

ATENÇÃO

O ORIGINAL DESTE ÍTEM NÃO FORNECE CONDIÇÕES  
PARA OBTER UMA CÓPIA DIGITALIZADA COM  
MELHOR QUALIDADE

**LUIZ ROBERTO SANNAZZARO**

**O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO  
DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS, PARA UM REATOR CILINDRICO,  
HOMOGÊNICO, FINITO, TOTALMENTE REFLETIDO**

**Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dra. Wilma H. S. Cintra**

**Dissertação apresentada a  
Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo,  
para obtenção do título de  
Mestre em Ciências e  
Tecnologia Nucleares.**

**São Paulo, 1977**

$$(2.3.5) \quad \Sigma_a^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z) = \Sigma_a^j \cdot \phi^j(r, z) + (1 + \alpha^j) \cdot \frac{r^j}{r} \phi^j(r, z)$$

$$(A.20) \quad \int_0^{R_2} dr \cdot J_0(\gamma_1 \cdot r) \cdot \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z') = J_0(\gamma_1 \cdot r) \cdot G(r, z/r', z') \Big|_0^{R_2} -$$

$$- \int_0^{R_2} dr \cdot G(r, z/r', z') \cdot \frac{d}{dr} J_0(\gamma_1 \cdot r)$$

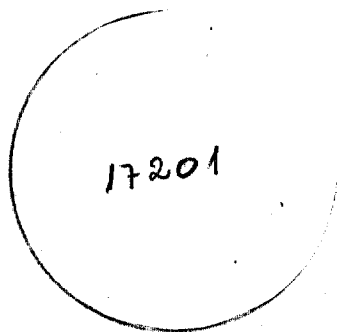
$$(A.21) \quad \int_0^{R_2} dr \cdot J_0(\gamma_1 \cdot r) \cdot r \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r, z/r', z') =$$

$$- J_0(\gamma_1 \cdot r) \cdot G(r, z/r', z') \Big|_0^{R_2} + \int_0^{R_2} dr \cdot G(r, z/r', z') \cdot \frac{d^2}{dr^2} [r \cdot J_0(\gamma_1 \cdot r)]$$

INSTITUTO

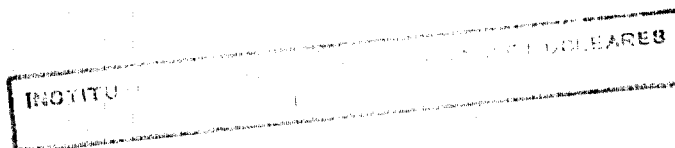
O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO  
DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS, PARA UM REATOR CILINDRICO,  
HOMOGÊNIO, FINITO, TOTALMENTE REFLETIDO

Orientador: Profa. Dra. Wilma H. S. Cintra



Dissertação apresentada  
a Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo,  
para obtenção do título de  
Mestre em Ciências e Tec -  
nologia Nucleares .

São Paulo, 1977



À meus pais .

## AGRADECIMENTOS

Desejo expressar aqui os meus agradecimentos a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, na execução deste trabalho. Em particular, agradeço às seguintes pessoas e instituições:

. Profa. Dra. Wilma H. S. Cintra, pela valiosa e segura orientação na realização deste trabalho.

. Prof. Dr. Roberto Y. Hukai, pelo constante incentivo e importante papel desempenhado na minha formação.

. Instituto de Energia Atômica, pelo apoio financeiro e material.

. Colegas da Coordenadoria de Engenharia Nuclear, pelo apoio e discussões no decorrer do trabalho.

. Pessoal do Centro de Processamento de Dados, pelas facilidades e atendimento prestado.

. Srta. Creusa Moreira Diniz, pelo trabalho de datilografia e Sra. Vitoria Bonfanti, pela execução dos desenhos e gráficos.

. Ana Teresa Vianna Figueiredo, pelo auxílio na revisão final do texto.

## RESUMO

É usado o método da função de Green, para resolver a equação de difusão de nêutrons para um reator cilíndrico, finito, homogêneo, totalmente refletido e com simetria axial.

Esse método era considerado por Kobayashi, impraticável para tal reator devido a dificuldades matemáticas.

Considerando as mesmas propriedades de difusão e moderação, tanto no refletor como ao longo de todo o caroço, independentemente da concentração de combustível e, utilizando a transformada de Hankel na dedução da função de Green, as dificuldades são eliminadas e, a praticabilidade do método é demonstrada.

Para obtenção de resultados numéricos, é resolvido o problema para um reator tipo Triga, em 2 grupos de energia cujos resultados são apresentados.

## ÍNDICE

	pag.
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 - A Equação de Transporte	1
1.2 - A Equação de Difusão	4
1.3 - Objetivo	10
2. O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN	11
2.1 - O Reator	11
2.2 - As Considerações	12
2.3 - O Método	12
2.4 - As Soluções	21
3. EXEMPLO NUMÉRICO	32
3.1 - Dados	32
3.2 - Preparação das Equações	35
3.3 - Resultados	39
4. CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES	43
APÊNDICE	46
REFERÊNCIAS	60



## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 - A Equação de Transporte

Como em todos os outros ramos das ciências exatas, na física de reatores, uma das principais preocupações, é o estabelecimento de um modelo matemático, o qual possibilite uma descrição que, ao mesmo tempo simples, seja um retrato, o mais fiel possível do fenômeno por ele representado.

No caso de reatores nucleares, esse modelo matemático é baseado no comportamento dos nêutrons dentro de um certo sistema, com o qual é estabelecido - uma equação de continuidade. A partir daí, é elaborada toda uma teoria que possa explicar de uma maneira lógica e coerente, tudo o que se passa dentro do sistema em estudo, e também fazer a previsão do comportamento desse mesmo sistema, quando submetido a qualquer alteração.

O melhor modelo matemático estabelecido até agora para o estudo do comportamento de um reator nu -

clear, é representado pela equação de transporte / 3/, que leva em consideração a distribuição, no espaço, tempo e energia, dos nêutrons dentro do sistema. Essa equação, pela similaridade com aquela estabelecida por L. Boltzmann no estudo da teoria cinética dos gases/19/, frequentemente é chamada de equação de Boltzmann.

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \text{grad} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \sigma(\vec{r}, E, t) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) &= \\ = \int_{E'} \int_{\vec{\Omega}'} \sigma(\vec{r}, E', t) f(\vec{r}; \vec{\Omega}; E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E'; t) d\vec{\Omega}' dE' + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

onde:

- $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  = Fluxo angular de nêutrons, definido como o produto da velocidade escalar  $v$  pela densidade angular de nêutrons local.
- $\sigma(\vec{r}, E, t)$  = Secção de choque macroscópica total, que representa a probabilidade de interação entre um nêutron e o meio, por unidade de comprimento de deslocamento do nêutron.
- $f(\vec{r}; \vec{\Omega}; E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$  = Função transferência, definida de modo que o produto  $\sigma(\vec{r}, E', t) \cdot f(\vec{r}; \vec{\Omega}; E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega}' dE'$  representa a probabilidade, por unidade de comprimento,

de um nêutron com energia  $E'$  na direção  $\Omega'$  ao sofrer uma colisão com um núcleo na posição  $\vec{r}$ , reapareça com energia entre  $E$  e  $E+dE$  numa direção entre  $\vec{\Omega}$  e  $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$ .

$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$  = Termo que representa a fonte externa de nêutrons, que surgem na posição  $\vec{r}$ , por unidade de volume, ângulo sólido, energia e tempo.

Os termos em que aparecem a dependência espacial e temporal ( $\vec{r}$ ) e ( $t$ ), são considerados no instante  $t$  e posição  $\vec{r}$ .

Por outro lado, os termos que dependem das variáveis angular e energética, são considerados dentro dos intervalos  $d\vec{\Omega}$  centrado em  $\vec{\Omega}$  e  $dE$  centrado em  $E$ , respectivamente.

Apesar da fidelidade com que a equação (1.1.1) representa o comportamento neutrônico, dificuldades são encontradas na tentativa de solucioná-la. Vários métodos tem sido propostos para sua resolução, como pode ser verificado nas referências / 3 / e / 6 /. A solução exata, infelizmente, se restringe a problemas altamente idealizados, reservando para problemas mais reais, apenas soluções matemáticas aproximadas.

## 1.2 - A Equação de Difusão

Devido às complicações matemáticas, praticamente intransponíveis, apresentadas pela equação de transporte, uma opção não tão rigorosa do ponto de vista físico, mas que permite um tratamento matemático mais simples, é encontrada na teoria de difusão.

Nessa teoria, a equação básica é a equação de difusão, que não deixa de ser uma forma simplificada da equação de transporte, estabelecida através da aplicação da lei de Fick e de várias outras considerações / 12 / .

Para nêutrons monoenergéticos, a equação de difusão, em sua forma mais geral, é expressa como:

$$\text{div } D(\vec{r}, t) \cdot \text{grad } \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.2.1)$$

onde:

$D(\vec{r}, t)$  = Coeficiente de difusão, que representa a difusividade do nêutron no meio onde está inserido e é definido pela lei de Fick.

$\phi(\vec{r}, t)$  = Fluxo de nêutrons, definido como o produto da velocidade escalar dos nêutrons  $v$ , pela densidade de nêutrons no local.

$\Sigma_a(\vec{r}, t)$  = Secção de choque macroscópica de absorção, que representa a probabilidade de um nêutron ser absorvido pelo meio, por unidade de comprimento de deslocamento do nêutron.

$S(\vec{r}, t)$  = Termo fonte, que leva em conta os nêutrons que surgem dentro do sistema, incluindo aqueles que aparecem devido às fissões.

$$= s(\vec{r}, t) + v\Sigma_f(\vec{r}, t) \cdot \phi(\vec{r}, t)$$

com

$s(\vec{r}, t)$  = Fonte externa de nêutrons.

$v$  = Número médio de nêutrons emitidos por fissão.

$\Sigma_f(\vec{r}, t)$  = Secção de choque macroscópica de fissão.

Em todos os termos aparece a dependência espacial e temporal  $(\vec{r}, t)$ , significando que cada um deles é considerado na posição  $\vec{r}$  no instante  $t$ .

Particular interesse, em cálculo de reatores nucleares tem a equação (1.2.1) quando na forma estacionária

$$\text{div } D(\vec{r}) \cdot \text{grad } \phi(\vec{r}) - \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0 \quad (1.2.2)$$

- $\phi(\vec{r}, t)$  = Fluxo de nêutrons, definido como o produto da velocidade escalar dos nêutrons  $v$ . pela densidade de nêutrons no local.
- $\Sigma_a(\vec{r}, t)$  = Secção de choque macroscópica de absorção, que representa a probabilidade de um nêutron ser absorvido pelo meio, por unidade de comprimento de deslocamento do nêutron.
- $S(\vec{r}, t)$  = Termo fonte, que leva em conta os nêutrons que surgem dentro do sistema, incluindo aqueles que aparecem devido às fissões.
- $$= s(\vec{r}, t) + v \Sigma_f(\vec{r}, t) \cdot \phi(\vec{r}, t)$$

com

- $s(\vec{r}, t)$  = Fonte externa de nêutrons.
- $v$  = Número médio de nêutrons emitidos por fissão.
- $\Sigma_f(\vec{r}, t)$  = Secção de choque macroscópica de fissão.

Em todos os termos aparece a dependência espacial e temporal  $(\vec{r}, t)$ , significando que cada um deles é considerado na posição  $\vec{r}$  no instante  $t$ .

Particular interesse, em cálculo de reatores nucleares tem a equação (1.2.1) quando na forma estacionária

$$\text{div } D(\vec{r}) \cdot \text{grad } \phi(\vec{r}) - \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0 \quad (1.2.2)$$

Em um reator nuclear, existe um espectro de nêutrons com energias variando desde zero até cerca de 15 MeV. As propriedades dos nêutrons, quanto ao espalhamento, absorção, difusão e fissão, são fortemente dependentes da energia.

Não obstante ter sido a equação (1.2.2) deduzida para nêutrons monoenergéticos, ela pode ser estendida considerando todo o espectro de energia dos nêutrons dentro de um reator. Para evitar o aparecimento de mais uma variável (a energia) na equação de difusão, trazendo dificuldades matemáticas, usa-se dividir esse espectro de energia em diversos grupos. Com a divisão dos nêutrons em grupos de energia, a equação (1.2.2) seria, agora, aplicada dentro de cada grupo, surgindo um termo que leva em conta a remoção de nêutrons de um determinado grupo para outros, além do que, o termo fonte  $S(\vec{r})$  seria acrescido de um outro, que considera o espalhamento de nêutrons de outros grupos para aquele determinado. Com isso, a equação (1.2.2) seria geral na forma

$$\text{div } D^j(\vec{r}) \cdot \text{grad } \phi^j(\vec{r}) - \Sigma_a^j(\vec{r}) \cdot \phi^j(\vec{r}) - \Sigma_r^j(\vec{r}) \cdot \phi^j(\vec{r}) + S^j(\vec{r}) = 0 \quad (1.2.3)$$

onde:

$j = 1, 2, 3, \dots, N =$  grupos de energia.

$$\Sigma_r^j(\vec{r}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \Sigma^{kj}(\vec{r})$$

com:

$\Sigma^{kj}(\vec{r})$  = Secção de choque macroscópica de espalhamento do grupo j para o grupo k .

$$S^j(r) = s^j(r) + \sum_{k=1}^N \chi^j \cdot v^k \cdot \Sigma_f^k(\vec{r}) \cdot \phi^k(\vec{r}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \Sigma^{jk} \cdot \phi^k(\vec{r})$$

com:

$\chi^j$  = Fração de nêutrons de fissão que nascem no grupo j .

Inúmeros métodos foram propostos para a solução da equação (1.2.3), encontrando-se em cada um deles, considerações que limitam os problemas que propõem resolver , a casos particulares.

Essas limitações são encontradas principalmente nas geometrias, no número de dimensões, no número de regiões, no número de grupos de energia , na composição do meio e no tipo de cálculo que se pretende fazer.



De estrito interesse para este trabalho, são os métodos propostos para geometria cilíndrica em duas di mensões  $(r, z)$ .

Métodos elementares para esse tipo de problema são encontrados em quaisquer livros de introdução a física de reatores / 12/ e / 16 /, que, por envolverem uma matemática simplificada, não são suficientes para resolver problemas mais gerais.

Como métodos mais sofisticados, desprezando-se os essencialmente numéricos, podem ser citados entre outros, aqueles onde são utilizados séries de Lie, séries de Fourier e transformadas de Fourier.

Assim é, que, usando séries de Lie, Lemanska.M, em 1971 / 14/, resolveu a equação (1.2.3) em geometria  $(r, z)$ . Esse método foi proposto apenas para um reator nũ, onde foi feito um estudo do tamanho crítico e do volume mínimo.

Em 1974, Kobayashi / 10/ determinou a solução da equação de difusão em geometria  $(r, z)$ , por transformadas finitas de Fourier, para reatores com multiregiões, mas somente para nêutrons monoenergéticos.

