combinações de concentrações de combustível e raios apresentados na Tabela 4.7.

TABELA 4.4- Fluxos Normalizados

r (cm)	$\phi_1$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$\phi_2$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$\phi_3$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$\phi_4$ (n/cm <sup>2</sup> seg)
0,0	1,231	0,2341	0,7033	3,189
10,0	1,231	0,2341	0,7032	3,188
20,0	1,230	0,2339	0,7026	3,179
22,0	1,230	0,2338	0,7022	3,174
24,0	1,229	0,2336	0,7016	3,166
26,0	1,228	0,2334	0,7008	3,154
28,0	1,227	0,2331	0,6995	3,137
30,0	1,224	0,2326	0,6975	3,110
32,0	1,220	0,2318	0,6945	3,071
34,0	1,214	0,2305	0,6898	3,011
36,0	1,205	0,2286	0,6828	2,924
38,0	1,191	0,2257	0,6716	2,797
40,0	1,170	0,2211	0,6547	2,617
42,0	1,136	0,2140	0,6289	2,369
44,0	1,083	0,2030	0,5903	2,047
46,0	1,001	0,1860	0,5340	1,668
48,0	0,8733	0,1602	0,4557	1,308
50,0	0,6731	0,1234	0,3567	1,161
50,8 <sup>34</sup>	0,5591	0,1055	0,3121	1,250
52,0	0,4083	0,0811	0,2509	1,337
54,0	0,2337	0,0482	0,1599	1,122
56,0	0,1256	0,0262	0,0912	0,7464
58,0	0,0542	0,0114	0,0405	0,360
60,0	0,0	0,0	0,0	0,0

TABELA 4.5- Correntes Normalizadas

r (cm)	$J_1$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$J_2$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$J_3$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$J_4$ (n/cm <sup>2</sup> seg)
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4,0	$0,9 \times 10^{-5}$	$0,1 \times 10^{-5}$	$0,3 \times 10^{-5}$	$0,8 \times 10^{-5}$
8,0	$0,24 \times 10^{-4}$	$0,2 \times 10^{-5}$	$0,7 \times 10^{-5}$	$0,22 \times 10^{-4}$
12,0	$0,54 \times 10^{-4}$	$0,5 \times 10^{-5}$	$0,17 \times 10^{-5}$	$0,49 \times 10^{-4}$
16,0	$0,121 \times 10^{-3}$	$0,12 \times 10^{-4}$	$0,37 \times 10^{-4}$	$0,108 \times 10^{-3}$
20,0	$0,273 \times 10^{-3}$	$0,27 \times 10^{-4}$	$0,83 \times 10^{-4}$	$0,242 \times 10^{-3}$
24,0	$0,626 \times 10^{-3}$	$0,62 \times 10^{-4}$	$0,19 \times 10^{-3}$	$0,546 \times 10^{-3}$
28,0	$0,1456 \times 10^{-2}$	$0,144 \times 10^{-3}$	$0,443 \times 10^{-3}$	$0,1236 \times 10^{-2}$
30,0	$0,2236 \times 10^{-2}$	$0,220 \times 10^{-3}$	$0,679 \times 10^{-3}$	$0,1856 \times 10^{-2}$
32,0	$0,3439 \times 10^{-2}$	$0,338 \times 10^{-3}$	$0,1042 \times 10^{-2}$	$0,2775 \times 10^{-2}$
34,0	$0,5302 \times 10^{-2}$	$0,522 \times 10^{-3}$	$0,1601 \times 10^{-2}$	$0,4118 \times 10^{-2}$
36,0	$0,8195 \times 10^{-2}$	$0,802 \times 10^{-3}$	$0,2463 \times 10^{-2}$	$0,6040 \times 10^{-2}$
38,0	$0,1270 \times 10^{-1}$	$0,1249 \times 10^{-2}$	$0,3781 \times 10^{-2}$	$0,8701 \times 10^{-2}$
40,0	$0,1971 \times 10^{-1}$	$0,1938 \times 10^{-2}$	$0,5778 \times 10^{-2}$	$0,1220 \times 10^{-1}$
42,0	$0,3065 \times 10^{-1}$	$0,3008 \times 10^{-2}$	$0,8745 \times 10^{-2}$	$0,1638 \times 10^{-1}$
44,0	$0,4775 \times 10^{-1}$	$0,4662 \times 10^{-2}$	$0,1299 \times 10^{-1}$	$0,2049 \times 10^{-1}$
46,0	$0,7452 \times 10^{-1}$	$0,7163 \times 10^{-2}$	$0,1861 \times 10^{-1}$	$0,2237 \times 10^{-1}$
48,0	0,1165	$0,1068 \times 10^{-1}$	$0,2497 \times 10^{-1}$	$0,1726 \times 10^{-1}$
50,0	0,1823	$0,1438 \times 10^{-1}$	$0,2955 \times 10^{-1}$	$-0,413 \times 10^{-2}$
50,834	0,2198	$0,1493 \times 10^{-1}$	$0,2986 \times 10^{-1}$	$-0,214 \times 10^{-2}$
52,0	0,1629	$0,1339 \times 10^{-1}$	$0,2817 \times 10^{-1}$	$0,2006 \times 10^{-2}$
54,0	$0,9906 \times 10^{-1}$	$0,9216 \times 10^{-2}$	$0,2221 \times 10^{-1}$	$0,1924 \times 10^{-1}$
56,0	$0,6299 \times 10^{-1}$	$0,6092 \times 10^{-2}$	$0,1630 \times 10^{-1}$	$0,2262 \times 10^{-1}$
58,0	$0,4417 \times 10^{-1}$	$0,4324 \times 10^{-2}$	$0,1233 \times 10^{-1}$	$0,2153 \times 10^{-1}$
60,0	$0,3694 \times 10^{-1}$	$0,3627 \times 10^{-2}$	$0,1057 \times 10^{-1}$	$0,1994 \times 10^{-1}$

TABELA 4.6- Distribuição Ótima de Combustível

r (cm )	N(r) (at/cm <sup>3</sup> x 10 <sup>20</sup> )
0,0	0,3135
10,0	0,3137
20,0	0,3145
22,0	0,3151
24,0	0,3158
26,0	0,3170
28,0	0,3188
30,0	0,3215
32,0	0,3257
34,0	0,3321
36,0	0,3420
38,0	0,3575
40,0	0,3822
42,0	0,4222
44,0	0,4886
46,0	0,5994
48,0	0,7643
50,0	0,8613
50,834	0,8