Já em 1976, Ohtani N. / 18/, usando séries de Fourier, resolveu a equação de difusão, também em geometria  $(r, z)$  para problemas com multi-regiões em multigrupos de energia.

Em 1967, Kobayashi / 11/, pela primeira vez, usou a função de Green para resolver a equação de difusão em geometrias uni-dimensionais com várias regiões. Em uma primeira etapa, usando a função de Green, a equação de difusão de grupo é transformada em um sistema de equações lineares, contendo somente os fluxos nas interfaces das regiões como incógnitas. Resolvendo esse sistema, são obtidos os fluxos nas interfaces e em uma segunda etapa, novamente com a ajuda da função de Green, os fluxos no interior de cada região.

Em 1974, novamente Kobayashi / 10/ afirmou que, em princípio, as equações de difusão para problemas em duas dimensões  $(r, z)$  com regiões finitas, poderiam ser resolvidas, utilizando-se a função de Green. Entretanto, a função de Green, para esse tipo de problema, só poderia ser obtida em forma de séries de Fourier, além disso essa série não convergiria uniformemente, tornando essa aproximação impraticável.

Em 1976, Cintra / 4 / resolveu a equação (1.2.3) para problema unidimensional, com reator tipo placa re -

fletido , utilizando o método da função de Green, impondo a condição de que as propriedades de difusão e moderação fossem as mesmas , tanto no caroço como no refletor. Além disso, estabeleceu uma condição de criticalidade, que obedecia a uma determinada distribuição de densidade de potência.

### 1.3 - Objetivo

O objetivo deste trabalho é demonstrar a possibilidade do uso do método da função de Green na solução da equação de difusão de nêutrons, para um reator cilíndrico, finito, homogêneo, totalmente refletido, com simetria axial , em multigrupos de energia .

## 2. O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN

### 2.1 - O Reator

O método aqui proposto tem as equações baseadas em um reator cilíndrico, finito, homogêneo e totalmente refletido, para  $N$  grupos de energia. Tal reator é mostrado na figura (2.1).

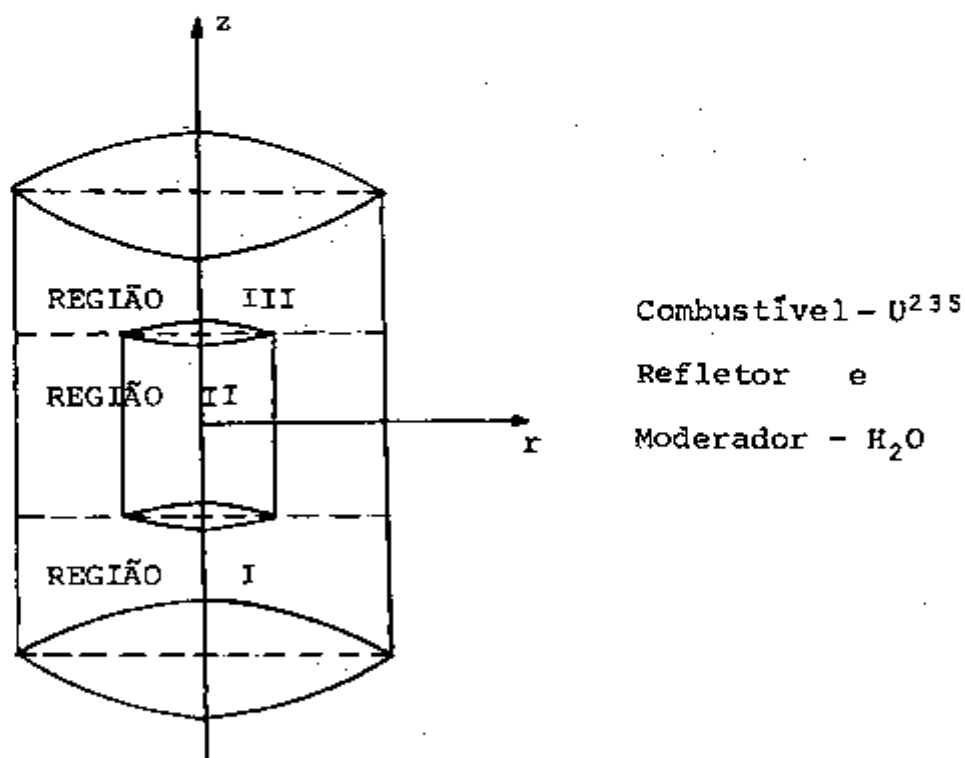


Fig. 2.1

A fim de facilitar o cálculo , divide-se o reator da figura (2.1) em 3 regiões .

Região I - Refletor inferior

Região II - Caroço e refletor lateral

Região III - Refletor superior.

## 2.2 - As Considerações

Como hipóteses do problema , são consideradas :

2.2.a - Mesmas propriedades de difusão e moderação , tanto no caroço como no refletor.

2.2.b - Condição de criticalidade estabelecida pela imposição de uma distribuição de densidade de potência, dada por  $c(r,z)$

## 2.3 - O Método

Conforme a secção 1.2, a equação de difusão no estado estacionário é dada pela equação (1.2.3).

Em geometria cilíndrica com simetria axial ,  
essa equação pode ser escrita como

$$\text{div } D^j(r, z) \cdot \text{grad } \phi^j(r, z) - \Sigma_a^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z) - \Sigma_r^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z) + S^j(r, z) = 0 \quad (2.3.1)$$

Na equação (2.3.1), o primeiro termo representa a fuga líquida dos nêutrons do grupo  $j$ , do sistema

$$\text{div } D^j(r, z) \cdot \text{grad } \phi^j(r, z) .$$

Pela condição (2.2.a), as propriedades de difusão ao longo de todo caroço, são constantes e iguais às do refletor

$$D^j(r, z) = D^j$$

e , com isso, pode-se escrever o termo de fuga como

$$\text{div } D^j(r, z) \cdot \text{grad } \phi^j(r, z) = D^j \cdot \nabla^2 \phi^j(r, z) \quad (2.3.2)$$

O segundo termo da equação (2.3.1) representa a absorção total dos nêutrons, tanto pelo moderador como pelo combustível.

$$\Sigma_a^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z)$$

Mas, a secção de choque macroscópica de absorção é dada por

$$\Sigma_a^j(r, z) = \Sigma_{H^a}^j(r, z) + \Sigma_{U^a}^j(r, z)$$

onde:

$\Sigma_{H^a}^j(r, z)$  = Secção de choque macroscópica de absorção do  $H_2O$  .

$\Sigma_{U^a}^j(r, z)$  = Secção de choque macroscópica de absorção do  $U^{235}$  .

Pela condição (2.2.a), tem-se

$$\Sigma_{H^a}^j(r, z) = \Sigma_a^j$$

pois, essa condição implica na mesma densidade de  $H_2O$  , tanto ao longo de todo o caroço como no refletor.

Portanto,

$$\Sigma_a^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z) = \Sigma_{H^a}^j \cdot \phi^j(r, z) + \Sigma_{U^a}^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z) \quad (2.3.3)$$

Mas, a secção de choque de absorção do  $U^{235}$  pode ser expressa como

$$\Sigma_{U^a}^j(r, z) = \Sigma_{U^f}^j(r, z) + \Sigma_{U^c}^j(r, z) = (1 + \alpha^j) \cdot \Sigma_{U^f}^j(r, z) \quad (2.3.4)$$

onde:

$\Sigma_{U^C}^j(r, z)$  = Secção de choque macroscópica de captura radioativa do  $U^{235}$ .

e

$\alpha^j$  = Razão captura-fissão definida como

$$\frac{\Sigma_{U^C}^j(r, z)}{\Sigma_{U^F}^j(r, z)} = \frac{\sigma_{U^C}^j}{\sigma_{U^F}^j}$$

com  $\sigma_{U^C}^j$  e  $\sigma_{U^F}^j$ , sendo as secções de choque microscópicas de captura e de fissão do  $U^{235}$ , respectivamente.

Portanto, a equação (2.3.3) pode ser escrita na forma

$$\Sigma_a^j(r, z) = \Sigma_a^j \cdot \phi^j(r, z) + (1 + \alpha^j) \cdot \Sigma_f^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z) \quad (2.3.5)$$

Pela condição (2.2.b) tem-se

$$\sum_{k=1}^N \Sigma_{U^F}^k(r, z) \cdot \phi^k(r, z) = c(r, z) \quad (2.3.6)$$

Com a expressão (2.3.6), multiplicando o último termo da equação (2.3.5) por  $c(r, z)$  e dividindo por  $\sum_{k=1}^N \Sigma_{U^F}^k(r, z) \cdot \phi^k(r, z)$  chega-se a :



$$\Sigma_a^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z) = \Sigma_a^j \cdot \phi^j(r, z) + (1 + \alpha^j) \cdot c(r, z) \cdot \frac{\Sigma_f^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z)}{U_f^j} - \sum_{k=1}^N \frac{\Sigma_f^k(r, z) \cdot \phi^k(r, z)}{U_f^k} \quad (2.3.7)$$

lembrando-se que

$$\frac{\Sigma_f^j}{U_f^j} = N(r, z) \cdot \frac{\sigma_f^j}{U_f^j}$$

com  $N(r, z)$  igual à densidade de combustível na posição  $(r, z)$ , a equação (2.3.7) torna-se

$$\Sigma_a^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z) = \Sigma_a^j \cdot \phi^j(r, z) + (1 + \alpha^j) \cdot c(r, z) \cdot \frac{\sigma_f^j}{U_f^j} - \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_f^k}{U_f^k} \cdot \frac{\phi^k(r, z)}{\phi^j(r, z)} \quad (2.3.8)$$

Por outro lado, o terceiro termo da equação (2.3.1) leva em conta os nêutrons que são removidos de um grupo para outro, devido apenas ao espalhamento.

$$\Sigma_r^j(r, z) \cdot \phi^j(r, z)$$

Novamente pela condição (2.2.a) tem-se

$$\Sigma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \Sigma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}} = \sum_{\substack{\mathbf{k}=1 \\ \mathbf{k} \neq \mathbf{j}}^{\mathbf{N}}} \Sigma^{\mathbf{k}\mathbf{j}}$$

com isso, tem-se

$$\Sigma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \cdot \phi^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \Sigma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}} \cdot \phi^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \quad (2.3.9)$$

O termo que considera o aparecimento de nêutrons no sistema dentro de um grupo, é o quarto termo da equação (2.3.1)

$$S^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{z})$$

Esse termo é composto por :

fonte externa -  $s^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{z})$

nêutrons de fissão -  $\sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{N}} \chi^{\mathbf{j}} \cdot \nu^{\mathbf{k}} \cdot \frac{\Sigma^{\mathbf{k}}}{U^{\mathbf{f}}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \cdot \phi^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{z})$

nêutrons espalhados para dentro do grupo -  $\sum_{\substack{\mathbf{k}=1 \\ \mathbf{k} \neq \mathbf{j}}^{\mathbf{N}}} \Sigma^{\mathbf{j}\mathbf{k}} \cdot \phi^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{z})$

Portanto,

$$S^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = s^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) + \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{N}} \chi^{\mathbf{j}} \cdot \nu^{\mathbf{k}} \cdot \frac{\Sigma^{\mathbf{k}}}{U^{\mathbf{f}}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \cdot \phi^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) + \sum_{\substack{\mathbf{k}=1 \\ \mathbf{k} \neq \mathbf{j}}^{\mathbf{N}}} \Sigma^{\mathbf{j}\mathbf{k}} \cdot \phi^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{z})$$

(2.3.10)

### Fonte Externa

Para reatores críticos, esse termo não é considerado

$$s^j(r, z) = 0 \quad (2.3.11)$$

### Nêutrons de Fissão

O número médio de nêutrons emitidos por fissão,  $\nu$ , para energias térmicas e epitérmicas, onde ocorre a grande maioria de fissões, não varia muito. A grande variação desse número é encontrada para fissões em altas energias, mas, para um reator térmico, como é o caso deste problema, as fissões que ocorrem nessa faixa de energia são em quantidades desprezíveis por isso, pode-se considerar:

$$\nu^k = \nu = \text{constante para } k = 1, 2, \dots, N$$

Com isso, tem-se,

$$\sum_{k=1}^N \chi^j \cdot \nu^k \cdot \sum_{U^f} \varepsilon_f^k(r, z) \cdot \phi^k(r, z) = \chi^j \cdot \nu \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{U^f} \varepsilon_f^k(r, z) \cdot \phi^k(r, z) \quad (2.3.12)$$

Pela expressão (2.3.6), a equação (2.3.12) pode ser expressa na forma:

$$\sum_{k=1}^N \chi^j \cdot v \cdot \frac{\Sigma_f^k}{U^k} \cdot \phi^k(r, z) = \chi^j \cdot v \cdot c(r, z) \quad (2.3.13)$$

Com as equações (2.3.11) e (2.3.13) pode-se escrever a expressão (2.3.10) como

$$S^j(r, z) = \chi^j \cdot v \cdot c(r, z) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \Sigma^{jk} \cdot \phi^k(r, z) \quad (2.3.14)$$

Finalmente, substituindo as expressões (2.3.2), (2.3.8), (2.3.9) e (2.3.14) na equação (2.3.1) e dividindo todos os termos por  $D^j$ , chega-se à

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi^j(r, z) - \frac{(\Sigma_a^j + \Sigma_r^j)}{D^j} \cdot \phi^j(r, z) - \frac{(1 + \alpha^j)}{D^j} \cdot c(r, z) \cdot \frac{\frac{\sigma_c^j}{U^j}}{\sum_{k=1}^N \frac{\sigma_f^k \cdot \phi^k(r, z)}{\phi^j(r, z)}} + \\ + \frac{\chi^j \cdot v}{D^j} \cdot c(r, z) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\Sigma^{jk}}{D^j} \cdot \phi^k(r, z) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

A expressão (2.3.15) é geral para todo o reator, mas, para o caso específico do refletor, onde não há fissões, tem-se

$$\nabla^2 \phi^j(r, z) - \frac{(\Sigma_a^j + \Sigma_r^j)}{D^j} \cdot \phi^j(r, z) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\Sigma^{jk}}{D^j} \cdot \phi^k(r, z) = 0 \quad (2.3.16)$$

Neste caso, as equações (2.3.15) e (2.3.16) podem ser acopladas numa única forma,

$$v^2 \cdot \phi^j(r, z) - K^{j2} \cdot \phi^j(r, z) + f^j(r, z) = 0 \quad (2.3.17)$$

onde

$$K^{j2} = \frac{\epsilon_a^j + \epsilon_r^j}{D^j} \quad (2.3.18)$$

e

$$f^j(r, z) = \begin{cases} H^j(r, z) + E^j(r, z) & \text{para o caroço} \\ H^j(r, z) & \text{para o refletor} \end{cases} \quad (2.3.19)$$

com

$$H^j(r, z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\epsilon^{jk}}{D^j} \cdot \phi^k(r, z) \quad (2.3.20)$$

e

$$E^j(r, z) = - \frac{(1+a^j)}{D^j} \cdot c(r, z) \cdot \frac{\sigma_f^j}{\sum_{k=1}^N \sigma_f^k \cdot \frac{\phi^k(r, z)}{\phi^j(r, z)}} + \frac{\chi^j}{D^j} \cdot v \cdot c(r, z)$$

(2.3.21)

Pelo apêndice , a equação (2.3.17) tem como solução

$$\phi^j(r, z) = \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \int_{-z_2}^{z_2} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \quad (2.3.22)$$

onde

$$G^j(r, z/r', z') = \frac{1}{\pi \cdot R_2^2 \cdot D^j} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot J_0(\gamma_i \cdot r')}{F_i^j} \times$$

$$\times \begin{cases} \sinh[A_i^j \cdot (z_2 - z')] \cdot \sinh[A_i^j \cdot (z_2 + z)] & P / -z_2 \leq z < z' \\ \sinh[A_i^j \cdot (z_2 + z')] \cdot \sinh[A_i^j \cdot (z_2 - z)] & P / z' < z \leq z_2 \end{cases} \quad (2.3.23)$$

com

$$F_i^j = J_1^2(\gamma_i \cdot R_2) \cdot A_i^j \cdot \sinh[A_i^j \cdot 2 \cdot z_2] \quad (2.3.24)$$

e

$$A_i^j = \sqrt{\gamma_i^2 + K^{j2}} \quad (2.3.25)$$

#### 2.4 - As Soluções

As soluções do tipo (2.3.22) da equação (2.3.17) são determinadas separadamente nesta secção, para cada região em que foi dividido o reator, de acordo com a

secção 2.1 .