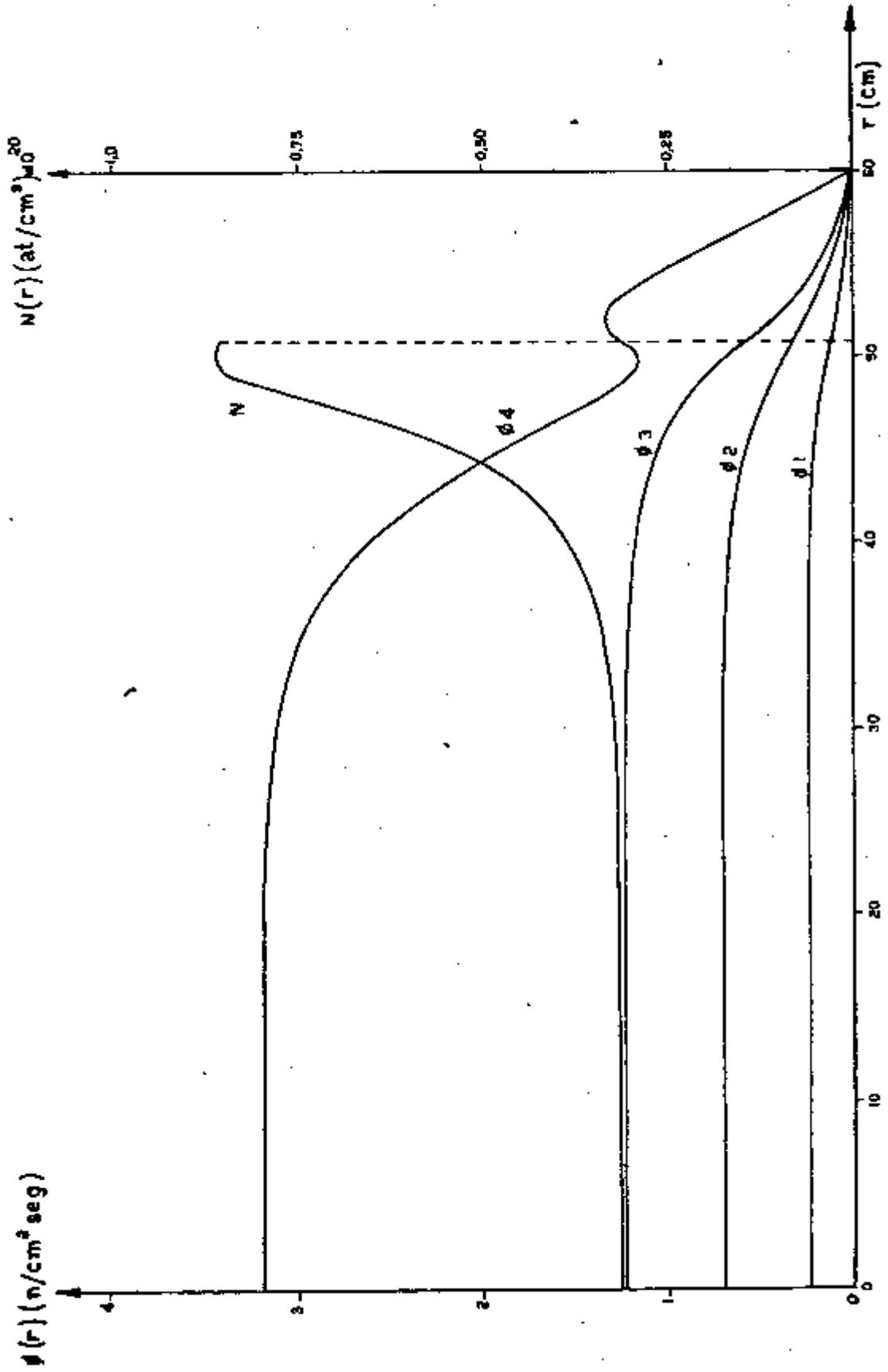


FIG. 4.1 - FLUXOS E DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTÍVEL

TABELA 4.7- Interface, Potência e Massa para as Duas Respostas

R (cm)	$N_0$ (at/cm <sup>2</sup> x 10 <sup>20</sup> )	Interface r <sub>2</sub> (cm)	Potência (watts)	Massa (gramas)	Interface r <sub>1</sub> (cm)	Potência (watts)	Massa (gramas)
30	1,2	18,874	1,312x10 <sup>6</sup>	1,129x10 <sup>3</sup>	22,729	2,951x10 <sup>6</sup>	1,690x10 <sup>3</sup>
40	0,95	26,017	4,426x10 <sup>6</sup>	2,038x10 <sup>3</sup>	31,792	8,076x10 <sup>6</sup>	3,314x10 <sup>3</sup>
40	1,0	23,500	3,262x10 <sup>6</sup>	1,648x10 <sup>3</sup>	32,892	8,943x10 <sup>6</sup>	3,686x10 <sup>3</sup>
40	1,05	21,711	2,572x10 <sup>6</sup>	1,413x10 <sup>3</sup>	33,528	9,472x10 <sup>6</sup>	3,948x10 <sup>3</sup>
40	1,1	20,322	2,109x10 <sup>6</sup>	1,254x10 <sup>3</sup>	33,976	9,858x10 <sup>6</sup>	4,164x10 <sup>3</sup>
40	1,15	19,201	1,779x10 <sup>6</sup>	1,141x10 <sup>3</sup>	34,321	1,016x10 <sup>7</sup>	4,353x10 <sup>3</sup>
40	1,2	18,276	1,534x10 <sup>6</sup>	1,057x10 <sup>3</sup>	34,599	1,041x10 <sup>7</sup>	4,524x10 <sup>3</sup>
60	0,8	40,455	1,641x10 <sup>7</sup>	5,685x10 <sup>3</sup>	50,834	3,301x10 <sup>7</sup>	1,033x10 <sup>4</sup>
60	0,85	33,304	9,284x10 <sup>6</sup>	3,546x10 <sup>3</sup>	52,518	3,640x10 <sup>7</sup>	1,148x10 <sup>4</sup>
60	0,9	28,805	6,007x10 <sup>6</sup>	2,539x10 <sup>3</sup>	53,360	3,818x10 <sup>7</sup>	1,219x10 <sup>4</sup>
60	0,95	25,699	4,266x10 <sup>6</sup>	1,980x10 <sup>3</sup>	53,919	3,940x10 <sup>7</sup>	1,274x10 <sup>4</sup>
60	1,0	23,424	3,230x10 <sup>6</sup>	1,636x10 <sup>3</sup>	54,332	4,031x10 <sup>7</sup>	1,322x10 <sup>4</sup>
60	1,05	21,684	2,563x10 <sup>6</sup>	1,409x10 <sup>3</sup>	54,657	4,104x10 <sup>7</sup>	1,364x10 <sup>4</sup>
60	1,1	20,310	2,105x10 <sup>6</sup>	1,253x10 <sup>3</sup>	54,921	4,163x10 <sup>7</sup>	1,402x10 <sup>4</sup>
60	1,15	19,195	1,778x10 <sup>6</sup>	1,140x10 <sup>3</sup>	55,143	4,214x10 <sup>7</sup>	1,437x10 <sup>4</sup>
60	1,2	18,273	1,533x10 <sup>6</sup>	1,057x10 <sup>3</sup>	55,321	4,258x10 <sup>7</sup>	1,471x10 <sup>4</sup>
99	0,75	53,259	3,797x10 <sup>7</sup>	1,147x10 <sup>4</sup>	90,665	1,873x10 <sup>8</sup>	4,895x10 <sup>4</sup>

continua . . .

TABELA 4.7 - Interface, Potência e Massa para as Duas Respostas (continuação ....)

R (cm)	$N_0$ (at/cm <sup>3</sup> x 10 <sup>20</sup> )	Interface r <sub>2</sub> ( cm )	Potência (watts)	Massa (gramas)	Interface r <sub>1</sub> (watts )	Potência (watts )	Massa (gramas)
99	0,8	40,399	1,657x10 <sup>7</sup>	5,665x10 <sup>3</sup>	91,957	1,954x10 <sup>8</sup>	5,158x10 <sup>4</sup>
99	0,85	33,303	9,250x10 <sup>6</sup>	3,546x10 <sup>3</sup>	92,702	2,002x10 <sup>8</sup>	5,341x10 <sup>4</sup>
99	0,9	28,805	6,007x10 <sup>6</sup>	2,539x10 <sup>3</sup>	93,216	2,036x10 <sup>8</sup>	5,488x10 <sup>4</sup>
99	0,95	25,699	4,266x10 <sup>6</sup>	1,980x10 <sup>3</sup>	93,604	2,061x10 <sup>8</sup>	5,615x10 <sup>4</sup>
99	1,0	25,424	3,230x10 <sup>6</sup>	1,636x10 <sup>3</sup>	93,912	2,082x10 <sup>8</sup>	5,729x10 <sup>4</sup>
99	1,05	21,684	2,563x10 <sup>6</sup>	1,409x10 <sup>3</sup>	94,164	2,098x10 <sup>8</sup>	5,833x10 <sup>4</sup>
99	1,1	20,310	2,105x10 <sup>6</sup>	1,2525x10 <sup>3</sup>	94,376	2,127x10 <sup>8</sup>	5,929x10 <sup>4</sup>
99	1,15	19,195	1,778x10 <sup>6</sup>	1,140x10 <sup>3</sup>	94,558	2,125x10 <sup>8</sup>	6,020x10 <sup>4</sup>
99	1,2	18,273	1,533x10 <sup>6</sup>	1,057x10 <sup>3</sup>	94,717	2,136x10 <sup>8</sup>	6,107x10 <sup>4</sup>

TABELA 4.8- Relação P/M para cada Interface

R (cm)	N <sub>o</sub> (at/cm <sup>3</sup> x 10 <sup>20</sup> )	Interface I <sub>2</sub> (cm)	potência Massa (watts/g)	Interface I <sub>1</sub> (cm)	Potência Massa (watts/g)
30	1,2	18,874	1161,10	22,729	1746,71
40	0,95	26,017	2171,50	31,792	2436,99
40	1,0	23,500	1978,87	32,892	2426,08
40	1,05	21,711	1819,79	33,528	2399,02
40	1,1	20,322	1681,82	33,976	2367,39
40	1,15	19,201	1560,05	34,321	2334,20
40	1,2	18,276	1451,43	34,599	2300,79
60	0,8	40,455	2926,96	50,834	3195,06
60	0,85	33,304	2618,10	52,518	3171,47
60	0,9	28,805	2365,98	53,360	3132,98
60	0,95	25,699	2154,82	53,919	3091,69
60	1,0	23,424	1974,40	54,332	3050,21
60	1,05	21,684	1818,06	54,657	3009,50
60	1,1	20,310	1681,00	54,921	2969,96
60	1,15	19,195	1559,60	55,143	2931,68
60	1,2	18,273	1451,16	55,321	2894,67
99	0,75	53,259	3310,66	90,665	3826,23
99	0,8	40,399	2925,26	91,957	3788,70
99	0,85	33,303	2608,68	92,702	3748,85
99	0,9	28,805	2366,12	93,216	3709,77
99	0,95	25,699	2154,82	93,604	3673,68
99	1,0	23,424	1974,40	93,912	3633,67
99	1,05	21,684	1818,06	94,164	3597,72
99	1,1	20,310	1681,00	94,376	3563,01
99	1,15	19,195	1559,60	94,558	3529,52
99	1,2	18,273	1451,16	94,717	3497,20

A Tabela 4.9 apresenta , para o raio  $R = 60$  cm, as duas possíveis respostas de interface, para cada concentração de combustível. O comportamento da curva, mostrado na Figura 4.2 é sempre o mesmo, qualquer que seja o raio escolhido. Nota-se pela Figura, que só há resposta para o problema de interface, a partir de um certo valor de  $N_0$  mínimo.

Para o cálculo da integral envolvida na equação da massa crítica, equação (3.6.3), foi utilizada, em dupla precisão, a subrotina DQHFG da "Scientific Subroutine Package" /15/. Esta subrotina executa a integração de uma função tabelada monotonicamente, com a primeira derivada, pela fórmula Hermite de primeira ordem /14/. É considerado que a função a ser integrada é contínua e pode ser diferenciada pelo menos quatro vezes.

TABELA 4.9 - Respostas para o Problema de Interface  
para  $R = 60$  cm

$N_0$ (at/cm <sup>3</sup> x 10 <sup>20</sup> )	Interface $r_2$ (cm)	Interface $r_1$ (cm)
0,8	40,455	50,834
0,85	33,304	52,518
0,9	28,805	53,360
0,95	25,699	53,919
1,0	23,424	54,332
1,05	21,684	54,657
1,1	20,310	54,921
1,15	19,195	55,143
1,2	18,272	55,321

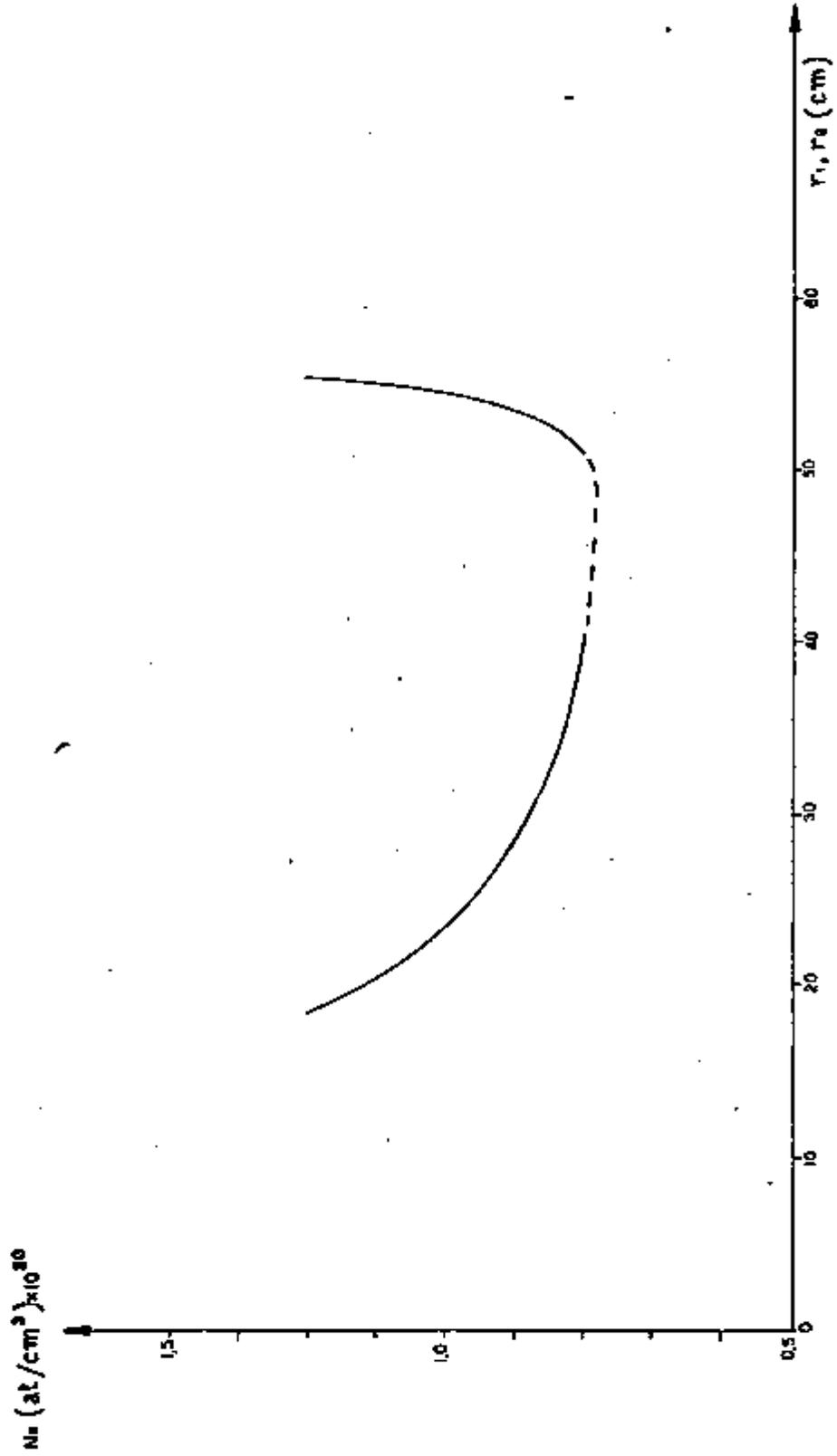


FIG. 4.2 - RESPONDAS DE INTERFACE

## 5. COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Algumas simplificações de caráter físico foram feitas na formulação do problema matemático. Essas hipóteses podem ser justificadas analisando-se os dados fornecidos pelo Código de Computação XSDRN /13/. O objetivo da discussão abaixo é o de analisar as considerações e aproximações feitas, e desse modo mostrar que não invalidam a solução do problema proposto.

Na primeira simplificação foi considerado que todos os nêutrons de fissão nascem dentro do grupo de energia mais alta, ou seja,  $\chi_1 = 1$  e  $\chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0$ . A Tabela 5.1 apresenta os valores de  $\chi$  obtidos, podendo-se desprezar os dois grupos de energia que não o rápido.

TABELA 5.1 - Valores para  $\chi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

Grupo	1	2	3	4
$\chi$	0,9896	0,010406	0,0	0,0

Na segunda simplificação foi considerado que as fissões são induzidas somente por nêutrons do grupo térmico. As Secções de choque microscópicas de fissão obti-

das estão mostradas na Tabela 5.2. Nota-se, portanto, que somente a secção de choque de fissão do grupo térmico é significativa, podendo-se desprezar as outras três.

TABELA 5.2- Secções de Choque Microscópicas de Fissão

Grupo	1	2	3	4
$\sigma_{fi}$ (barn)	1,26463	2,44487	24,8692	434,757

A Tabela 5.3 apresenta as secções de choque de absorção para o U-235, Hidrogênio e Oxigênio. Analisando-se esses valores nota-se que, a terceira hipótese feita, ou seja, considerar somente a absorção do grupo térmico, também é bastante razoável.

Analisando-se as secções de choque macroscópicas de transferência, para cada grupo, apresentadas na Tabela 5.4, observa-se que estas são muito pequenas quando comparadas com as outras secções de choque envolvidas no problema, e portanto pode-se considerar que os nêutrons não são transferidos para um grupo de maior energia. Assim, a quarta e última hipótese feita também é válida.

TABELA 5.3- Seções de Choque Microscópicas de Absorção

Grupo	1	2	3	4
$\sigma_a$ (U-235) (barn)	1,38902	3,34553	40,0375	511,145
$\sigma_a$ (H) (barn)	0,0	$1,761 \times 10^{-4}$	$1,155 \times 10^{-2}$	0,258919
$\sigma_a$ (O) (barn)	$9,376 \times 10^{-3}$	0,0	$1,758 \times 10^{-6}$	$1,388 \times 10^{-4}$

TABELA 5.4- Seções de Choque Macroscópicas de Transferência

Grupo g	$\Sigma_{(g+1)} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{(g+2)} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{(g+3)} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{(g+4)} (\text{cm}^{-1})$
1	-	0,07929	0,006969	$0,977 \times 10^{-6}$
2	0,0	-	0,41702	$0,5772 \times 10^{-4}$
3	0,0	0,0	-	0,15101
4	0,0	0,0	$1,0327 \times 10^{-5}$	-

O problema do reator esférico refletido proposto, em quatro grupos de energia, foi resolvido e também, foi encontrada a distribuição ótima de combustível. A teoria de otimização foi desenvolvida e aplicada com êxito para um problema típico em engenharia nuclear e resultados numéricos são apresentados.