Região I

$$\text{Região compreendida entre } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R_2 \\ -z_2 \leq z \leq -z_1 \end{array} \right.$$

Separando as integrais da solução (2.3.22), tendo como limites as coordenadas correspondentes às dimensões do caroço e refletor respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} & 0 \leq r \leq R_2 \\ & -z_2 \leq z \leq -z_1 \\ \phi^j(r, z) &= \left\{ \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot 2\pi + \int_{R_1}^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \right\} \cdot \\ & \left\{ \int_{-z_2}^z dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_z^{-z_1} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot \right. \\ & G^j(r, z/r', z') + \int_{-z_1}^{z_1} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \\ & \left. + \int_{z_1}^{z_2} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G(r, z/r', z') \right\} \quad (2.4.1) \end{aligned}$$

Essa separação se faz necessária, pois o termo  $f^j(r, z)$  é diferente para o caroço e para o refletor.

Substituindo na equação (2.4.1) os valores de  $f^j(r', z')$  dados por (2.3.19), consegue-se

$$0 \leq r \leq R_2$$

$$\begin{aligned} \phi^j(r, z) = & \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \left\{ \int_{-Z_2}^z dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \right. \\ & -Z_2 \leq z \leq -Z_1 & z > z' \\ & + \int_z^{-Z_1} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \\ & z < z' \\ & + \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' \cdot [H^j(r', z') + E^j(r', z')] \cdot G^j(r, z/r', z') + \\ & z < z' \\ & \left. + \int_{Z_1}^{Z_2} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \right\} + \int_{R_1}^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \\ & \left\{ \int_{-Z_2}^z dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_z^{-Z_1} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot \right. \\ & z > z' \\ & \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \\ & z < z' \\ & \left. + \int_{Z_1}^{Z_2} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \right\} \quad (2.4.2) \end{aligned}$$

Reagrupando a equação (2.4.2), fica-se com



$$0 \leq r \leq R_2 \\ -Z_2 \leq z \leq -Z_1 \\ \phi^j(r, z) = \left\{ \int_0^{R_1} dr' r' 2\pi + \int_{R_1}^{R_2} dr' r' 2\pi \right\} .$$

$$\cdot \left\{ \int_{-Z_2}^z dz' . H^j(r', z') . G^j(r, z/r', z') + \int_z^{-Z_1} dz' . H^j(r', z') . G^j(r, z/r', z') + \right. \\ \left. \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' . H^j(r', z') . G^j(r, z/r', z') + \int_{Z_1}^{Z_2} dz' . H^j(r', z') . G^j(r, z/r', z') \right\} + \\ + \int_0^{R_1} dr' . r' . 2\pi . \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' . E^j(r', z') . G^j(r, z/r', z') \quad (2.4.3)$$

Acoplando novamente as integrais de (2.4.3) ,

tem-se

$$0 \leq r \leq R_2 \\ -Z_2 \leq z \leq -Z_1 \\ \phi^j(r, z) = \int_0^{R_2} dr' . r' . 2\pi . \left\{ \int_{-Z_2}^z dz' . H^j(r', z') . G^j(r, z/r', z') + \right. \\ \left. + \int_z^{Z_2} dz' . H^j(r', z') . G^j(r, z/r', z') \right\} + \int_0^{R_1} dr' . r' . 2\pi . \\ \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' . E^j(r', z') . G^j(r, z/r', z') \quad (2.4.4)$$

Substituindo os valores de  $G^j(r, z/r', z')$  dados por (2.3.23) na equação (2.4.4) , tem-se

$$\begin{aligned}
0 \leq r \leq R_2 \\
\phi^j(r, z) &= \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \left\{ \int_{-Z_2}^z dz' \cdot H^j(r', z') \cdot \frac{1}{\pi R_2^2 D^j} \right. \\
-Z_2 \leq z \leq -Z_1 & \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot J_0(\gamma_i \cdot r')}{F_i^j} \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z')] \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z)] &+ \\
+ \int_z^{Z_2} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot \frac{1}{\pi R_2^2 D^j} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot J_0(\gamma_i \cdot r')}{F_i^j} \cdot \\
\cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z')] \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z)] &\left. \right\} + \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \\
\cdot \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' \cdot E^j(r', z') \cdot \frac{1}{\pi R_2^2 D^j} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot J_0(\gamma_i \cdot r')}{F_i^j} \cdot \\
\sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z')] \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z)] & \quad (2.4.5)
\end{aligned}$$

Rearranjando a equação (2.4.5), obtêm-se

$$\begin{aligned}
0 \leq r \leq R_2 \\
\phi^j(r, z) &= \frac{2}{R_2^2 D^j} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^j} \cdot \left\{ \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z)] \cdot \right. \\
-Z_2 \leq z \leq -Z_1 & \\
\cdot \int_{-Z_2}^z dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z')] \cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot H^j(r', z') &+ \\
+ \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z)] \cdot \int_z^{Z_2} dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z')] &\left. \right\} \cdot \\
\int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot H^j(r', z') + \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z)] &\left. \right\} \\
\cdot \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z')] \cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot E^j(r', z') &\left. \right\} \\
& \quad (2.4.6)
\end{aligned}$$

Região II

$$\text{Região compreendida entre } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R_2 \\ -Z_1 \leq z \leq Z_1 \end{array} \right.$$

Novamente, separando as integrais da solução (2.3.22), tendo como limites as coordenadas correspondentes às dimensões do caroço e refletor, respectivamente, obtêm-se

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq R_2 \\ -Z_1 \leq z \leq Z_1 \end{aligned} \quad \phi^j(r, z) = \left\{ \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot 2\pi + \int_{R_1}^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ \int_{-Z_1}^z dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_{-Z_1}^z dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \right. \\ \left. + \int_z^{Z_1} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_{Z_1}^{Z_2} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \right\} \\ (2.4.7)$$

Substituindo os valores de  $f^j(r, z)$

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq R_2 \\ -Z_1 \leq z \leq Z_1 \end{aligned} \quad \phi^j(r, z) = \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \left\{ \int_{-Z_1}^z dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \right. \\ \left. + \int_{-Z_1}^z dz' \cdot [H^j(r', z') + E^j(r', z')] \cdot G^j(r, z/r', z') + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_z^{z_1} dz' \cdot [H^j(r', z') + E^j(r', z')] \cdot G^j(r, z/r', z') \quad + \\
& + \left. \int_{z_1}^{z_2} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \right\} + \int_{R_1}^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \\
& \cdot \left\{ \int_{-z_2}^{-z_1} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_{-z_1}^z dz' \cdot H^j(r'; z') \cdot G^j(r, z/r'; z') + \right. \\
& \left. + \int_z^{z_1} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_{z_1}^{z_2} dz' \cdot H^j(r'; z') \cdot G^j(r, z/r'; z') \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad z > z' \qquad \qquad \qquad z > z' \qquad \qquad \qquad z < z' \qquad \qquad \qquad z < z'
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Reagrupando os termos da equação (2.4.8) , de maneira análoga ã feita para a região I, obtêm-se

$$\begin{aligned}
0 \leq r \leq R_2 \\
\phi^j(r, z) & = \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \left\{ \int_{-z_2}^z dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \right. \\
& \left. -z_1 \leq z \leq z_1 \right. \\
& \left. + \int_z^{z_2} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \right\} + \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \\
& \qquad \qquad \qquad z < z' \qquad \qquad \qquad z < z' \\
& \left\{ \int_{-z_1}^z dz' \cdot E^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_z^{z_2} dz' \cdot E^j(r'; z') \cdot G(r, z/r'; z') \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad z > z' \qquad \qquad \qquad z < z'
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

e, novamente, rearranjando a equação (2.4.9), com a substituição dos valores de  $G^j(r, z/r', z')$  dados por ( 2.3.23 ) tem-se

$$\begin{aligned}
0 \leq r \leq R_2 \\
-Z_1 \leq z \leq Z_1 \\
\phi^j(r, z) = \frac{2}{R_2^2 D^j} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^j} \cdot \left\{ \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z)] \right. \\
\int_{-Z_2}^z dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z')] \cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot H^j(r', z') + \\
+ \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z)] \cdot \int_z^{Z_2} dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z')] \cdot \\
\cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot H^j(r', z') + \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z)] \cdot \\
\cdot \int_{-Z_1}^z dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z')] \cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot E^j(r', z') + \\
+ \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 + z)] \cdot \int_z^{Z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (Z_2 - z')] \cdot \\
\left. \cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot E^j(r', z') \right\} \quad (2.4.10)
\end{aligned}$$

Lembrando-se novamente que

$$A_i^j = \sqrt{\gamma_i^2 + K^j z'}$$

$$F_i^j = J_1^2(\gamma_i \cdot R_2) \cdot A_i^j \cdot \sinh[A_i^j \cdot 2 \cdot Z_2]$$

$$H^j(r, z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\varepsilon^{jk}}{D^j} \cdot \phi^k(r, z)$$

$$E^j(r, z) = - \frac{(1 + \alpha^j)}{D^j} \cdot c(r, z) \cdot \frac{\sigma_{f.}^j}{\sum_{k=1}^N \sigma_{f.}^k \cdot \frac{\phi^k(r, z)}{\phi^j(r, z)}} + \frac{x^j}{D^j} \cdot v \cdot c(r, z)$$

Região III

$$\text{Região compreendida entre } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R_2 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \end{array} \right.$$

Outra vez, separando as integrais da solução (2.3.22), tendo como limites as coordenadas correspondentes às dimensões do caroço e refletor, respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq R_2 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \end{aligned} \phi^j(r, z) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot 2\pi + \int_{R_1}^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \\ 0 \qquad \qquad \qquad R_1 \end{array} \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ \begin{array}{l} \int_{-z_2}^{-z_1} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_{-z_1}^{z_1} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot \\ \cdot G^j(r, z/r', z') + \int_{z_1}^z dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \\ + \int_z^{z_2} dz' \cdot f^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \end{array} \right\} \quad (2.4.11)$$

Da mesma maneira como feito para a região I e II, com a substituição de  $f^j(r, z)$  dada pela equação (2.3.19), chega-se a

$$\begin{aligned}
0 \leq r \leq R_2 \\
z_1 \leq z \leq z_2 \\
\phi^j(r, z) = \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \left\{ \begin{array}{l} \int_{-z}^z dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') + \\ -z_2 \qquad \qquad \qquad z > z' \end{array} \right. \\
+ \left. \int_z^{z_2} dz' \cdot H^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \right\} + \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot 2\pi \cdot \\
\cdot \int_{-z_1}^{z_1} dz' \cdot E^j(r', z') \cdot G^j(r, z/r', z') \qquad (2.4.12) \\
\qquad \qquad \qquad z < z'
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição de  $G^j(r, z/r', z')$  dada pela equação (2.3.23), tem-se

$$\begin{aligned}
0 \leq r \leq R_2 \\
z_1 \leq z \leq z_2 \\
\phi^j(r, z) = \frac{2}{R_2^2 \cdot D^j} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^j} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sinh[A_i^j \cdot (z_2 - z)] \cdot \\ \int_{-z}^z dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (z_2 + z')] \cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot H^j(r', z') + \\ + \sinh[A_i^j \cdot (z_2 + z)] \cdot \int_z^{z_2} dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (z_2 - z')] \cdot \\ \cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot H^j(r', z') + \sinh[A_i^j \cdot (z_2 + z)] \cdot \\ \cdot \int_{-z_1}^{z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^j \cdot (z_2 - z')] \cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot E^j(r', z') \end{array} \right\} \\
\qquad \qquad \qquad (2.4.13)
\end{aligned}$$

Repetindo que

$$A_i^j = \sqrt{\gamma_i^2 + K^j{}^2}$$

$$F_i^j = J_1^2(\gamma_i, R_2) \cdot A_i^j \cdot \sinh[A_i^j \cdot 2 \cdot z_2]$$

$$H^j(r, z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\varepsilon^{jk}}{D^j} \cdot \phi^k(r, z)$$

$$E^j(r, z) = - \frac{(1+\alpha^j)}{D^j} \cdot c(r, z) \frac{\sigma_{Uf}^j}{\sum_{k=1}^N \sigma_{Uf}^k \cdot \frac{\phi^k(r, z)}{\phi^j(r, z)}} + \frac{x^j}{D^j} \cdot v \cdot c(r, z)$$

Nas expressões (2.4.6), (2.4.10) e (2.4.13), que estabelecem as soluções para as regiões I, II e III, respectivamente, a ordem das integrais foi invertida em relação à equação (2.3.22), que dá a solução geral. Essa inversão se faz necessária para simplificar o cálculo numérico, já que os limites das integrais em  $z'$  dependem da posição; o mesmo não acontece com os limites das integrais em  $r'$ . Tais integrais são resolvidas numericamente, enquanto que as soluções  $\phi^j(r, z)$  são determinadas por método iterativo.



### 3. EXEMPLO NUMÉRICO

#### 3.1 - Dados

Como exemplo numérico do método proposto, é resolvido um problema simples, com 2 grupos de energia, utilizando como dados os baseados no de um reator Triga (LMW - TRIGA REACTOR) / 13 /, onde não foi esquecida a consideração exigida pelo método, isto é, as propriedades de moderação e difusão são as mesmas tanto no refletor, quanto ao longo de todo o caroço.

Raio do caroço	$R_1$	22,00
Raio do reator	$R_2$	35,00
Semi altura do caroço	$Z_1$	19,00
Semi altura do reator	$Z_2$	36,00

Tabela 3.1 - Dimensões ( cm ) .