No decorrer da resolução desse trabalho foi encontrado um fenômeno desconhecido previamente, que é a dupla resposta para o problema de interface.

Apenas um dos resultados numéricos, entre todas as combinações feitas, foi apresentada, uma vez que os outros têm o mesmo comportamento. Estes estão apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5 e mostram, respectivamente, os valores numéricos dos fluxos e das correntes calculados analiticamente.

Nota-se que o comportamento dos fluxos é achatado em quase todo o cerne, e próximo a interface caem rapidamente devido à condição de anulamento dos fluxos na fronteira do reator.

O fluxo térmico, depois da interface, cerne-refletor, apresenta uma subida por causa dos nêutros que escapam do cerne e são imediatamente moderados no refletor.

Para a mesma concentração de combustível e raio do

reator, comparando-se os resultados em dois e quatro grupos de energia, observa-se que o valor da interface é maior para o caso de dois grupos de energia, diferindo em aproximadamente 1 cm. Os valores da interface em dois e quatro grupos tornam-se mais próximos quanto maior for a concentração de combustível limite,  $N_0$ .

Obteve-se duas respostas de interface para todas as concentrações de combustível e raios usados, em dois e quatro grupos de energia. No caso de quatro grupos, pela Tabela 4.8, nota-se que somente a segunda resposta de interface é solução para o problema proposto, pois apenas ela maximiza a potência do reator. Igualmente, para dois grupos, nota-se pela Tabela A-3, que há duas respostas para o problema de interface e que somente a segunda resposta é solução para o problema otimizado.

A Tabela 5.5 apresenta os resultados obtidos para a posição da interface, potência e a relação potência/massa, para o caso de  $N_0 = 0,8$  átomos/cm<sup>3</sup> e  $R=60$  cm, em dois e quatro grupos de energia. Com esses resultados pode-se verificar o que foi exposto acima.

TABELA 5.5 - Comparação de Respostas em Dois e Quatro Grupos de Energia

GRUPOS	Interface $r_2$ (cm)	Potência (watts)	P/M (watts/g)	Interface $r_1$ ( cm )	Potência (watts)	P/M (wassts/g)
2	35,742	$11,475 \times 10^6$	2994,13	52,202	$35,752 \times 10^6$	3407,11
4	40,455	$27,734 \times 10^6$	2926,96	50,834	$55,023 \times 10^6$	3195,06

O motivo de se ter resolvido o problema em dois e quatro grupos de energia foi o de confirmar a dupla criticidade obtida. Convém notar entretanto, que os resultados em quatro grupos de energia são mais realísticos do que em dois grupos.

É importante notar que foi atingido o objetivo proposto neste trabalho, ou seja, foi determinada a distribuição ótima de combustível que maximiza a retirada de potência - de um reator esférico refletido sujeita aos vínculos impostos.

Como sugestões pode-se propor, entre outras:

- aplicar esta teoria de otimização e método de solução para outras geometrias;
- verificar se a dupla criticalidade se mantém;
- maximizar a potência do reator sujeito a outros tipos de vínculos tecnológicos, econômicos ou de segurança;
- otimizar outros parâmetros do reator que não a distribuição de combustível;
- considerando-se que os reatores reais, por exemplo, PWR, utilizam configuração em três regiões, será interessante, aplicar este trabalho em otimização para esse tipo de configuração.

Convém mencionar que quanto a segunda sugestão, algum trabalho já está sendo desenvolvido e um sumário de uma parte do trabalho foi aceito para apresentação no ANS Winter Meeting /16/.

## APÊNDICE A - SOLUÇÃO PARA DOIS GRUPOS

Nesse Apêndice, estão os resultados para dois grupos de energia, obtidos de modo análogo ao caso de quatro grupos, apresentados no trabalho.

Para dois grupos de energia, as equações de difusão para as duas regiões são:

- para a região interna com  $N_c(r) \phi_2(r) = 1$

$$D_1 \nabla^2 \phi_{1c}(r) - \Sigma_{R1} \phi_{1c}(r) + \nu \sigma_f = 0$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_{2c}(r) - \Sigma_a^M \phi_{2c}(r) + \Sigma_{R1} \phi_{1c}(r) - \sigma_a^F = 0$$

- para a região externa, com  $N_e(r) = 0$ :

$$D_1 \nabla^2 \phi_{1e}(r) - \Sigma_{R1} \phi_{1e}(r) = 0$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_{2e}(r) - \Sigma_a^M \phi_{2e}(r) + \Sigma_{R1} \phi_{1e}(r) = 0$$

As correntes são dadas por:

$$J_1(r) = - D_1 \frac{d}{dr} \phi_1(r)$$

$$J_2(r) = - D_2 \frac{d}{dr} \phi_2(r)$$

Nas variáveis das equações foram usados os índices c e e, respectivamente, para as regiões central e externa.

O sistema de difusão, pode ser escrito na forma matricial, como:

$$\underline{D} \nabla^2 \underline{\phi} - \underline{\Sigma} \underline{\phi} + \underline{Q} = \underline{0}$$

onde,

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

é a matriz coeficiente de difusão

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{R1} & 0 \\ -\Sigma_{R1} & \Sigma_a^H \end{bmatrix}$$

é a matriz secção de choque

$$\underline{Q}_c = \begin{bmatrix} v \sigma_f \\ -\sigma_a^F \end{bmatrix}$$

é o vetor constante para a região central (cerne)

$$\underline{Q}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o vetor constante para a região externa (refletor)

$$\phi(r) = \begin{bmatrix} Y_1(r) \\ Y_3(r) \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor fluxo}$$

$$J(r) = \begin{bmatrix} Y_2(r) \\ Y_4(r) \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor corrente}$$

As soluções obtidas são:

$$\phi_c = \sum_{i=1}^2 A_i \frac{\sinh(w_i r)}{r} \cdot \underline{G}(w_i) + \phi_p$$

$$\phi_r = \sum_{i=1}^2 C_i \frac{\sinh(w_i (R-r))}{r} \cdot \underline{G}(w_i)$$

$$J_c = \sum_{i=1}^2 -D_i \left\{ A_i \left( \frac{w_i \cosh(w_i r)}{r} - \frac{\sinh(w_i r)}{r^2} \right) \right\} \underline{G}(w_i)$$

$$J_r = \sum_{i=1}^2 D_i \left\{ C_i \left( \frac{w_i \cosh(w_i (R-r))}{r} + \frac{\sinh(w_i (R-r))}{r^2} \right) \right\} \underline{G}(w_i)$$

onde:

$$A_i = F_i W_i(r_1) \frac{r_1}{\sinh(w_i r_1)}$$

$$C_i = A_i \left\{ \frac{r_1 w_i \cosh(w_i r_1) - \sinh(w_i r_1)}{r_1 w_i \cosh(w_i (R-r_1)) + \sinh(w_i (R-r_1))} \right\}$$

$$i = 1, 2$$

$r_1$  é a interface a ser determinada.

Os autovalores foram determinados da equação:

$$\det \left[ w^2 \underline{D} - \underline{\Sigma} \right] = 0$$

$$\text{ou seja, } w_i = \frac{\Sigma(i,i)}{D(i,i)}$$

Os coeficientes de acoplamento foram determinados da equação:

$$\left[ w_i \underline{D} - \underline{\Sigma} \right] \cdot \underline{G}(w_i) = \underline{0}$$

ou seja,

$$\underline{G}(w_i) = \begin{bmatrix} g_1(w_i) \\ g_2(w_i) \end{bmatrix}, \text{ onde } g_2(w_i) = \frac{\Sigma R_1/D_2}{w_2^2 - w_1^2} \text{ (coeficiente de acoplamento)}$$

Os  $F_i$  são tais que:

$$F_i = \begin{cases} F_1 = \phi_{p1} \\ F_2 = -g_2(w_i)F_1 + \phi_{p2} \end{cases}$$

A solução particular foi determinada da equação:

$$\phi_{-p} = \Sigma^{-1} Q$$

ou seja,

$$\phi_{-p} = \begin{bmatrix} \frac{v\sigma_f}{\Sigma R_1} & F \\ \frac{v\sigma_f - \sigma_a}{M} & \\ & \Sigma a \end{bmatrix}$$

Onde a quantidade  $W_i$  foi obtida ser :

$$W_i(r_1) = \frac{r_1 w_i \cos(w_i(R-r_1)) + \sinh(w_i(R-r_1))}{w_i \sinh(w_i R)} \cdot \frac{\sinh(w_i r_1)}{r_1}, i=1,2$$

A interface,  $r_1$ , foi determinada com o auxílio da condição de criticalidade, isto é:

$$\sum_{i=1}^2 \left( \frac{F_i}{\phi_{p2}} \right) g_2(w_i) W_i(r_1) = 1 - \frac{1}{N_o \phi_{p2}}$$

onde  $N_o = N_c(r_1)$ .