	Grupo 1		Grupo 2	
	D <sup>1</sup>	0,1279.10 <sup>1</sup>	D <sup>2</sup>	0,1374
Sec. Choque macroscópica absorção do H <sub>2</sub> O (cm <sup>-1</sup> )	X <sub>a</sub> <sup>1</sup>	0,4116.10 <sup>3</sup>	X <sub>a</sub> <sup>2</sup>	0,1888.10 <sup>1</sup>
Sec. Choque macroscópica remoção do H <sub>2</sub> O (cm <sup>-1</sup> )	X <sub>r</sub> <sup>1</sup>	0,4942.10 <sup>1</sup>	X <sub>r</sub> <sup>2</sup>	0,0
Sec. Choque microscópica captura do U-235 (barn)	X <sub>c</sub> <sup>1</sup>	-	X <sub>c</sub> <sup>2</sup>	0,6250.10 <sup>2</sup>
Sec. Choque microscópica fissão do U-235 (barn)	X <sub>f</sub> <sup>1</sup>	0,0	X <sub>f</sub> <sup>2</sup>	0,3630.10 <sup>3</sup>
Nº de médio de nêutrons emitidos por fissão	v <sup>1</sup>	0,2430.10 <sup>1</sup>	v <sup>2</sup>	0,2430.10 <sup>1</sup>
Fração de nêutrons de fissão por grupo	x <sup>1</sup>	1,0	x <sup>2</sup>	0,0

Tabela 3.2 - Constantes de grupo

X <sup>11</sup>	-	X <sup>21</sup>	0,4942.10 <sup>-1</sup>
X <sup>12</sup>	0,0	X <sup>22</sup>	-

Tabela 3.3 - Matriz transferência (cm<sup>-1</sup>)

(Raio do caroço)	N <sub>1</sub>	50
(Espessura do refletor lateral)	N <sub>2</sub>	25
(Semí altura do caroço)	M <sub>1</sub>	25
(Espessura dos refletores superior e inferior)	M <sub>2</sub>	25

Tabela 3.4 - Divisão das dimensões em intervalos.

Neste exemplo, a função distribuição de densidade de potência foi tomada como dependente apenas da altura  $z$ ,

$$c(r,z) = c_0 \cdot (1 - \epsilon \cdot z^2 / z_1^2) \quad (3.1.1)$$

normalizada com  $c_0 = 1$ .

Essa função distribuição de densidade de potência, pode ser qualquer, constituindo assim uma das vantagens deste método.

No apêndice é definido  $\gamma_i$ , tal que  $\gamma_i R_2$  seja a  $i$ -ésima raiz de função  $J_0$  de Bessel, isto é,

$$J_0(\gamma_i \cdot R_2) = 0$$

Os valores de  $\gamma_i \cdot R_2$ , como também os de  $J_1(\gamma_i \cdot R_2)$ , foram tirados do livro "Handbook of Mathematical Functions" / 1 / e são apresentados na tabela (3.5)

$i$	$\gamma_i \cdot R_2$	$J_1(\gamma_i \cdot R_2)$
1	2,40483	0,51915
2	5,52008	- 0,34026
3	8,65373	0,27145
4	11,79153	- 0,23246
5	14,93092	0,20655
6	18,07106	- 0,18773
7	21,21164	0,17327
8	24,35247	- 0,16170
9	27,49348	0,15218
10	30,63461	- 0,14417
11	33,77582	0,13730
12	36,91710	- 0,13132
13	40,05843	0,12607
14	43,19979	- 0,12140
15	46,34119	0,11721
16	49,48261	- 0,11343
17	52,62405	0,10999
18	55,76551	- 0,10685
19	58,90698	0,10396
20	62,04847	- 0,10129

Tabela 3.5 -

### 3.2 - Preparação das Equações

Pelas expressões (2.4.6), (2.4.10) e (2.4.13), utilizando os dados tabelados na secção (3.1) obtêm-se

uma forma simplificada das equações para 2 grupos de energia.

### Grupo 1

#### Região I

$$0 \leq r \leq R_2$$

$$\phi^1(r, z) = B_1^1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^1} \cdot \sinh[A_i^1 \cdot (z_2 + z)]$$

$$-z_2 \leq z \leq -z_1$$

$$\int_{-z_1}^{z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^1 \cdot (z_2 - z')] \cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot c(r', z') \quad (3.2.1)$$

#### Região II

$$0 \leq r \leq R_2$$

$$\phi^1(r, z) = B_1^1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^1} \cdot \left\{ \sinh[A_i^1 \cdot (z_2 - z)] \cdot \right.$$

$$\left. -z_1 \leq z \leq z_1 \right.$$

$$\cdot \int_{-z_1}^z dz' \cdot \sinh[A_i^1 \cdot (z_2 + z')] \cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot c(r', z') +$$

$$+ \sinh[A_i^1 \cdot (z_2 + z)] \cdot \int_z^{z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^1 \cdot (z_2 - z')] \cdot$$

$$\left. \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot c(r', z') \right\} \quad (3.2.2)$$

Região III

$$0 \leq r \leq R_2$$

$$\phi^1(r, z) = B^1 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^1} \cdot \sinh[A_i^1 \cdot (Z_2 - z)]$$

$$Z_1 \leq z \leq Z_2$$

$$\cdot \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^1 \cdot (Z_2 + z')] \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot c(r', z') \quad (3.2.3)$$

onde

$$B^1 = \frac{2v}{R_2^2 \cdot D^1{}^2}$$

Grupo 2Região I

$$0 \leq r \leq R_2$$

$$\phi^2(r, z) = B^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^2} \cdot \left\{ \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z)] \right.$$

$$\left. - Z_2 \leq z \leq -Z_1 \right.$$

$$\cdot \int_{-Z_2}^Z dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z')] \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot \xi^2 \cdot \phi^1(r', z') +$$

$$+ \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z)] \cdot \int_z^{Z_2} dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z')] \cdot$$

$$\cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot \xi^2 \cdot \phi^1(r', z') - (1 + \alpha^2) \cdot$$

$$\cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z)] \cdot \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z')] \cdot$$

$$\cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot c(r', z') \quad \left. \right\} \quad (3.2.4)$$

Região II

$$\begin{aligned}
& 0 \leq r \leq R_2 \\
& -Z_1 \leq z \leq Z_1 \\
\phi^2(r, z) = B^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^2} & \left\{ \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z)] \cdot \right. \\
& \int_{-Z_2}^z dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z')] \cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot \Sigma^{21} \cdot \phi^1(r', z') + \\
& + \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z)] \cdot \int_z^{Z_2} dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z')] \cdot \\
& \cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot \Sigma^{21} \cdot \phi^1(r', z') - (1 + \alpha^2) \cdot \\
& \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z)] \cdot \int_{-Z_1}^z dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z')] \cdot \\
& \cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot c(r', z') + (1 + \alpha^2) \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z)] \cdot \\
& \cdot \left. \int_z^{Z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z')] \cdot \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot c(r', z') \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Região III

$$\begin{aligned}
& 0 \leq r \leq R_2 \\
& Z_1 \leq z \leq Z_2 \\
\phi^2(r, z) = B^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{F_i^2} \cdot & \left\{ \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z)] \cdot \right. \\
& \cdot \int_{-Z_2}^z dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z')] \cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot \Sigma^{21} \cdot \phi^1(r', z') + \\
& + \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z)] \cdot \int_z^{Z_2} dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z')] \cdot \\
& \cdot \int_0^{R_2} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot \Sigma^{21} \cdot \phi^1(r', z') - (1 + \alpha^2) \cdot \\
& \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 - z)] \cdot \int_{-Z_1}^{Z_1} dz' \cdot \sinh[A_i^2 \cdot (Z_2 + z')] \cdot \\
& \cdot \left. \int_0^{R_1} dr' \cdot r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot c(r', z') \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

onde,

$$B^2 = \frac{2}{R^2 \cdot D^2}$$

As soluções numéricas das equações (3.2.1) , (3.2.2) , (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) e (3.2.6), foram obtidas usando o computador IBM 370/155 do Instituto de Energia Atômica. O cálculo foi feito em simples precisão.

Para resolver numericamente as integrais envolvidas nos cálculos de  $\phi^1(r,z)$  e  $\phi^2(r,z)$ , foi utilizada a subrotina QSF, pertencente ao SSP/360 da IBM /9. /.

Para o cálculo de  $J_0(\gamma_1 \cdot r)$ , foi usada a subrotina BESJ, também pertencente ao SSP/360 .

### 3.3 - Resultados

A necessidade de se calcular as integrais das equações (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) e (3.2.6) por processo numérico utilizando a subrotina QSF escolhida para este exemplo , impõe que se divida tanto a dimensão z como r em vários intervalos. Evidentemente, quanto maior o número de intervalos , mais aproximados dos valores corretos, estarão os cálculos.



Especial cuidado exige o cálculo das integrais  $\int_0^{R_1} r' J_0(\gamma_i \cdot r') c(r', z')$  e  $\int_0^{R_2} r' J_0(\gamma_i \cdot r') E^{21} \cdot \phi^1(r', z')$ . Os argumentos dessas integrais, oscilam fortemente para valores grandes de  $i$ . O responsável por essa oscilação é o termo  $[r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r')]$ , enquanto que,  $c(r', z')$  e  $E^{21} \cdot \phi^1(r', z')$ , por serem neste caso funções bem comportadas, produzem apenas uma modulação no integrando. Na figura (3.1), é mostrada a função  $[r' \cdot J_0(\gamma_i \cdot r')]$ , para  $i = 20$ .

Essa oscilação exige um número de intervalos suficientemente grande para que o resultado da integral não - divirja muito do valor exato.

Para o exemplo apresentado neste trabalho, foi escolhido um número de intervalos indicado na tabela (3.4), que pareceu razoável.

Como foi dito em seções anteriores, a condição de criticalidade é estabelecida através de uma distribuição de densidade de potência. Neste exemplo foi escolhida uma distribuição dependente apenas da altura do reator.

$$c(r, z) = c_0 (1 - \epsilon \frac{z^2}{z_1^2}) \text{ com } c_0 \text{ normalizado a } c_0 = 1 .$$

Essa escolha, impõe ao caroço, uma distribuição de densidade de potência constante ao longo do raio  $r$ , mas

variando com o eixo  $z$  da maneira indicada na figura (3.2).

O comportamento tanto do fluxo  $\phi^1(r,z)$  como  $\phi^2(r,z)$  ao longo da dimensão  $r$ , quando fixada uma certa posição  $z$ , é determinado por uma série de funções  $J_0(\gamma_i \cdot r)$ , com  $i$  variando de 1 a  $M$ , com  $M \rightarrow \infty$ . Para um só termo dessa série ( $M=1$ ), o fluxo  $\phi^2(r,z)$  se apresenta sem o pico de nêutrons no refletor próximo à interface, característica dos fluxos térmicos. Aumentando o número de termos da série esse pico vai se acentuando gradativamente até estabilizar-se. Da mesma maneira, a oscilação que aparece no fluxo, vai diminuindo sua amplitude até tornar-se desprezível. Para este exemplo numérico, uma série com 20 termos forneceu uma boa convergência, como pode ser verificado pela figura (3.4) onde são apresentados os fluxos  $\phi^2(r,z)$  calculados com diversos valores de  $M$ .

Já para os fluxos do grupo 1,  $\phi^1(r,z)$ , a convergência se dá de uma forma muito mais rápida, sendo que para séries com mais de 13 termos ( $M > 13$ ), as curvas de  $\phi^1(r,z)$  se confundem. (Figura 3.3).

Utilizando a série com 20 termos, foram feitos cálculos dos fluxos para diversos valores de  $\epsilon$ . Para  $\epsilon=0,0$ ;  $\epsilon=0,1$ ;  $\epsilon=0,2$ , foi verificado que nas regiões de depressão do fluxo  $\phi^2(r,z)$  antes da interface devido ao refletor,  $\phi^2(r,z)$  atinge valores negativos. Isso significa

que para um reator com as dimensões e características adotadas no exemplo, não é possível uma distribuição de densidade de potência constante ( $\epsilon=0,0$ ) ou ainda para  $\epsilon=0,1$  e  $\epsilon=0,2$  ( Fig. 3.5 )

Finalmente a distribuição de combustível foi calculada através da equação (3.3.1) para diversos  $\epsilon$  .

$$N(r,z) = \frac{c(r,z)}{\sigma_{f}^2 \cdot \phi^2(r,z)} = \frac{c_0 (1 - \epsilon \cdot z^2 / Z_1^2)}{\sigma_{f}^2 \cdot \phi^2(r,z)} \quad (3.3.1)$$

cujos resultados são apresentados pelas figuras ( 3.9 ) e (3.10) .

Outros resultados são apresentados nas figuras (3.6) , (3.7) e (3.8).

#### 4. CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Apesar do problema simples escolhido como exemplo para este trabalho, as equações desenvolvidas no método aqui proposto são gerais, desde que respeitadas as condições de igualdade entre as propriedades de difusão e moderação, tanto no refletor como ao longo de todo o caroço.

O procedimento a ser seguido para outros casos é, essencialmente, o utilizado para resolver o problema numérico proposto. Os mesmos cuidados adotados no exemplo deste trabalho, quanto à escolha do número de termos da série de funções  $[J_0(\gamma_i \cdot r)]$  suficientes para a convergência do fluxo e, do número de intervalos para o cálculo das integrais, devem ser tomados para a resolução de problemas posteriores. Igual cuidado deve ser considerado quanto à validade da função distribuição de densidade de potência imposta ao problema, a fim de evitar ocorrências, por exemplo, de valores negativos do fluxo, que conquanto satisfaçam matematicamente as equações estabelecidas, carecem de sentido físico.

A grande vantagem deste método, é a possibilidade de se calcular a concentração de combustível, quando -

fixadas as dimensões de um reator nuclear, obedecendo a uma distribuição de densidade de potência previamente estabelecida, muitas vezes necessária e desejada para um bom desempenho termodinâmico desse reator. Além disso, o equacionamento matemático envolvido pelo método é relativamente simples e fácil, quando comparado com os de outros métodos, que se tornam complicados e tediosos, ao tentarem resolver problemas com um reator cilíndrico, homogêneo, finito e totalmente refletido.

O método aqui proposto peca, por sua vez, pela necessidade se impor as mesmas propriedades de difusão e moderação tanto ao longo de todo o caroço, independentemente da concentração de combustível, como no refletor. Claro está que, quanto mais diluído for o combustível no caroço, mais próximo estará esse reator dentro das condições exigidas pelo método.

Outra desvantagem encontrada neste, é a dependência do cálculo das integrais quanto ao número de intervalos com que são divididos o raio e a altura do reator e também, a necessidade de um elevado número de termos da série de funções  $[J_0(\gamma_i \cdot r)]$  para a desejada convergência.

Por conclusão final tem-se que, a consideração

de que as propriedades de difusão e moderação são iguais tanto no caroço como no refletor e, o uso das transformadas de Hankel na determinação da função de Green, permitem a solução da equação de difusão de nêutrons para um reator cilíndrico, homogêneo, finito e totalmente refletido, pelo método da função de Green.

A determinação da solução para tal reator, era considerada por Kobayashi / 10 /, impraticável pelo método da função de Green.

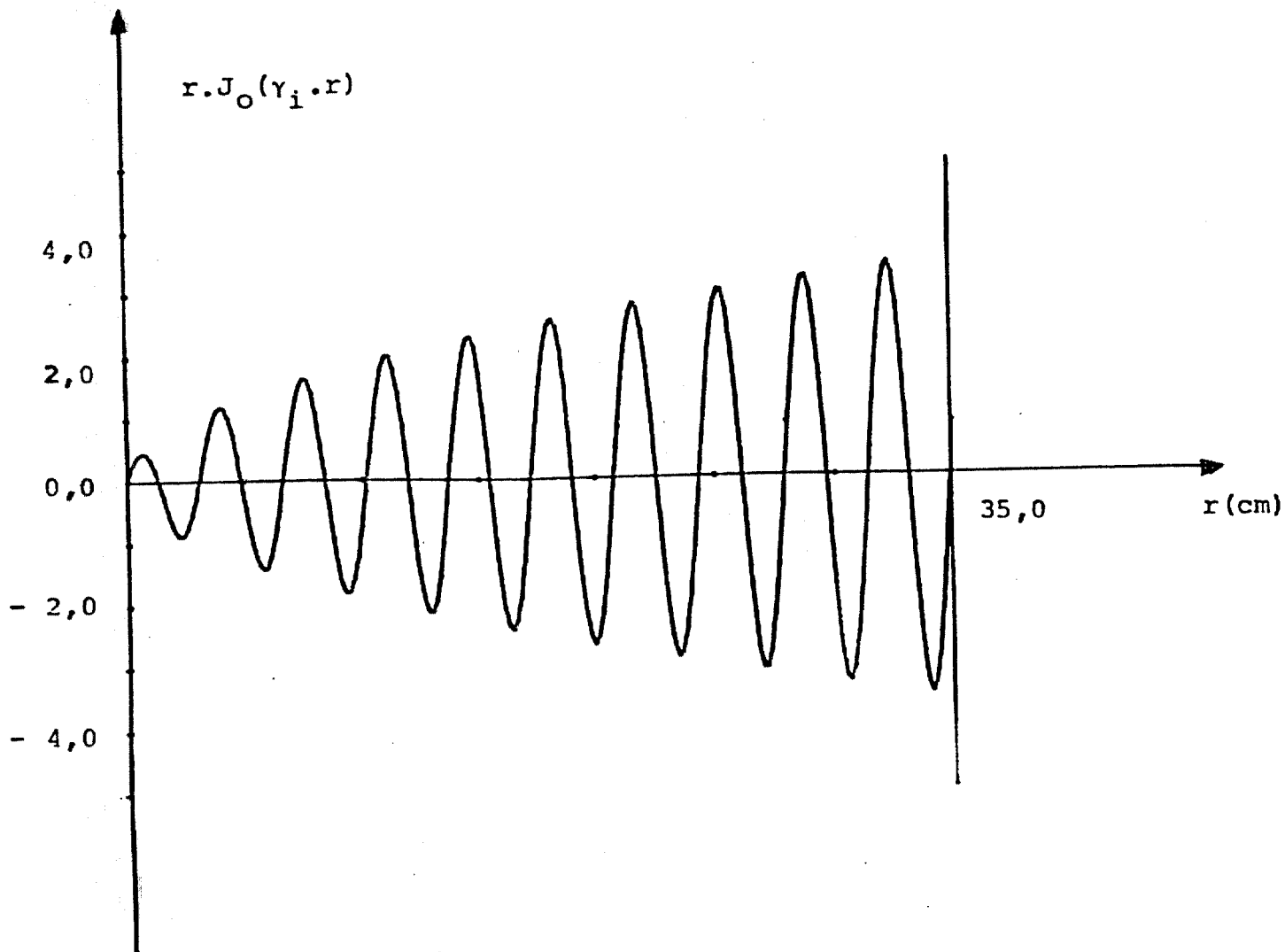


Fig. 3.1 -  $r \cdot J_0(\gamma_1 \cdot r)$  para  $i = 20$

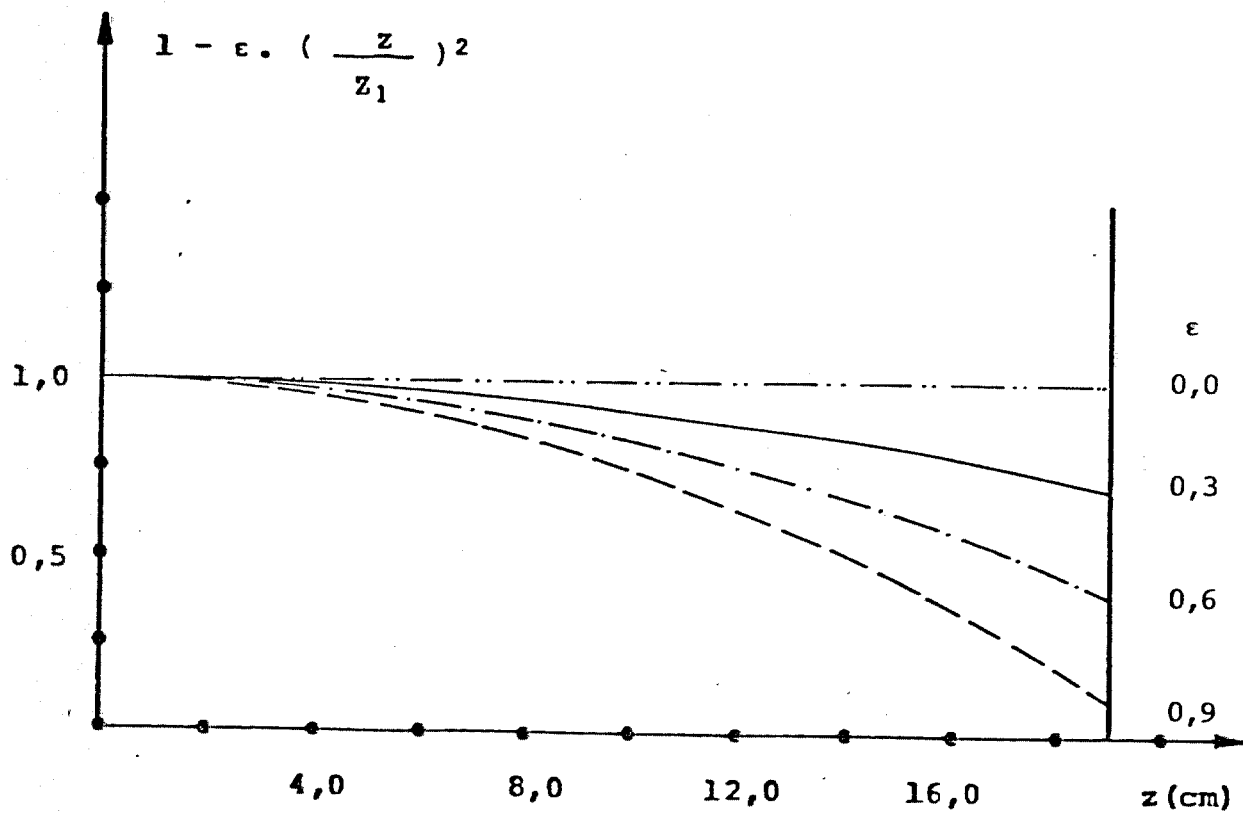


Fig. 3.2 - Distribuição de Densidade de Potência

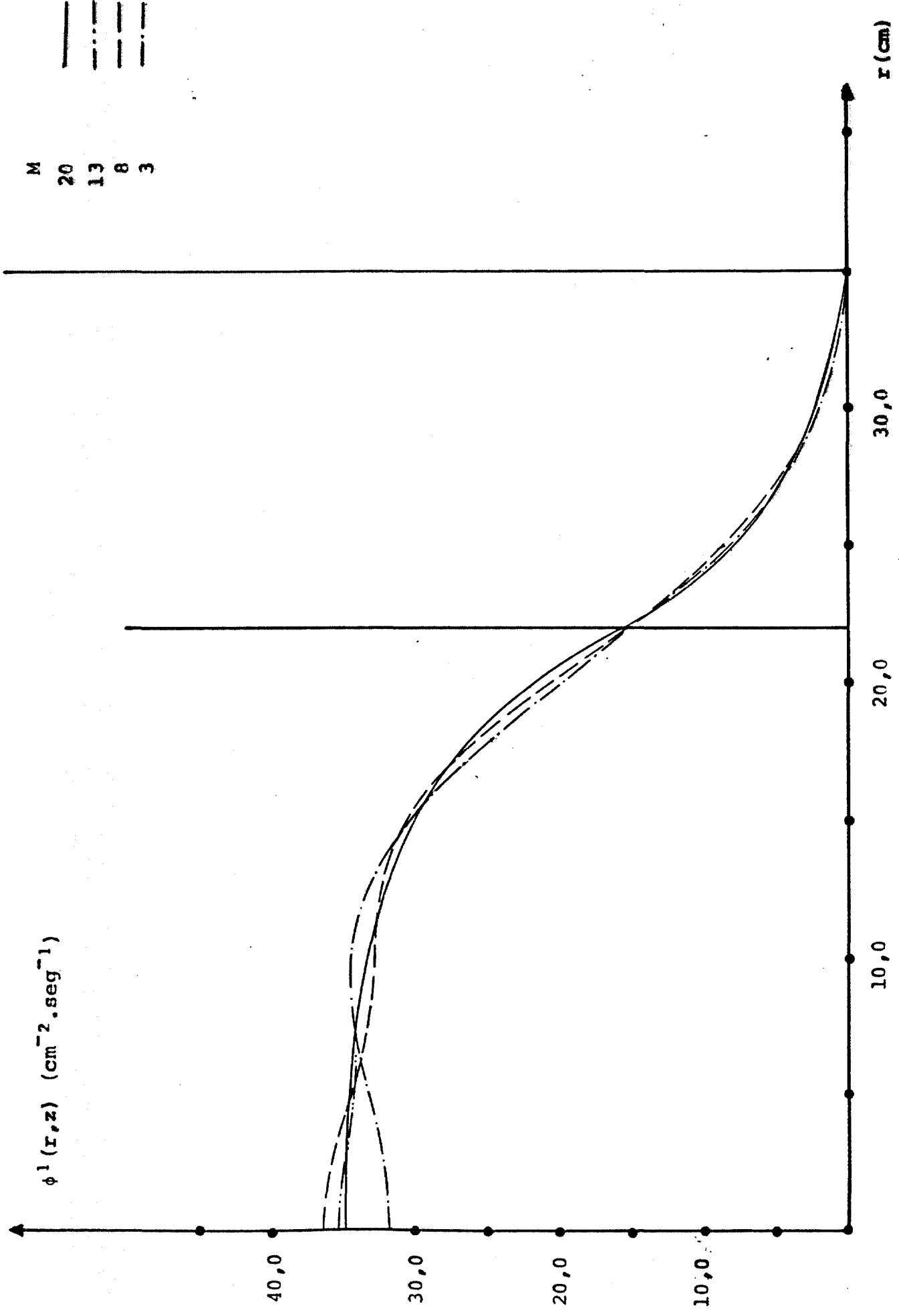


Fig. 3.3 -  $\phi^1(r,z)$  ( $z=0,0$  cm) para diversos valores de M -  $\epsilon = 0,3$



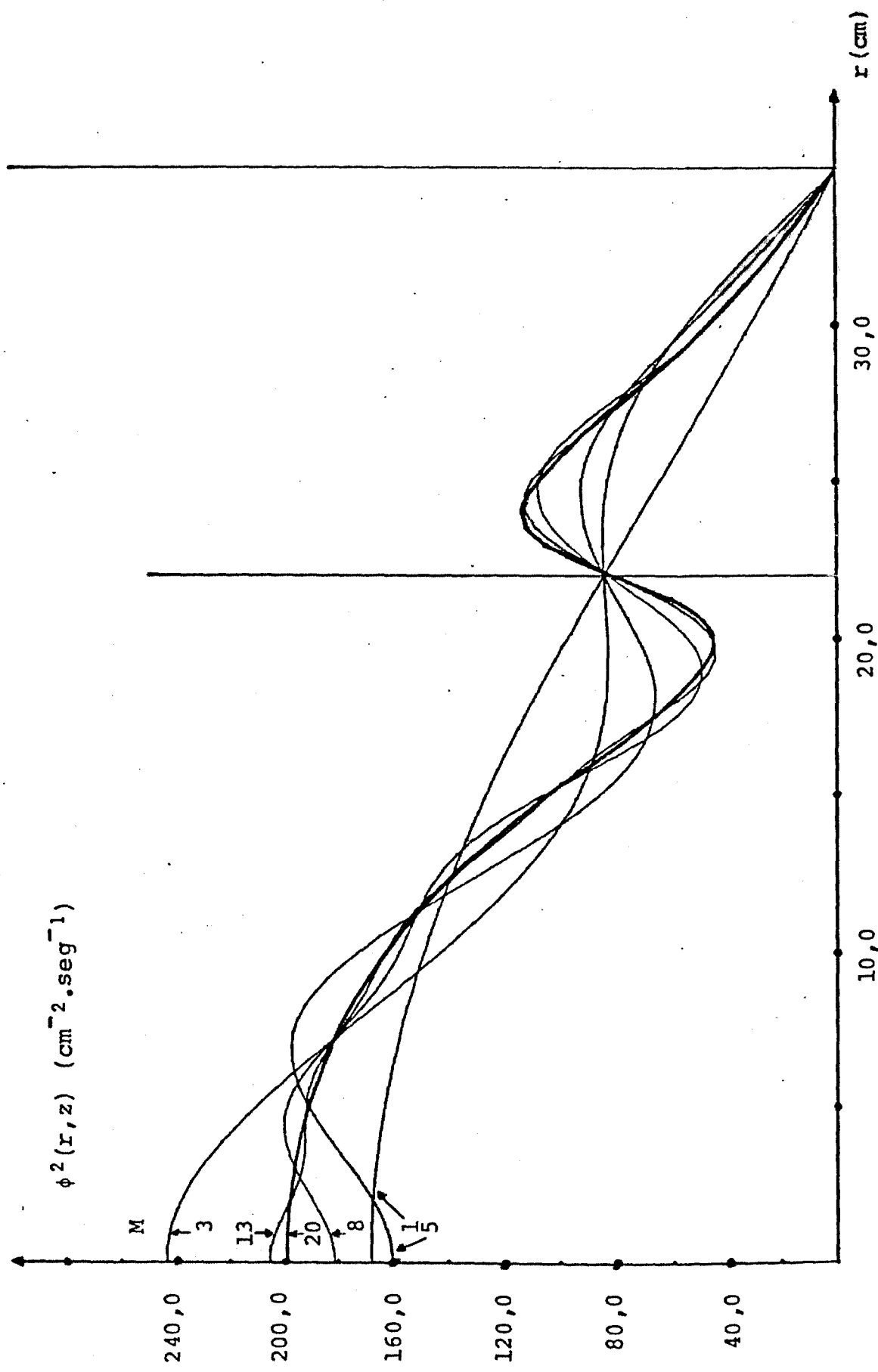


FIG. 3.4 -  $\phi^2(r, z)$  ( $z = 0,0$  cm) para diversos valores de  $M$  -  $\epsilon = 0,3$