As condições de contorno foram dadas por:

$$Y_{1e}(R) = Y_{3e}(R) = 0$$

$$Y_{2c}(0) = Y_{4c}(0) = 0$$

e mais, os fluxos e as correntes devem ser contínuos na interface, ou seja:

$$Y_{ic}(r_1) = Y_{ie}(r_1) \quad , \quad i = 1,2,3,4$$

Onde os índices pares e ímpares referem-se, respectivamente, às correntes e aos fluxos.

A potência foi determinada pela equação (3.5.4):

$$POT^n = \frac{4}{3} \pi \epsilon \sigma_f(r_1)^3 \text{ watts}$$

A massa crítica foi determinada por :

$$M = 4\pi \int_0^{r_1} \frac{1}{Y_3(r)} r^2 dr \text{ átomos de U-235}$$

Para a aplicação numérica, em dois grupos de energia, o espectro de nêutrons foi dividido em dois intervalos:

Grupo rápido            15 MeV - 1eV

Grupo térmico          1 eV - - 0 eV

As constantes utilizadas para os cálculos foram geradas pelo código de computação XSDRN /13/, usando-se para isso uma concentração de combustível única,  $N_0 = 0,66728 \times 10^{20}$  átomos/cm<sup>3</sup> e estão apresentados na Tabela A.1.

TABELA A.1- Seções de Choque e Constantes do Reator

Grupo	1	2
$\Sigma_R$ (cm <sup>-1</sup> )	0,0485	0
$\Sigma_a^M$ (cm <sup>-1</sup> )	0	0,01728
$\sigma_f$ (cm <sup>2</sup> )	-	$0,0435 \times 10^{-20}$
$\sigma_a^F$ (cm <sup>2</sup> )	-	$0,0511 \times 10^{-20}$
D (cm)	0,889	0,115
$\nu$ (n/fissão)	-	2,442

Para a obtenção de resultados numéricos foram utilizadas as mesmas combinações de raios e concentrações de combustível. Para cada uma dessas combinações tem-se uma solução própria.

A posição da interface é determinada pela condição de criticalidade do reator. Em dois grupos de energia, também foram obtidas duas respostas como solução do problema de interface. Igualmente, como no caso de quatro grupos de energia, a resposta de interface mais próxima da fronteira externa do reator é a que corresponde à solução do problema

proposto, ou seja, é a solução que maximiza a retirada de potência do reator.

A Tabela A.2 apresenta a lista de todas as combinações de concentrações de combustível e raios que foram usadas - com as respectivas respostas de interface obtidas, em cm, e mais as potências em watts e as massas em gramas, para cada valor de interface. Convém insistir que somente a segunda resposta do problema de interface é válida, como solução do problema de controle ótimo.

A Tabela A.3 apresenta a relação potência sobre massa para cada resposta ao problema de interface.

A Tabela A.4 apresenta as duas possíveis respostas para o problema de interface, para o raio  $R = 60$  cm, para todas as concentrações de combustíveis utilizadas. A Figura A.1 apresenta a curva da concentração combustível por resposta de interface.

Para efeito de cálculo, a densidade de potência máxima foi considerada ser  $60 \text{ watts/cm}^3$ .

A Tabela A.4 apresenta os valores dos fluxos, das correntes e da distribuição ótima de combustível, para a concentração de combustível,  $N_0 = 0,8 \times 10^{20}$  átomos /  $\text{cm}^3$  e raio,  $R = 60$  cm. A Figura A.2 mostra os gráficos do fluxo e da distribuição ótima de combustível, obtidos segundo as respostas normalizadas.

TABELA A.2- Interface , Potência e Massa para as Duas Respostas

R (cm)	$N_0$ (at/cm <sup>3</sup> x10 <sup>20</sup> )	Interface r <sub>2</sub> (cm)	Potência (watts)	Massa (gramas)	Interface r <sub>1</sub> (cm)	Potência (watts)	Massa (gramas)
30	1,05	20,762	2,249x10 <sup>6</sup>	1,115x10 <sup>3</sup>	21,546	2,514x10 <sup>6</sup>	1,218x10 <sup>3</sup>
30	1,1	18,374	1,559x10 <sup>6</sup>	8,612x10 <sup>2</sup>	23,307	3,182x10 <sup>6</sup>	1,504x10 <sup>3</sup>
30	1,15	17,162	1,270x10 <sup>6</sup>	7,575x10 <sup>2</sup>	23,981	3,466x10 <sup>6</sup>	1,647x10 <sup>3</sup>
30	1,2	16,246	1,078x10 <sup>6</sup>	6,887x10 <sup>2</sup>	24,433	3,666x10 <sup>6</sup>	1,759x10 <sup>3</sup>
40	0,9	25,754	4,293x10 <sup>6</sup>	1,743,10 <sup>3</sup>	32,154	8,355x10 <sup>6</sup>	3,051x10 <sup>3</sup>
40	0,95	22,782	2,972x10 <sup>6</sup>	1,323x10 <sup>3</sup>	33,372	9,340x10 <sup>6</sup>	3,429x10 <sup>3</sup>
40	1,0	20,728	2,238x10 <sup>6</sup>	1,083x10 <sup>3</sup>	34,055	9,926x10 <sup>6</sup>	3,685x10 <sup>3</sup>
40	1,05	19,172	1,771x10 <sup>6</sup>	9,253x10 <sup>2</sup>	34,530	1,034x10 <sup>7</sup>	3,892x10 <sup>3</sup>
40	1,1	17,945	1,452x10 <sup>6</sup>	8,160x10 <sup>2</sup>	34,891	1,068x10 <sup>7</sup>	4,070x10 <sup>3</sup>
40	1,15	16,948	1,224x10 <sup>6</sup>	7,367x10 <sup>2</sup>	35,180	1,094x10 <sup>7</sup>	4,230x10 <sup>3</sup>
40	1,2	16,122	1,053x10 <sup>6</sup>	6,773x10 <sup>2</sup>	35,419	1,117x10 <sup>7</sup>	4,375x10 <sup>3</sup>
60	0,8	35,742	1,148x10 <sup>7</sup>	3,833x10 <sup>3</sup>	52,202	3,575x10 <sup>7</sup>	1,048x10 <sup>4</sup>
60	0,85	29,459	6,426x10 <sup>6</sup>	2,384x10 <sup>3</sup>	53,433	3,834x10 <sup>7</sup>	1,136x10 <sup>4</sup>
60	0,9	25,479	4,157x10 <sup>6</sup>	1,6974x10 <sup>3</sup>	54,149	3,99x10 <sup>7</sup>	1,196x10 <sup>4</sup>
60	0,95	22,729	2,951x10 <sup>6</sup>	1,316x10 <sup>3</sup>	54,648	4,102x10 <sup>7</sup>	1,245x10 <sup>4</sup>
60	1,0	20,711	2,233x10 <sup>6</sup>	1,081x10 <sup>3</sup>	55,026	4,187x10 <sup>7</sup>	1,287x10 <sup>4</sup>
60	1,05	19,166	1,769x10 <sup>6</sup>	9,246x10 <sup>2</sup>	55,326	4,256x10 <sup>7</sup>	1,325x10 <sup>4</sup>
60	1,1	17,942	1,452x10 <sup>6</sup>	8,157x10 <sup>2</sup>	55,574	4,314x10 <sup>7</sup>	1,359x10 <sup>4</sup>
60	1,15	16,947	1,223x10 <sup>6</sup>	7,365x10 <sup>2</sup>	55,782	4,362x10 <sup>7</sup>	1,390x10 <sup>4</sup>
60	1,2	16,120	1,053x10 <sup>6</sup>	6,772x10 <sup>2</sup>	55,962	4,405x10 <sup>7</sup>	1,420x10 <sup>4</sup>

... continua...

TABELA A.2- Interface, Potência e Massa para as Duas Respostas ( Continuação...)