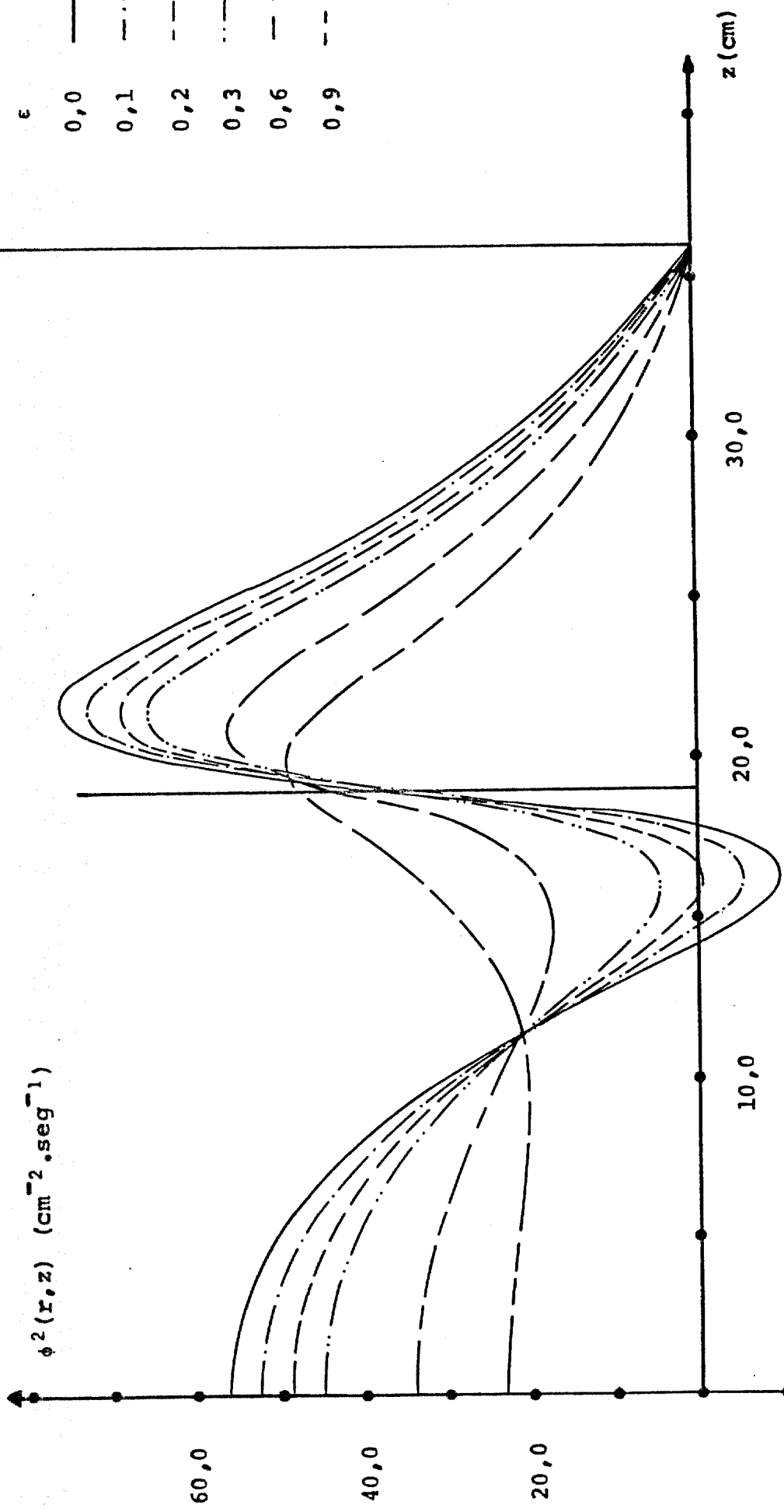


Fig. 3.5 -  $\phi^2(r,z)$  ( $r = 19,8$  cm) para diversos valores de  $\epsilon$

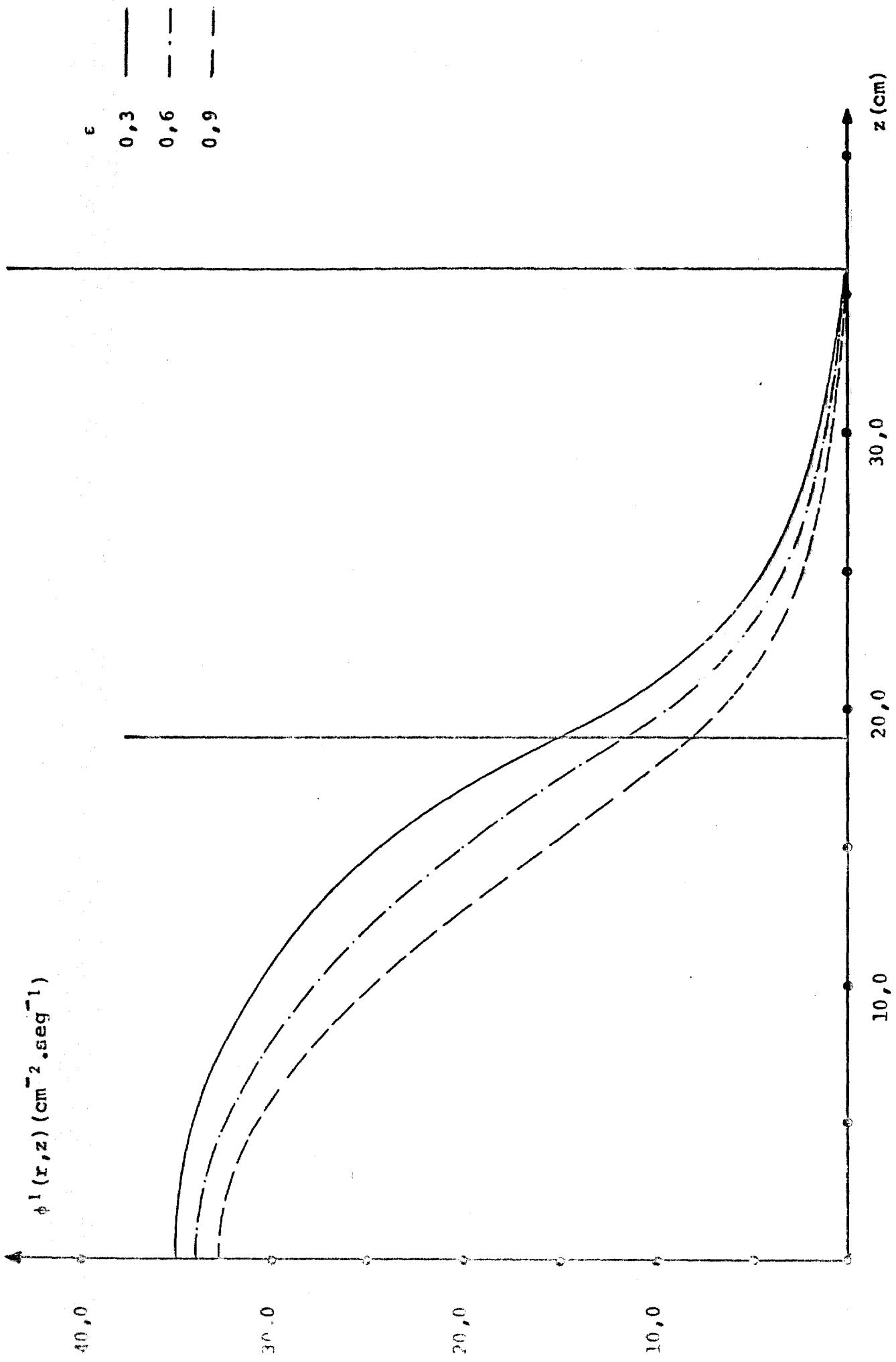


Fig. 3.6 -  $\phi^1(r,z)$  ( $r = 0,0$  cm) para diversos valores de  $\epsilon$

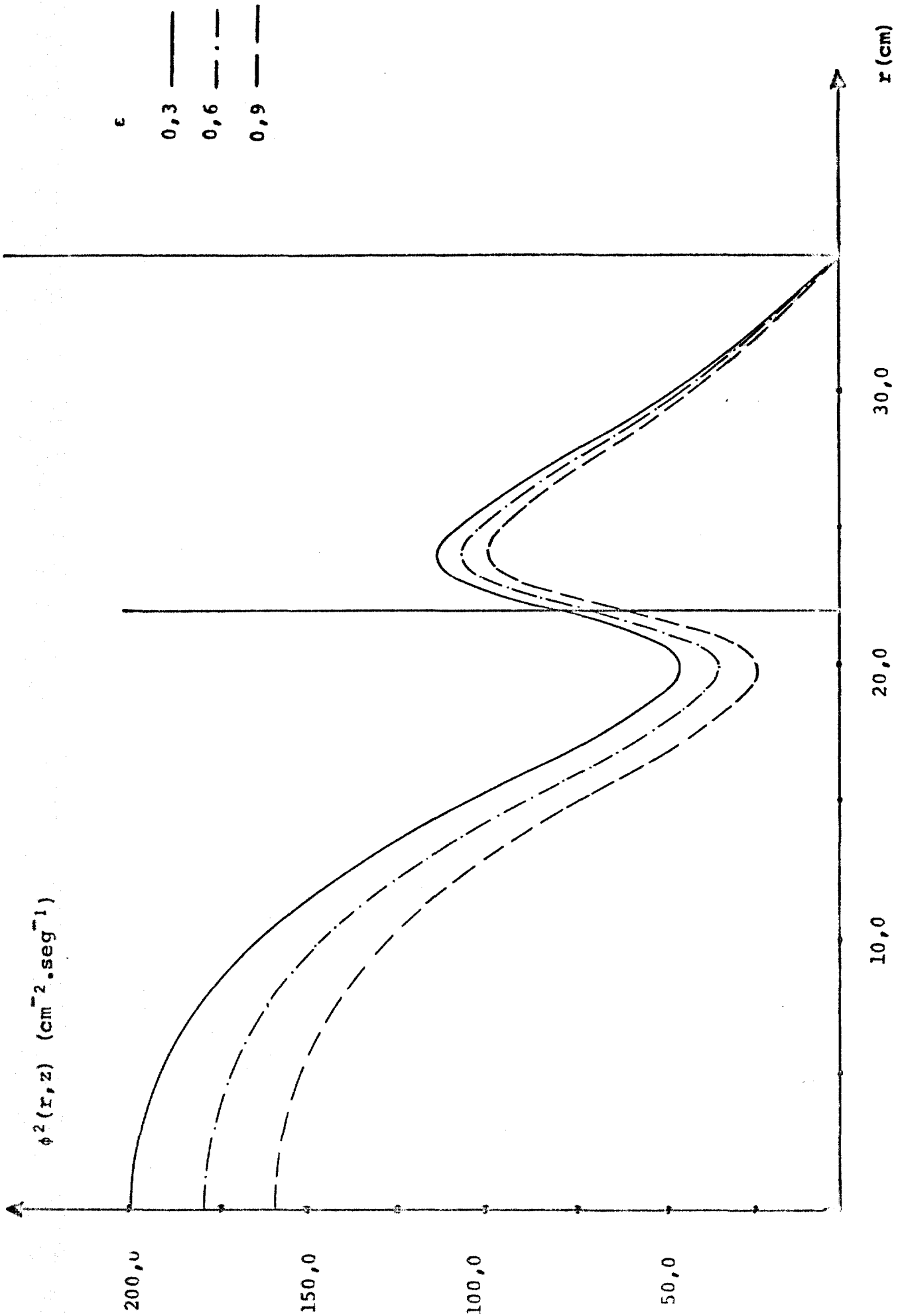


Fig. 3 -  $\phi^2(r, z)$  vs  $r$  for  $z = 0$  cm. The curves correspond to the values of  $\epsilon$  indicated in the legend.

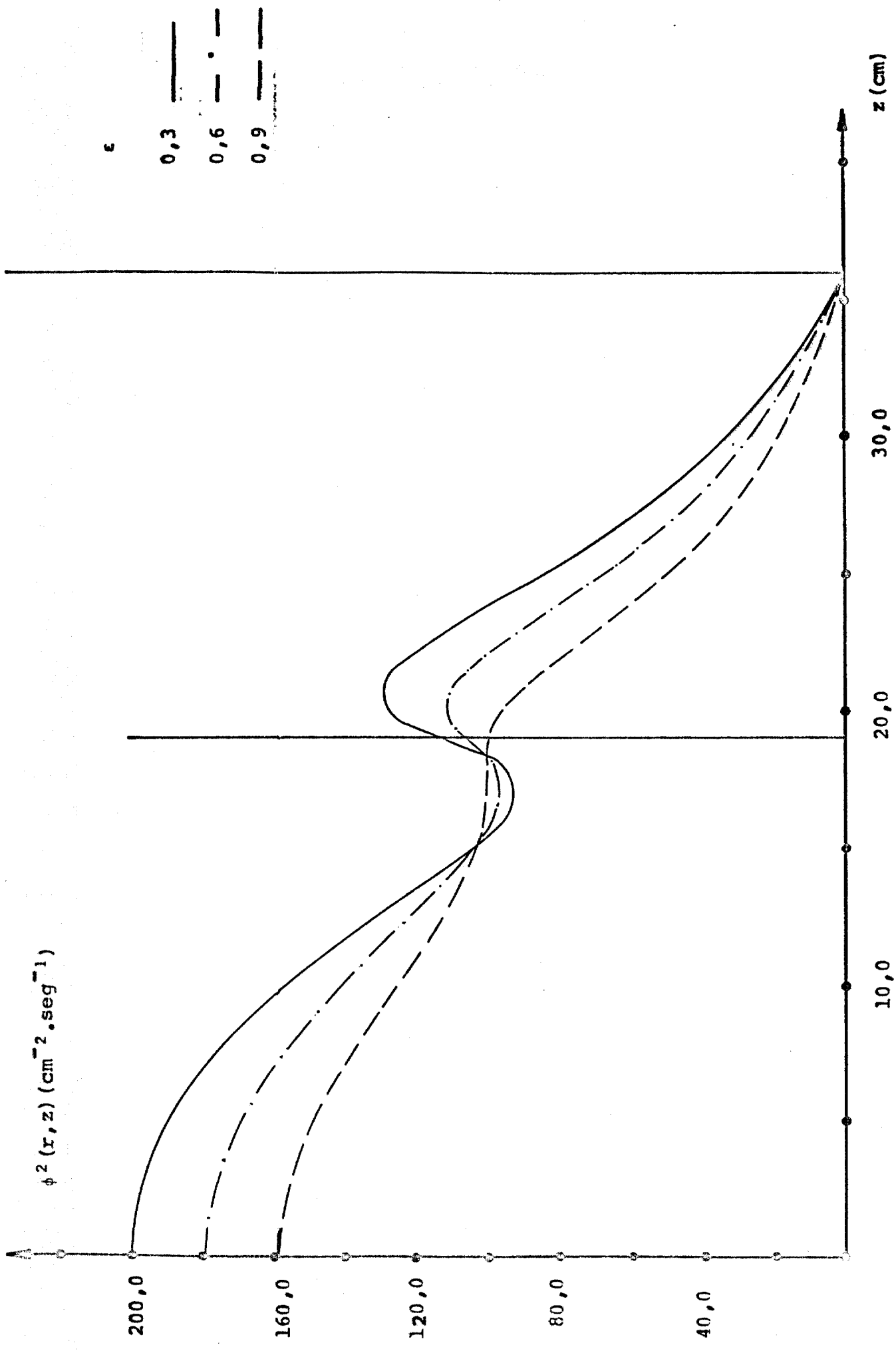


Fig. 3.  $\phi^2(x, z)$  vs  $z$  for  $x = 0$  cm for different values of  $\epsilon$ .

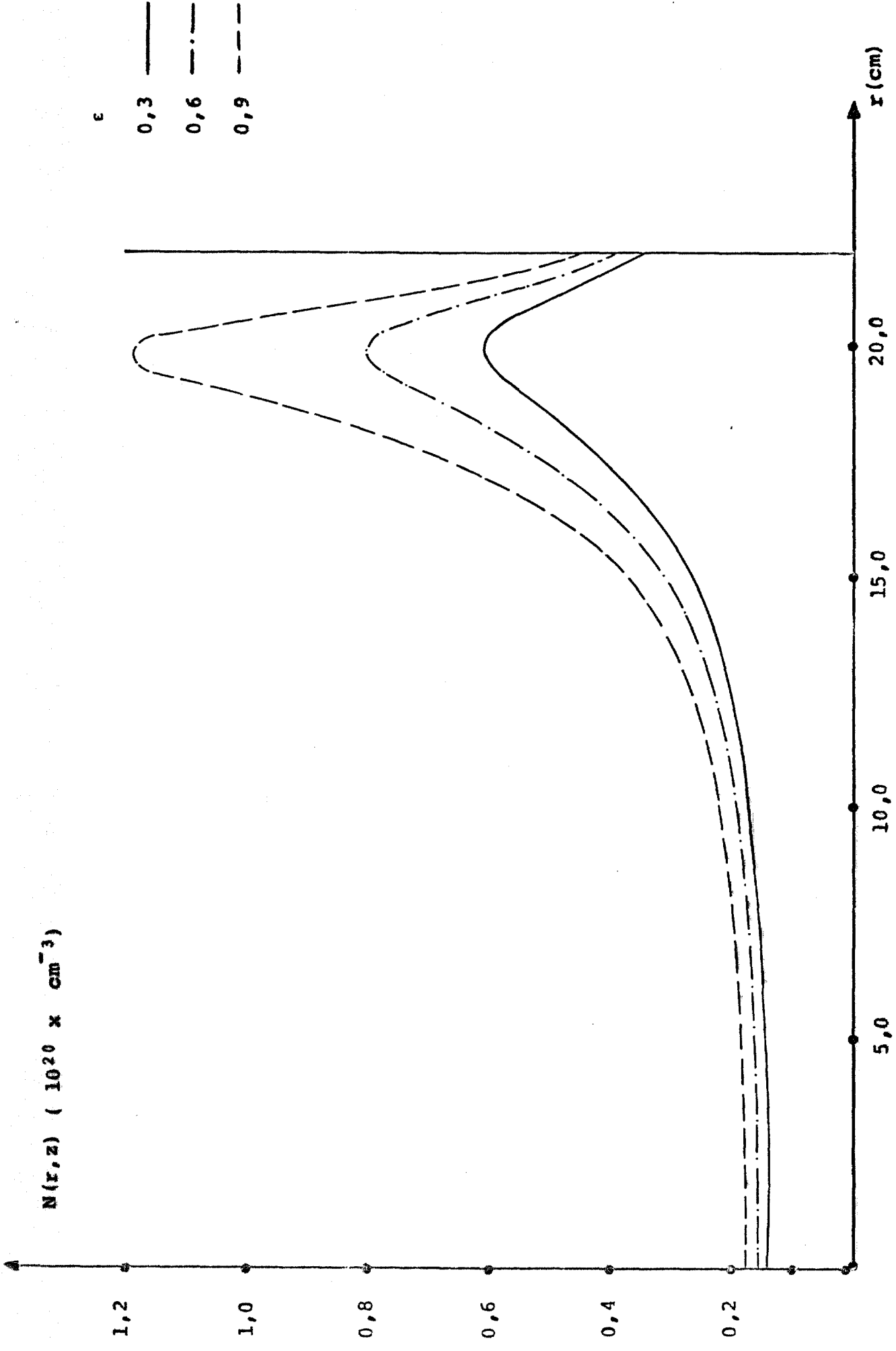


Fig. 3.9 - Distribuição de Combustível.  $N(r, z)$  ( $z = 0,0$  cm) para diversos valores de  $\epsilon$

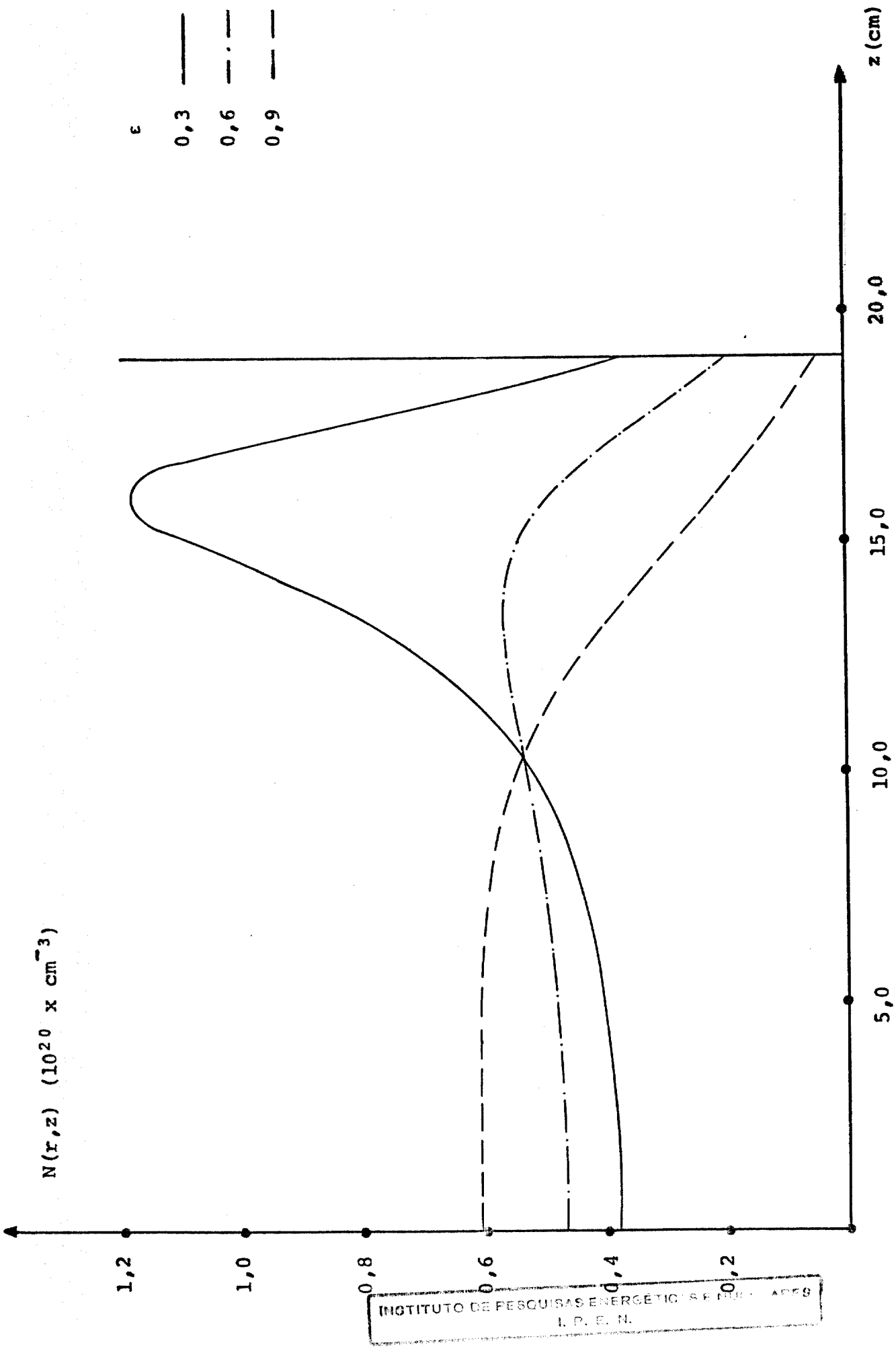


Fig. 3.10 - Distribuição de Combustível.  $N(r,z)$  ( $r = 17,16 \text{ cm}$ ) para diversos valores de  $\epsilon$

## APÊNDICE

Neste apêndice é apresentada a determinação da função de Green para o caso de coordenadas cilíndricas, com simetria axial.

Suponha uma equação diferencial unidimensional do tipo

$$L [\phi(r)] + f(r) = 0 \quad (\text{A.1})$$

com  $r$  definido no intervalo  $a \leq r \leq b$  e com condições de contorno homogêneas, isto é,

$$\phi(a) = \phi(b) = 0$$

onde  $L$  é um operador definido por

$$L = \frac{d}{dr} p(r) \cdot \frac{d}{dr} + q(r)$$

ou seja, a equação (A.1) é da forma

$$\frac{d}{dr} p(r) \cdot \frac{d}{dr} \phi(r) + q(r) \cdot \phi(r) + f(r) = 0 \quad (\text{A.2})$$

A solução da equação (A.2) / 7 /, / 8 /, / 15 /, / 20 / pode ser dada por

$$\phi(r) = \int_a^b G(r, r') \cdot f(r') \cdot dr' \quad (\text{A.3})$$



onde  $G(r, r')$  é a função de Green expressa por

$$G(r, r') = \begin{cases} G_1(r) & r < r' \\ G_2(r) & r > r' \end{cases}$$

e possui as propriedades / 7 / :

A.a - A função  $G(r, r')$  satisfaz a equação homogênea

$$L[G(r, r')] = 0 \quad (\text{para } r \neq r'), \text{ ou melhor,}$$

$$L[G_1(r)] = 0 \quad \text{e} \quad L[G_2(r)] = 0$$

em seus intervalos de definição.

A.b - A função  $G(r, r')$  satisfaz as condições de contorno homogêneas (nos pontos  $a$  e  $b$ ), isto é,

$$G_1(a) = G_2(b) = 0$$

A.c - A função  $G(r, r')$  é contínua em  $r = r'$ , isto é ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_1(r' - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_2(r' + \epsilon)$$

A.d - Há uma descontinuidade na derivada primeira de  $G(r, r')$  no ponto  $r = r'$ , de magnitude  $-\frac{1}{p(r')}$ , isto é ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_2'(r) \Big|_{r=r'+\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_1'(r) \Big|_{r=r'-\epsilon} = -\frac{1}{p(r')}$$

A aplicação dessas propriedades permite uma de terminação fácil e rápida da função de Green  $G(r, r')$ .

A partir da propriedade (A.a) tem-se

$$\frac{d}{dr} p(r) \cdot \frac{d}{dr} G(r,r') + q(r) \cdot G(r,r') + \delta(r-r') = 0 \quad (\text{A.4})$$

onde  $\delta(r-r')$  é o delta de Dirac.

No caso particular em que

$$q(r) = q = \text{constante}$$

e

$$p(r) = p = \text{constante}$$

a equação (A.4) pode ser expressa como

$$\frac{d^2}{dr^2} G(r,r') + Q \cdot G(r,r') + \frac{\delta(r-r')}{p} = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde

$$Q = \frac{q}{p}$$

A descontinuidade na derivada primeira de  $G(r,r')$  torna-se  $-\frac{1}{p}$  (dada pelo último termo da equação (A.5)).

Uma observação importante, quanto à generalização dessa descontinuidade, deve ser ressaltada.

Suponha uma função  $G^*(r,r')$  normalizada a

$$G(r,r') = A \cdot G^*(r,r') \quad (\text{A.6})$$

Substituindo a expressão (A.6) na equação (A.5) chega-se a

$$\frac{d^2}{dr^2} G^*(r,r') + Q \cdot G^*(r,r') + \frac{\delta(r-r')}{A \cdot p} = 0 \quad (A.7)$$

Note que agora, a descontinuidade da derivada primeira de  $G^*(r,r')$ , propriedade (A.d), torna-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_2^{*'}(r) \Big|_{r=r'+\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_1^{*'}(r) \Big|_{r=r'-\epsilon} = - \frac{1}{A \cdot p} \quad (A.8)$$

Portanto, a partir da equação (A.4), com a aplicação das propriedades, a função de Green é facilmente determinada.

Para problemas em duas dimensões, não são definidas propriedades semelhantes às (A.a), (A.b), (A.c), (A.d), que fornecem a função de Green para o caso unidimensional. No entanto, essa dificuldade pode ser removida se, através da aplicação de algum tipo de transformadas integrais, for o problema reduzido a uma só dimensão.

No caso de geometria cilíndrica, com simetria axial, um modelo é proposto para a determinação da função de Green.

Dada a equação diferencial:

- I - Reduzir a dimensionalidade, removendo uma coordenada (r ou z) com a ajuda de algum tipo de transformadas integrais, resultando numa equação diferencial ordinária.
- II - Resolver a equação achado em (I)
- III- Na solução encontrada em (II) , aplicar a transformada inversa, para a determinação da função de Green direta.

No caso deste trabalho, foi removida a coordenada r, através da aplicação da transformada de Hankel/2/.