R (cm)	$N_0$ ( $\text{at}/\text{cm}^2 \times 10^{20}$ )	Interface $r_2$ (cm)	Potência (watts)	Massa (gramas)	Interface $r_1$ (cm)	Potência (watts)	Massa (gramas)
99	0,7	74,072	$1,021 \times 10^8$	$2,650 \times 10^4$	88,002	$1,713 \times 10^8$	$4,295 \times 10^4$
99	0,75	47,112	$2,628 \times 10^7$	$7,802 \times 10^3$	91,460	$1,928 \times 10^8$	$4,847 \times 10^4$
99	0,8	35,736	$1,147 \times 10^7$	$3,831 \times 10^3$	92,624	$1,997 \times 10^8$	$4,083 \times 10^4$
99	0,85	29,459	$6,425 \times 10^6$	$2,384 \times 10^3$	93,323	$2,043 \times 10^8$	$5,245 \times 10^4$
99	0,9	25,479	$4,157 \times 10^6$	$1,697 \times 10^3$	93,815	$2,075 \times 10^8$	$5,385 \times 10^4$
99	0,95	22,729	$2,951 \times 10^6$	$1,316 \times 10^3$	94,188	$2,100 \times 10^8$	$5,501 \times 10^4$
99	1,1	20,711	$2,233 \times 10^6$	$1,081 \times 10^3$	94,485	$2,120 \times 10^8$	$5,604 \times 10^4$
99	1,05	19,166	$1,769 \times 10^6$	$9,246 \times 10^2$	94,730	$2,136 \times 10^8$	$5,698 \times 10^4$
99	1,1	17,942	$1,452 \times 10^6$	$8,157 \times 10^2$	94,936	$2,150 \times 10^8$	$5,785 \times 10^4$
99	1,15	16,947	$1,223 \times 10^6$	$7,365 \times 10^2$	95,113	$2,163 \times 10^8$	$5,867 \times 10^4$
99	1,2	16,120	$1,053 \times 10^6$	$6,771 \times 10^2$	95,267	$2,173 \times 10^8$	$5,944 \times 10^4$

TABELA A.3- Relação P/M para cada Interface

R (cm)	$N_0$ (at/cm <sup>3</sup> x10 <sup>20</sup> )	Interface r <sub>2</sub> (cm)	Potência/massa (watts/g)	Interface r <sub>1</sub> (cm)	Potência/massa (watts/g)
30	1,05	20,762	2016,65	21,546	2164,29
30	1,1	18,374	1810,11	23,307	2114,88
30	1,15	17,162	1676,90	23,981	2104,34
30	1,2	16,246	1564,59	24,433	2083,85
40	0,9	25,754	2462,66	32,154	2737,92
40	0,95	22,782	2245,73	33,372	2724,01
40	1,0	20,728	2067,45	34,055	2693,62
40	1,05	19,172	1914,69	34,530	2657,49
40	1,1	17,945	1779,72	34,891	2623,11
40	1,15	16,948	1660,89	35,180	2587,43
40	1,2	16,122	1554,83	35,419	2552,41
60	0,8	35,742	2994,13	52,202	3407,11
60	0,85	29,459	2694,86	53,433	3375,95
60	0,9	25,479	2449,14	54,149	3335,20
60	0,95	22,729	2242,78	54,648	3293,60
60	1,0	20,711	2066,41	55,026	3252,69
60	1,05	19,166	1913,56	55,326	3212,90
60	1,1	17,942	1779,48	55,574	3137,52
60	1,15	16,947	1660,75	55,782	3137,52
60	1,2	16,120	1554,74	55,962	3101,95
99	0,7	74,072	3854,16	88,002	3988,21
99	0,75	47,112	3368,36	91,460	3976,80
99	0,8	35,736	2993,96	92,624	3929,34
99	0,85	29,459	2694,85	93,323	3891,22
99	0,9	25,479	2449,14	93,815	3853,86
99	0,95	22,729	2242,78	94,188	3817,71
99	1,0	20,711	2066,41	94,485	3782,88
99	1,05	19,166	1913,56	94,730	3749,39
99	1,1	17,942	1779,48	94,936	3717,17
99	1,15	16,947	1660,75	95,113	3686,13
99	1,2	16,120	1554,88	95,267	3656,23

TABELA A.4- Respostas para o Problema de Interface para  
R = 60 cm

$N_0$ (at/cm <sup>3</sup> x 10 <sup>20</sup> )	Interface $r_2$ ( cm )	Interface $r_1$ ( cm )
0,8	35,742	52,202
0,85	29,459	53,434
0,9	25,479	54,149
0,95	22,729	54,648
1,0	20,711	55,026
1,05	19,166	55,326
1,1	17,942	55,574
1,15	16,947	55,782
1,2	16,120	55,962