Pela figura ( 2.1 ), desprezando-se a divisão do reator em 3 regiões, temos pela equação (2.3.17)

$$\nabla^2 \phi^j(r, z) - K^j{}^2 \cdot \phi^j(r, z) + f^j(r, z) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Eliminando o índice j, já que este somente indica o grupo de energia considerado, não modificando em nada as equações na dedução da função de Green, tem-se para a geometria (r, z)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, z) - K^2 \cdot \phi(r, z) + f(r, z) = 0 \quad (\text{A.10})$$

com r definido em  $0 \leq r \leq R_2$

Para a determinação da função de Green considere,

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z') + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(r, z/r', z') - K^2 \cdot G(r, z/r', z') + \frac{\delta(r-r') \cdot \delta(z-z')}{2 \cdot \pi \cdot D \cdot r} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Define-se transformada de Hankel finita como:

$$V(\gamma_i) = \int_0^{R_2} dr \cdot r \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot V(r) \quad (\text{A.12})$$

onde  $\gamma_i$  é tal que

$$J_0(\gamma_i \cdot R_2) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots$$

e, o operador transformada  $L$  como

$$L = \int_0^{R_2} dr \cdot r \cdot J_0(\gamma_i \cdot r)$$

Aplicando-se o operador  $L$  na equação (A.11)

tem-se

$$L \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z) \right] + L \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(r, z/r', z') \right] - L \left[ K^2 \cdot G(r, z/r', z') \right] + L \left[ \frac{\delta(r-r') \cdot \delta(z-z')}{2 \cdot \pi \cdot D \cdot r} \right] = 0 \quad (\text{A.13})$$

ou

$$R + S - T + U = 0 \quad (\text{A.13.a})$$

onde,

$$R = L \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \cdot \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z') \right] \quad (\text{A.14})$$

$$S = L \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(r, z/r', z') \right] \quad (\text{A.15})$$

$$T = L \left[ K^2 \cdot G(r, z/r', z') \right] \quad (\text{A.16})$$

$$U = L \left[ \frac{\delta(r-r') \cdot \delta(z-z')}{2 \cdot \pi \cdot D \cdot r} \right] \quad (\text{A.17})$$

O termo R, expressão (A.14), é dado por:

$$R = \int_0^{R_2} dr \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \cdot \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z') \quad (\text{A.18})$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial r} r \cdot \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z') = \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z') + r \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r, z/r', z')$$

portanto,

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{R_2} dr \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z') + \\ &+ \int_0^{R_2} dr \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot r \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r, z/r', z') \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Aplicando o método de integração por partes, tem-se na primeira integral de expressão (A.19),

$$\int_0^{R_2} dr \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot \frac{\partial}{\partial r} G(r, z/r', z') = - \int_0^{R_2} dr \cdot G(r, z/r', z') \cdot \frac{\partial}{\partial r} J_0(\gamma_i \cdot r) \quad (\text{A.20})$$

e na segunda integral da expressão (A.19)

$$\int_0^{R_2} dr \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot r \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r, z/r', z') = \int_0^{R_2} dr \cdot G(r, z/r', z') \cdot \frac{d^2}{dr^2} [r \cdot J_0(\gamma_i \cdot r)] \quad (\text{A.21})$$

Com isso, a expressão (A.15) pode ser escrita como

$$R = \int_0^{R_2} dr \cdot G(r, z/r', z') \cdot \frac{d^2}{dr^2} [r \cdot J_0(\gamma_i \cdot r)] - \int_0^{R_2} dr \cdot G(r, z/r', z') \cdot \frac{d}{dr} J_0(\gamma_i \cdot r) \quad (\text{A.22})$$

Reagrupando as integrais e notando que

$$\frac{d^2}{dr^2} [r \cdot J_0(\gamma_i \cdot r)] = \gamma_i^2 \cdot r \cdot J_0''(\gamma_i \cdot r) + 2 \cdot \gamma_i \cdot J_0'(\gamma_i \cdot r)$$

e que

$$\frac{d}{dr} J_0(\gamma_i \cdot r) = -\gamma_i \cdot J_0'(\gamma_i \cdot r)$$

tem-se

$$R = \int_0^{R_2} dr \cdot G(r, z/r', z') \cdot \gamma_i^2 \cdot r \cdot [J_0''(\gamma_i \cdot r) + \frac{1}{\gamma_i \cdot r} \cdot J_0'(\gamma_i \cdot r)] \quad (\text{A.23})$$

Mas

$$J_0''(\gamma_i \cdot r) + \frac{1}{\gamma_i \cdot r} \cdot J_0'(\gamma_i \cdot r) = -J_0(\gamma_i \cdot r)$$

é chamado de equação de Bessel e tem como solução

$$J_0(\gamma_i \cdot r)$$

Com isso a expressão (A.23) torna-se

$$R = -\gamma_i^2 \int_0^{R_2} G(r, z/r', z') \cdot r \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \quad (A.24)$$

E, pela definição da transformada de Hankel, equação (A.12), chega-se a:

$$R = -\gamma_i^2 \cdot \bar{G}(\gamma_i, z/r', z') \quad (A.25)$$

O termo S, expressão (A.15), dado por

$$S = \frac{d^2}{dz^2} \int_0^{R_2} dr \cdot r \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot G(r, z/r', z') \quad (A.26)$$

Pela definição da transformada de Hankel, equação (A.12), chega-se a

$$S = \frac{d^2}{dz^2} \bar{G}(\gamma_i, z/r', z') \quad (A.27)$$

O termo T, expressão (A.16), é dado por

$$T = K^2 \int_0^{R_2} dr \cdot r \cdot J_0(\gamma_i \cdot r) \cdot G(r, z/r', z') \quad (A.28)$$

Novamente, pela definição da transformada de Hankel, equação (A.12), chega-se a:

$$T = K^2 \cdot \bar{G}(\gamma_i, z/r', z') \quad (A.29)$$



Finalmente o termo  $U$ , expressão (A.17), é dado por

$$U = \int_0^{R_2} dr J_0(\gamma_1 r) \cdot \frac{\delta(r-r') \cdot \delta(z-z')}{2 \cdot \pi \cdot D} \quad (\text{A.30})$$

e pelas propriedades do delta de Dirac,

$$U = \frac{J_0(\gamma_1 r') \cdot \delta(z-z')}{2 \cdot \pi \cdot D} \quad (\text{A.31})$$

Substituindo as expressões (A.24), (A.27), (A.29) e (A.31) na equação (A.13.a) obtém-se

$$-\gamma_1^2 \cdot \bar{G}(\gamma_1, z/r', z') + \frac{d^2}{dz^2} \bar{G}(\gamma_1, z/r', z') - K^2 \cdot \bar{G}(\gamma_1, z/r', z') + \frac{J_0(\gamma_1 r') \cdot \delta(z-z')}{2 \cdot \pi \cdot D} = 0 \quad (\text{A.32})$$

Fazendo

$$A_1^2 = K^2 + \gamma_1^2$$

pode-se escrever a equação (A.32) como,

$$\frac{d^2}{dz^2} \bar{G}(\gamma_1, z/r', z') - A_1^2 \cdot \bar{G}(\gamma_1, z/r', z') + \frac{J_0(\gamma_1 r')}{2 \cdot \pi \cdot D} \cdot \delta(z-z') = 0 \quad (\text{A.33})$$

Cumprindo-se assim, o ítem (I) do modelo proposto para a determinação da função de Green.

Note que na equação (A.33), a descontinuidade da derivada primeira de  $\bar{G}(\gamma_1, z/r', z')$  no ponto  $z = z'$  é dada por:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{G}_2'(\gamma_i, z) \Big|_{z=z'+\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{G}_1'(\gamma_i, z) \Big|_{z=z'-\epsilon} = -J_0 \frac{(\gamma_i, r^*)}{2 \cdot \pi \cdot D} \quad (\text{A.34})$$

Como foi dito no início do apêndice, a função de Green é dada por

$$\bar{G}(\gamma_i, z/r', z') = \begin{cases} \bar{G}_1(\gamma_i, z) & -z_2 \leq z < z' \\ \bar{G}_2(\gamma_i, z) & z' < z \leq z_2 \end{cases}$$

Pela propriedade (A.a) tem-se,

$$\frac{d^2}{dz^2} \bar{G}_1(\gamma_i, z) - A_1^2 \bar{G}_1(\gamma_i, z) = 0 \quad (\text{A.35})$$

cuja solução é dado por

$$\bar{G}_1(\gamma_i, z) = A \cdot \sinh[\bar{A}_1 \cdot z] + B \cdot \cosh[\bar{A}_1 \cdot z] \quad (\text{A.36})$$

Da mesma maneira,

$$\frac{d^2}{dz^2} \bar{G}_2(\gamma_i, z) - A_1^2 \bar{G}_2(\gamma_i, z) = 0 \quad (\text{A.37})$$

cuja solução é dada por

$$\bar{G}_2(\gamma_i, z) = A' \cdot \sinh[\bar{A}_1 \cdot z] + B' \cdot \cosh[\bar{A}_1 \cdot z] \quad (\text{A.38})$$

Pela propriedade (A.b) aplicada a equação (A.36) chega-se a,

$$\bar{G}_1(\gamma_i, z) = \frac{A \cdot \sinh[A_1 \cdot z_2] \cdot \cosh[A_1 \cdot z] + A \cdot \sinh[A_1 \cdot z] \cdot \cosh[A_1 \cdot z_2]}{\cosh[A_1 \cdot z_2]} \quad (\text{A.39})$$

Lembrando-se que

$$\sinh[a+b] = \sinh[a] \cdot \cosh[b] + \sinh[b] \cdot \cosh[a]$$

e definindo

$$c_i = \frac{A}{\cosh[A_1 \cdot z_2]} \quad (\text{A.40})$$

obtêm-se

$$\bar{G}_1(\gamma_i, z) = c_i \cdot \sinh[A_1 \cdot (z+z_2)] \quad (\text{A.41})$$

De maneira análoga, a partir da equação (A.38) tem-se

$$\bar{G}_2(\gamma_i, z) = c'_i \cdot \sinh[A_1 \cdot (z-z_2)] \quad (\text{A.42})$$

Aplicando as propriedades (A.c) e (A.d) às equações (A.41) e (A.42), as constantes  $c_i$  e  $c'_i$  são perfeitamente determinadas

$$c_i = - \frac{J_0(\gamma_i, r') \cdot \sinh[A_1 \cdot (z' - z_2)]}{2 \cdot \pi \cdot D \cdot A_1 \cdot \sinh[A_1 \cdot 2 \cdot z_2]} \quad (\text{A.43})$$

e

$$c'_i = - \frac{J_0(\gamma_i, r') \cdot \sinh[A_1 \cdot (z' + z_2)]}{2 \cdot \pi \cdot D \cdot A_1 \cdot \sinh[A_1 \cdot 2 \cdot z_2]} \quad (\text{A.44})$$

Com a substituição das expressões (A.43) e (A.44) nas equações (A.41) e (A.42), respectivamente, chega-se a

$$\bar{G}(\gamma_i, z/r', z') = \frac{J_0(\gamma_i \cdot r')}{2 \cdot \pi \cdot D \cdot \sqrt{\gamma_i^2 + K^2} \cdot \sinh[2 \cdot z_2 \cdot \sqrt{\gamma_i^2 + K^2}]}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh[\sqrt{\gamma_i^2 + K^2} \cdot (z_2 - z')] \cdot \sinh[\sqrt{\gamma_i^2 + K^2} \cdot (z_2 + z)] - z_2 \leq z < z' \\ \sinh[\sqrt{\gamma_i^2 + K^2} \cdot (z_2 + z')] \cdot \sinh[\sqrt{\gamma_i^2 + K^2} \cdot (z_2 - z)] \quad z' < z \leq z_2 \end{array} \right. \quad (A.45)$$

Terminando assim o ítem II do modelo seguido para a determinação da função de Green.

Finalmente, conforme o ítem III desse modelo, aplica-se o teorema de inversão para condições de contorno homogêneas em  $r = R_2$

$$V(r) = \frac{2}{R_2^2} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{V}(\gamma_i) \cdot \frac{J_0(\gamma_i \cdot r)}{J_1^2(\gamma_i \cdot R)} \quad (A.46)$$

e readmitindo o índice  $j$ , chega-se à forma final da função de Green.

$$G^j(r, z/r', z') = \frac{1}{\pi \cdot R_2^2 \cdot D^j} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \cdot r') \cdot J_0(\gamma_i \cdot r)}{J_1^2(\gamma_i \cdot R_2) \cdot \sqrt{\gamma_i^2 + K^{j2}} \cdot \sinh[2 \cdot z_2 \cdot \sqrt{\gamma_i^2 + K^{j2}}]}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh[\sqrt{\gamma_i^2 + K^{j2}} \cdot (z_2 - z')] \cdot \sinh[\sqrt{\gamma_i^2 + K^{j2}} \cdot (z_2 + z)] - z_2 \leq z < z' \\ \sinh[\sqrt{\gamma_i^2 + K^{j2}} \cdot (z_2 + z')] \cdot \sinh[\sqrt{\gamma_i^2 + K^{j2}} \cdot (z_2 - z)] \quad z' < z \leq z_2 \end{array} \right.$$

(A.47)

A substituição , na equação (A.47) das variáveis  $z$  por  $z'$  e vice-versa , inverte apenas o domínio de definição da função dando assim, um indício da validade da equação determinada.

REFERÊNCIAS

1. ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, J. Handbook of mathematical functions, New York, Dover, 1965.
2. BATEMAN, H. Tables of integral transference. New York , 1954, v. 2.
3. BELL, G.I & GLASSTONE, S. Nuclear reactor theory. New York, Van Nostrand Reinhold, 1970.
4. CINTRA, W.H. Solution of a nonlinear multigroup problem by Green's functions. Transf. Am.nucl. Soc., Hinsdale, Ill, 23:539-8, 1976.
5. DEPPE, L.O. & HANSEN, K.F. Application of the finite element method to two-dimensional diffusion problems . Nucl. Sci. Engng., New York, 54:456-65, 1974.
6. GARCIA, R.D.M. O problema de criticalidade para reatores tipo placa refletida na teoria de transporte em 2 grupos de energia. São Paulo, 1977 . (Dissertação de Mestrado).
7. HILDEBRAND, F.B. Methods of applied mathematics. 2ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1965.
8. INCE , E.L. Ordinary differential equations. New York , Dover, 1956.
9. INTERNATIONAL BUSINESS MACHINES, New York. System 360 - Scientific Subroutine package, Version 3: programmer's manual (FORTRAN). New York, s.d.
10. KOBAYASHI, K. Solution of diffusion equation in r-z geometry by finite Fourier transformation. J. Nucl. Sci. Technol., Tokyo, Japan, 11(12):561-570, Dec. 1974.
11. \_\_\_\_\_ & NISHIHARA, H. Solution of group-diffusion equation using Green's functions. Nucl. Sci. Engng., New York, 28:93-104, 1967.
12. LAMARSH, J.R. Introduction to nuclear reactor theory . Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.

13. LARSEN, J.E. & WEST, G.B. Calculated fluxes and cross sections for Triga Reactors. San Diego, Calif., Gulf Energy and Environmental Systems, Aug. 1963. (GA-4361).
14. LEMANSKA, M. The solution of the multi-dimensional, multi group diffusion equation using the lie series method bare reactor. J. nucl. Energy, London, 25:397-403, 1971.
15. MATHEWS, J. & WALKER, R.L. Mathematical methods of physics. New York, Benjamin, 1964.
16. MEEN, J.L. Two group reactor theory. New York, Gordon and Breach, 1964.
17. OHNISHI, Finite element method applied to reactor physics problems. J. nucl. Sci. Technol., Tokyo, 8(12):717-20, Dec. 1971.
18. OHTANI, N. Solution of diffusion equations in two-dimensional cylindrical geometry by series expansions. J. nucl. Sci. Technol., Tokyo, 13(1):9-18, Jan. 1976.
19. REIF, F. Statistical physics. New York, McGraw-Hill, 1965. v.5 .
20. ROOS, B.W. Analytic functions and distributions in physics and engineering. New York, Wiley, 1969.
21. SNEDDON, I.N. Elements of partial differential equations. New York, McGraw-Hill, 1957 .