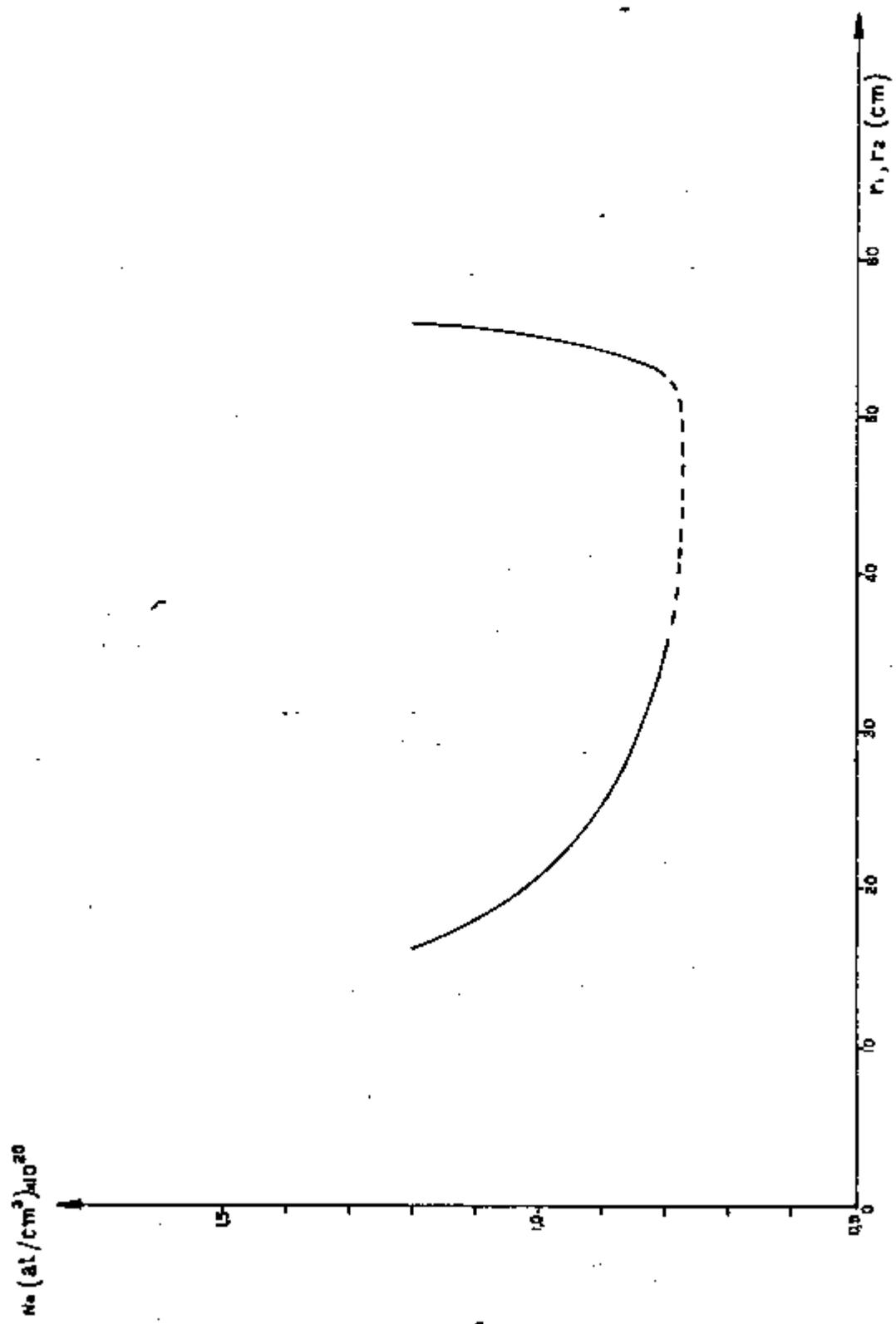


FIG. A.1 - RESPONSTAS DE INTERFACE

TABELA A.5- Fluxos e Correntes normalizados e Distribuição Ótima do Combustível

$r$ ( cm )	$\phi_1$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$\phi_2$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$\phi_3$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$\phi_4$ (n/cm <sup>2</sup> seg)	$N(r)$ ( at/cm <sup>3</sup> x10 <sup>20</sup> )
0,0	2,190	3,190	0,0	0,0	0,3135
10,0	2,190	3,189	0,4 x10 <sup>-4</sup>	0,23 x 10 <sup>-4</sup>	0,3136
20,0	2,189	3,183	0,281x10 <sup>-3</sup>	0,158x 10 <sup>-3</sup>	0,3142
22,0	2,188	3,179	0,417x10 <sup>-3</sup>	0,235x10 <sup>-3</sup>	0,3145
24,0	2,187	3,174	0,622x10 <sup>-3</sup>	0,349x10 <sup>-3</sup>	0,3150
26,0	2,185	3,167	0,931 x10 <sup>-3</sup>	0,519x10 <sup>-3</sup>	0,3158
28,0	2,182	3,156	0,1398x10 <sup>-2</sup>	0,774x10 <sup>-3</sup>	0,3169
30,0	2,178	3,139	0,2107x10 <sup>-2</sup>	0,1155x10 <sup>-2</sup>	0,3186
32,0	2,173	3,115	0,3183x10 <sup>-2</sup>	0,1721x10 <sup>-2</sup>	0,3211
34,0	2,164	3,078	0,4822x10 <sup>-2</sup>	0,2559x10 <sup>-2</sup>	0,3249
36,0	2,150	3,023	0,7322x10 <sup>-2</sup>	0,3785x10 <sup>-2</sup>	0,3308
38,0	2,130	2,943	0,1114x10 <sup>-1</sup>	0,5553x10 <sup>-2</sup>	0,3398
40,0	2,099	2,826	0,1699x10 <sup>-1</sup>	0,8038x10 <sup>-2</sup>	0,3539
42,0	2,051	2,658	0,2596x10 <sup>-1</sup>	0,1139x10 <sup>-1</sup>	0,3762
44,0	1,978	2,425	0,3973x10 <sup>-1</sup>	0,1557x10 <sup>-1</sup>	0,4124
46,0	1,867	2,115	0,6089x10 <sup>-1</sup>	0,2001x10 <sup>-1</sup>	0,4728
48,0	1,696	1,739	0,9348x10 <sup>-1</sup>	0,2264x10 <sup>-1</sup>	0,5751
50,0	1,434	1,368	0,1437	0,1795x10 <sup>-1</sup>	0,7307
52,0	1,030	1,233	0,2212	-0,7652x10 <sup>-2</sup>	0,8114
52,202	0,9789	1,25	0,2310	-0,1238x10 <sup>-1</sup>	0,8
54,0	0,5999	1,179	0,1506	0,1612x10 <sup>-1</sup>	
56,0	0,3264	0,8111	0,9780x10 <sup>-1</sup>	0,2380x10 <sup>-1</sup>	
58,0	0,1419	0,3948	0,6982x10 <sup>-1</sup>	0,2351x10 <sup>-1</sup>	
60,0	0,0	0,0	0,5886x10 <sup>-1</sup>	0,2191x10 <sup>-1</sup>	

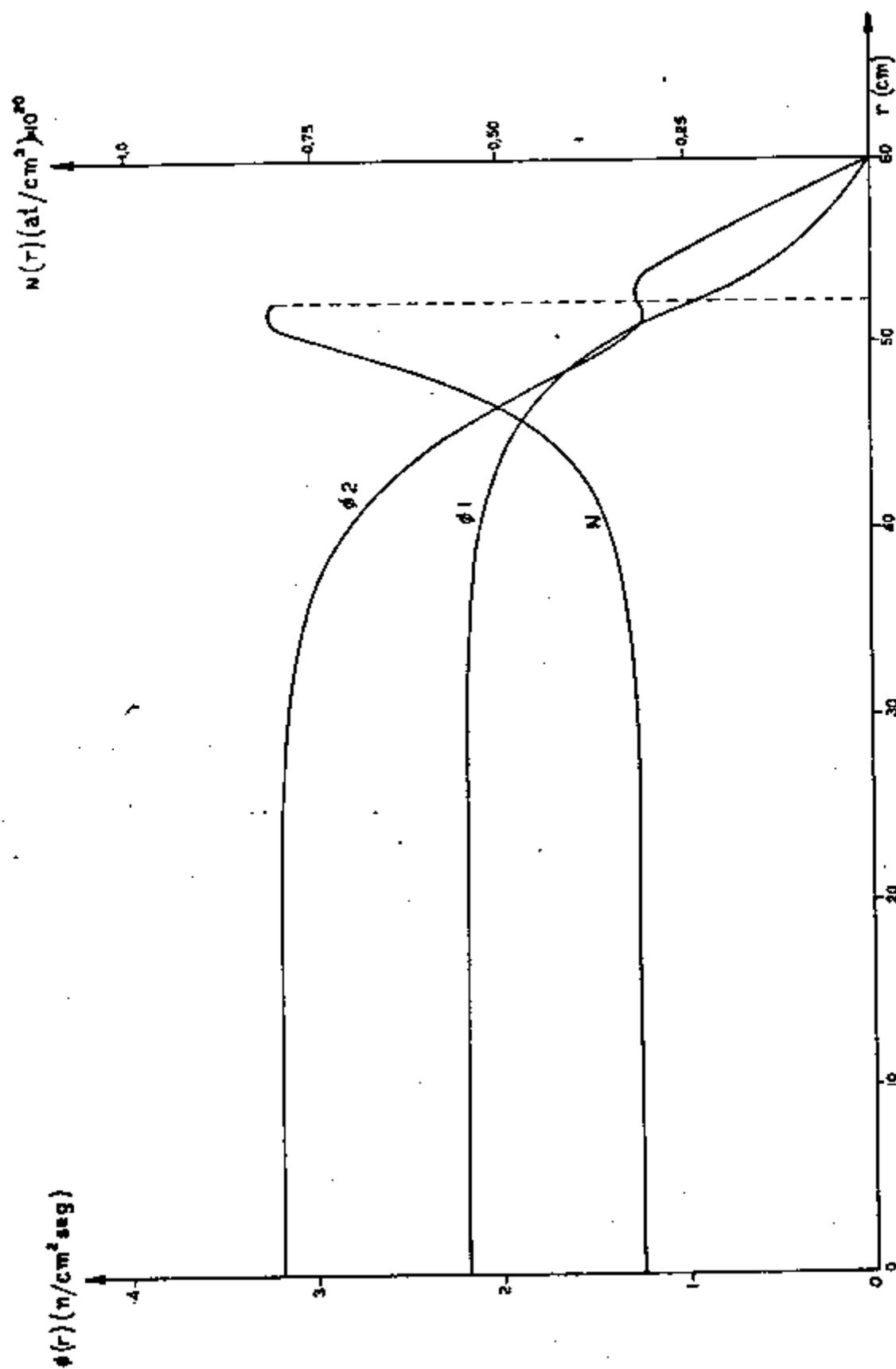


FIG A.2 - FLUXOS E DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTÍVEL

## APÊNDICE B- ZONA SINGULAR

No Capítulo 2 foi comentado que, haverá zona singular, somente se for possível obter o controle,  $N(r)$ , explicitamente, através da sequência de equações (2.2.13), e além disso, se for verificado o critério de Robbins, dado pela inequação (2.2.14).

No Capítulo 3 foi afirmado que não existe zona singular. Este fato está provado com o seguinte: supondo que existe zona singular, neste caso  $v_1(r) = v_2(r)$ , então a Hamiltoniana fica:

$$\begin{aligned}
 H = & \hat{4}\pi\epsilon\sigma_f N(r) Y_7(r) r^2 - \frac{1}{D_1} \lambda_1(r) Y_2(r) - \lambda_2(r) \left[ \frac{2}{r} Y_2(r) + \right. \\
 & \left. \Sigma_{R1} Y_1(r) - v\sigma_f N(r) Y_7(r) \right] - \frac{1}{D_2} \lambda_3(r) Y_4(r) - \\
 & - \lambda_4(r) \left[ \frac{2}{r} Y_2(r) - \Sigma_{(1+2)} Y_1(r) + \Sigma_{R2} Y_3(r) \right] - \frac{1}{D_3} \lambda_5(r) Y_6(r) - \\
 & - \lambda_6(r) \left[ \frac{2}{r} Y_6(r) - \Sigma_{(1+3)} Y_1(r) - \Sigma_{(2+3)} Y_3(r) + \Sigma_{R3} Y_5(r) \right] - \\
 & - \frac{1}{D_4} \lambda_7(r) Y_8(r) - \lambda_8(r) \left[ \frac{2}{r} Y_8(r) - \Sigma_{(1+4)} Y_1(r) - \Sigma_{(2+4)} Y_3(r) - \right. \\
 & \left. - \Sigma_{(3+4)} Y_5(r) + \Sigma_a^M Y_7(r) + N(r) \sigma_a^F Y_7(r) \right]
 \end{aligned}$$

B.1

Então, tem-se:

$$\frac{\partial H}{\partial N} = 0 = Y_7(r) [4\pi\epsilon\sigma_f r^2 + \lambda_2(r) v\sigma_f - \sigma_a^F \lambda_8(r)]$$

B.2

Onde  $Y_7(r)$  é o fluxo térmico e, portanto, não pode ser nulo, para qualquer ponto  $r \neq R$ . Como a equação (B.2) deve ser verificada para todos os valores de  $r$ , conclui-se que:

$$[4\pi\epsilon\sigma_f r^2 + v\sigma_f \lambda_2(r) - \sigma_a^F \lambda_8(r)] = 0$$

B.3

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial H}{\partial N} \right) = 0 &= \frac{d}{dr} Y_7(r) \cdot [4\pi\epsilon\sigma_f r^2 + \lambda_2(r) v\sigma_f - \sigma_a^F \lambda_8(r)] + \\ &+ Y_7(r) \cdot \frac{d}{dr} [4\pi\epsilon\sigma_f r^2 + \lambda_2(r) v\sigma_f - \sigma_a^F \lambda_8(r)] \end{aligned}$$

B.4

Utilizando-se as equações (2.2.9) e (2.2.10), ou seja,  $\dot{Y}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}$  e  $\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial Y_i}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ , e levando em consideração a equação (A.3), a equação acima toma a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial H}{\partial N} \right) = 0 &= Y_7(r) \left[ 8\pi\epsilon\sigma_f r + v\sigma_f \left( \lambda_1(r) \frac{1}{D_1} + \frac{2}{r} \lambda_2(r) \right) + \right. \\ &\left. - \sigma_a^F \left( \frac{1}{D_4} \lambda_7(r) + \frac{2}{r} \lambda_8(r) \right) \right] \end{aligned}$$

B.5

Mas,  $Y_7(r) \neq 0$ , então:

$$\left[ 8\pi \epsilon \sigma_f r + v \sigma_f \left( \frac{1}{D_1} \lambda_1(r) + \frac{2}{r} \lambda_2(r) \right) - \sigma_a^F \left( \frac{1}{D_4} \lambda_7(r) + \frac{2}{r} \lambda_8(r) \right) \right] = 0 \quad \text{B.6}$$

Considerando-se essa igualdade, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{\partial H}{\partial N} \right) = 0 = Y_7(r) \frac{d}{dr} \left[ 8\pi \epsilon \sigma_f r + \frac{v \sigma_f}{D_1} \lambda_1(r) + \frac{2v \sigma_f}{r} \lambda_2(r) \right. \\ \left. - \frac{\sigma_a^F}{D_4} \lambda_7(r) - \frac{2\sigma_a^F}{r} \lambda_8(r) \right] = Y_7(r) \left[ 8\pi \epsilon \sigma_f + \frac{v \sigma_f}{D_1} \lambda_1(r) + \right. \\ \left. - \frac{2v \sigma_f}{r^2} \lambda_2(r) - \frac{\sigma_a^F}{D_4} \lambda_7(r) + \frac{2\sigma_a^F}{r^2} \lambda_8(r) - \frac{2\sigma_a^F}{r} \lambda_8(r) \right] = 0 \end{aligned}$$

B.7

Como  $\dot{\lambda}_1 = - \frac{\partial H}{\partial Y_1}$ , então:

$$\dot{\lambda}_1(r) = \lambda_2(r) \Sigma_{R1}^{-\Sigma} (1+2) \lambda_4(r) - \Sigma (1+3) \lambda_6(r) - \Sigma (1+4) \lambda_8(r)$$

$$\dot{\lambda}_2(r) = \frac{1}{D_1} \lambda_1(r) + \frac{2}{r} \lambda_2(r)$$

$$\dot{\lambda}_7(r) = -(4\pi\epsilon\sigma_f r^2 + v\sigma_f \lambda_2(r) - \sigma_a^F \lambda_8(r)) N(r)$$

$$\dot{\lambda}_8(r) = \frac{1}{D_4} \lambda_7(r) + \frac{2}{r} \lambda_8(r)$$

Substituindo-se as equações acima em (B.7), notando-se que em  $\dot{\lambda}_7$ , o termo que multiplica  $N(r)$  é nulo (equação (B.3)), obtém-se :

$$\begin{aligned} & [8\pi\epsilon\sigma_f - \frac{v\sigma_f}{D_1} (\Sigma_{R1} \lambda_2(r) - \Sigma (1+2) \lambda_4(r) - \Sigma (1+3) \lambda_6(r) - \\ & - \Sigma (1+4) \lambda_8(r))] - \frac{2v\sigma_f}{r^2} \lambda_2(r) + \frac{2v\sigma_f}{r} (\frac{1}{D_1} \lambda_1(r) + \\ & + \frac{2}{r} \lambda_2(r)) + \frac{2\sigma_a^F}{r^2} \lambda_8(r) - \frac{2\sigma_a^F}{r} [\frac{1}{D_4} \lambda_7(r) + \frac{2}{r} \lambda_8(r)] = 0 \end{aligned}$$

B.8

Assim, sucessivamente, pode-se verificar a sequência de equações (2.2.13), sendo que, só aparece o controle  $N(r)$  quando o índice das derivadas,  $M$ , for par; e nesse caso o controle está sempre multiplicado pelo termo nulo dado pela equação (B.3). Consequentemente, não é possível encontrar uma equação na qual o controle  $N(r)$  apareça explicitamente e não seja multiplicado por um coeficiente nulo. Neste caso, fica provado que a zona singular não existe.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AXFORD, R.A. Constrained optimal programming problems in reactor statics. Los Alamos, N.M., Los Alamos Sci. Lab., Aug. 1969. (LA-4267).
2. BARTOSEK, V. & ZALESKY, K. Optimal reactor configuration yielding maximum power I. Kernenergie, 17(11):351-6, Jah. 1974.
3. BARTOSEK, V. & ZALESKY, K. Optimal reactor configuration yielding maximum power II. Kernenergie, 17(12):373-6, Jah. 1974.
4. BERKOVITZ, L.D. Optimal control theory. New York, N.Y., Springer, 1974.
5. BRYSON JR., A.E. & HO, Y.C. Applied optimal control. New York, N.Y., Wiley, 1975.
6. CINCI, C.A. Maximização da potência de um reator cilíndrico sujeito a vínculos na densidade de potência e na distribuição de combustível. (Dissertação de mestrado a ser apresentada, IPEN).
7. CITRON, S.J. Elements of optimal control. New York, N.Y., Reinhardt and Winston, 1969.
8. GLASSTONE, S. & BELL, G.I. Nuclear reactor theory. New York, N.Y., Van Nostrand, 1970.
9. GOERTZEL, G. Minimum critical mass and flat flux. J. nucl. Energy, 2:193-201, 1956.
10. GOLDSCHIMIDT, P. Minimum critical mass in intermediate reactors subject to constraints on power density and fuel enrichment. Nucl.Sci.Engng., 49:263-73, 1972.
11. GOLDSCHIMIDT, P. Optimal fuel enrichment distribution in fast reactors. Nucl.Sci.Engng., 50:153-63, 1973.
12. GOLDSCHIMIDT, P. & QUENON, J. Minimum critical mass in fast reactors with bounded power density. Nucl. Sci. Engng., 37:311-9, 1970.

13. GREENE, N.M. & CRAVEN JR., C. XSDEN: a discrete ordinates spectral averaging code. Oak Ridge, Tenn., Oak Ridge National Lab., Jul. 1969. (ORNL-TM-2500).
14. HILDEBRAND, F.B. Introduction to numerical analysis. New York, N.Y., MacGraw-Hill, 1956.
15. INTERNATIONAL BUSINESS MACHINES CORP. System/360-Scientific subroutine package. Version III- Programmer's manual. 5.ed. New York, N.Y., Aug. 1970. (Program nº 360A-CM-03X; GH 20-0205-4).
16. ISHIGURO, Y.; IERARDI, M.C.F.; READE, J.R.V. Double criticality of uniform-power reflected reactors. ANS Transactions, 33:782-3, 1979.
17. LAMARSH, J.R. Introduction to nuclear theory. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
18. PONTRYAGIN, L.S.; BOLTYANSKII, V.G.; GAMKRELIDZE, R.V.; MISHCHENKO, E.F. The mathematical theory of optimal processes. Oxford, Pergamon, 1964.
19. ROBBINS, H.M. A generalized Legendre-Clebsch condition for the singular cases of optimal control. IBM J1 Res. Dev., 11:361-72, 1967.
20. SAGE, A.P. Optimum systems control. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1968.
21. SANTOS, W.N. dos. Cálculo da distribuição de combustível que maximiza a retirada de potência de um reator. São Paulo, 1977. (Dissertação de Mestrado. Instituto de Energia Atômica).
22. STACEY JR., W.M. Control of xenon spatial oscillations. Nucl.Sci.Engng., 38:229-43, 1969.

23. STACEY JR., W.M. Optimal control of xenon-power spatial transients. Nucl.Sci.Engng., 33:162-8, 1968.
24. TSOURI, N.; ROOTENBERG, J.; LIDOPSKY, L.J. Optimal control of a large core reactor in presence of xenon. IEEE Trans.Nucl.Sci., 22:702-10, Feb. 1975.